



Pole powierzchni graniastosłupa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pole powierzchni graniastosłupa

Źródło: [William Daigneault](#) on [Unsplash](#), domena publiczna.

Masz już wiedzę dotyczącą odcinków i kątów w graniastosłupie, potrafisz wykorzystam ją do obliczania objętości graniastosłupa. Kolejnym ważnym zagadnieniem jest obliczanie pola powierzchni. Pole powierzchni wielościanu, to suma pól powierzchni wszystkich jego ścian. Ponieważ ściany graniastosłupa dzielimy na podstawy i ściany boczne, to wzór na pole powierzchni graniastosłupa będzie uwzględniał te dwa rodzaje ścian.

Twoje cele

- Podasz wzór na pole powierzchni graniastosłupa.
- Obliczysz pole powierzchni graniastosłupa korzystając wprost ze wzoru.
- Obliczysz pole powierzchni graniastosłupa wykorzystując własności odcinków i kątów w graniastosłupie.
- Obliczysz długości odcinków w graniastosłupie znając pole powierzchni bryły.
- Przeanalizujesz związek pomiędzy długością krawędzi podstawy i wysokością graniastosłupa, a jego polem powierzchni.

Przeczytaj

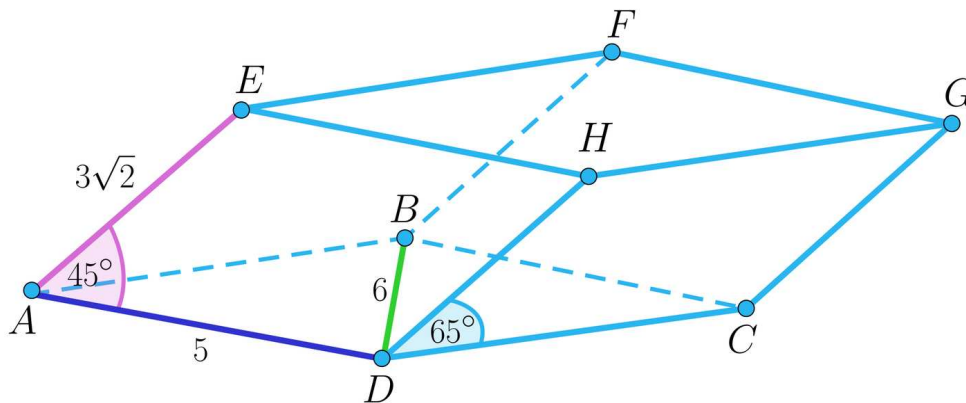
Pole powierzchni każdego graniastoslupa można policzyć ze wzoru:

$$P_c = 2P_p + P_b,$$

gdzie P_p jest polem podstawy, a P_b sumą wszystkich ścian bocznych.

Przykład 1

Obliczymy pole powierzchni graniastoslupa pochylego czworokątnego, którego podstawą jest romb, jak na rysunku.



Korzystając z faktu, że przekątne dzielą się na połowy i pod kątem prostym otrzymujemy, że połowa przekątnej AC jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej 3 i przeciwprostokątnej 5. Ze znanej trójki Pitagorejskiej otrzymujemy trójkąt o bokach długości 3, 4, 5. Czyli $|AC| = 8$.

A zatem $P_p = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Ściany boczne są parami przystającymi równoległobokami. Ich pola obliczymy ze wzoru $P = ab \sin \alpha$, gdzie a, b są długościami boków równoległoboku, a α kątem między nimi.

Mamy więc:

$$\begin{aligned} P_b &= 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin 65^\circ \approx \\ &\approx 30\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 30\sqrt{2} \cdot 0,9063 \approx 30 + 38,4513 \approx 68,45 \end{aligned}$$

A zatem pole całkowite wynosi $P_c \approx 48 + 68,5 = 116,5$.

Ważne!

Aby obliczyć **pole powierzchni bocznej graniastoslupa** prostego wystarczy pomnożyć obwód wielokąta w podstawie przez długość krawędzi bocznej.

Przykład 2

Podstawą graniastoslupa prostego jest trapez, którego wysokość wynosi 3. Suma długości podstaw trapezu wynosi 12, a suma długości ramion 10. Obliczymy pole powierzchni tego graniastoslupa, wiedząc, że wysokość bryły wynosi 6.

Obliczymy najpierw pole trapezu będącego podstawą tego graniastoslupa:

$$P_p = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18.$$

Pole boczne jest sumą pól ścian bocznych. Jeżeli oznaczymy boki trapezu przez a, b, c, d , to $P_b = aH + bH + cH + dH = (a + b + c + d) \cdot H = Obw_{\text{trapezu}} \cdot H$.

$$\text{Czyli } P_b = (12 + 10) \cdot 6 = 132.$$

Pole powierzchni graniastoslupa wynosi więc $P_c = 2 \cdot 18 + 132 = 168$.

W szczególności mamy następujące wzory:

- Dla sześcianu o krawędzi a : $P_c = 6a^2$
- Dla prostopadłościanu o krawędziach a, b, c : $P_c = 2ab + 2bc + 2ac$
- Dla graniastoslupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H :
$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$
- Dla graniastoslupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H : $P_c = 2a^2 + 4aH$
- Dla graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H : $P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$

Przykład 3

Pole powierzchni graniastoslupa prawidłowego czworokątnego wynosi 42. Obliczymy długość krawędzi podstawy wiedząc, że wysokość wynosi 2.

Podstawimy dane do wzoru na pole powierzchni graniastoslupa prawidłowego czworokątnego $P_c = 2a^2 + 4aH$. Mamy więc $42 = 2a^2 + 4a \cdot 2$. Jest to równanie kwadratowe równoważne z równaniem $2a^2 + 8a - 42 = 0$. Dzieląc stronami przez 2 otrzymujemy $a^2 + 4a - 21 = 0$.

Rozwiążemy to równanie za pomocą wyróżnika trójmianu kwadratowego.

$$\text{Mamy więc } \Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100.$$

$$\sqrt{\Delta} = 10$$

$$a_1 = \frac{-4-10}{2} = -7 < 0, a_2 = \frac{-4+10}{2} = 3.$$

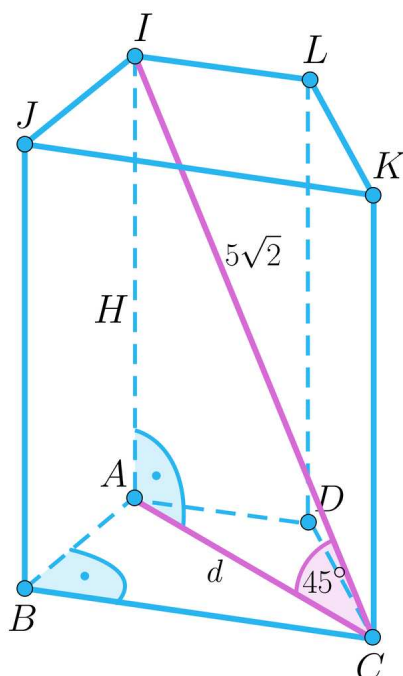
Ponieważ a jest długością krawędzi podstawy, to $a = 3$.

Do obliczania pola powierzchni graniastosłupa możemy również wykorzystać długości odcinków i miary kątów w graniastosłupie.

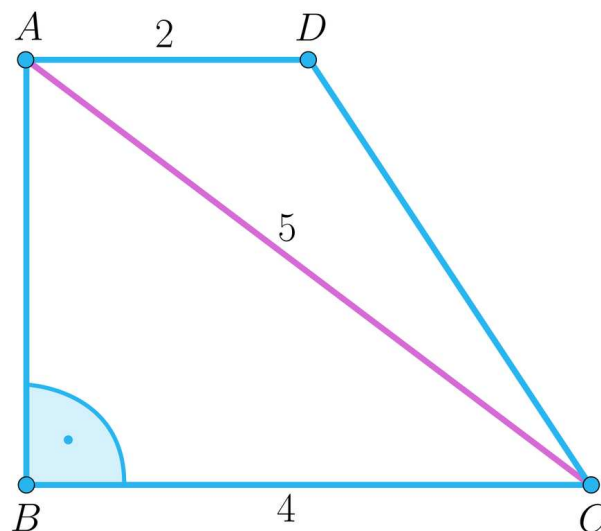
Przykład 4

Podstawą **graniastosłupa prostego** jest trapez prostokątny o podstawach długości 2 i 4. Dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość $5\sqrt{2}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Obliczymy pole powierzchni tego graniastosłupa.

Zrobimy rysunek pomocniczy.

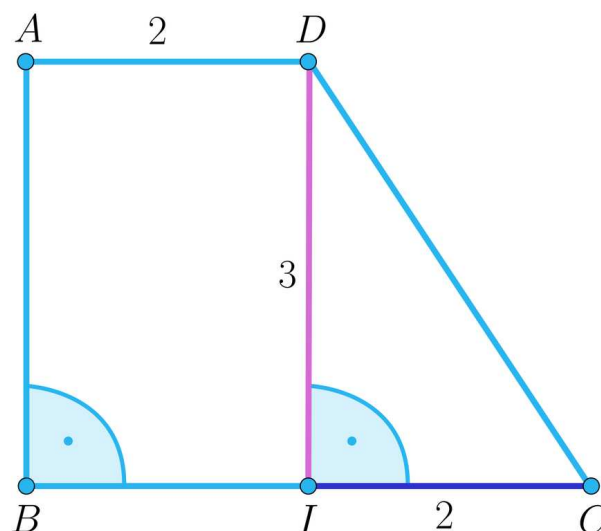


Trójkąt IAC jest równoramienny prostokątny, czyli $d = 5$ i $H = 5$. Obliczymy długość wysokości trapezu z twierdzenia Pitagorasa.



Mamy $|AB|^2 + 4^2 = 5^2$, a stąd $|AB| = 3$.

Możemy teraz obliczyć długość ramienia CD .



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DIC mamy $3^2 + 2^2 = |CD|^2$. A stąd $|CD| = \sqrt{13}$.

Teraz możemy już obliczyć pole powierzchni graniastosłupa.

$P_p = \frac{(2+4) \cdot 3}{2} = 9$ oraz $P_b = (2 + 3 + 4 + \sqrt{13}) \cdot 5 = 45 + 5\sqrt{13}$. A zatem

$P_c = 18 + 45 + 5\sqrt{13} = 63 + 5\sqrt{13}$.

Słownik

graniastosłup prosty

graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są prostokątami

pole powierzchni bocznej graniastosłupa

suma pól ścian bocznych graniastosłupa

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią animacji 3D. Zwróć uwagę jakie własności graniastopu możemy wykorzystywać do obliczania pola powierzchni graniastopu.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaakCKJ7u>

Film nawiązujący do treści materiału, prezentujący sposób obliczania pola powierzchni graniastopu.

Polecenie 2

Podstawą graniastopu prostego o wysokości 5 jest trójkąt prostokątny, dla którego tangens jednego z kątów wynosi $\frac{8}{15}$. Pole powierzchni tego graniastopu wynosi 880. Oblicz objętość tego graniastopu.

Polecenie 3

Stosunek boków w prostopadłościanie wynosi 1 : 3 : 6, a pole powierzchni wynosi tyle, co pole sześcianu o krawędzi 6. Oblicz wymiary tego prostopadłościanu.

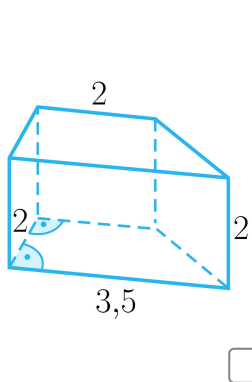
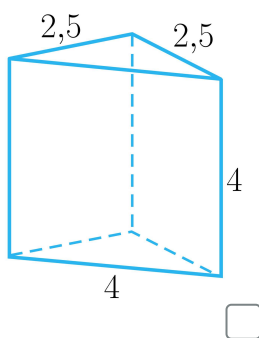
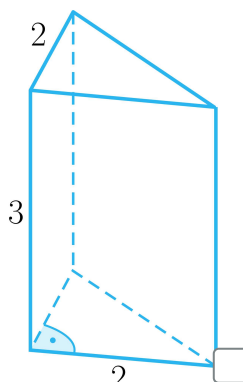
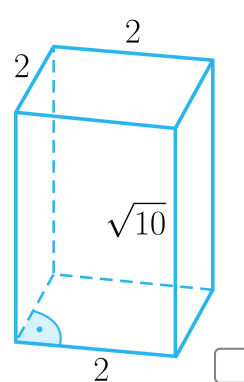
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Spośród narysowanych graniastopów wybierz te, których pola powierzchni wyrażają się liczbami wymiernymi.

☐☐☐☐

Ćwiczenie 2



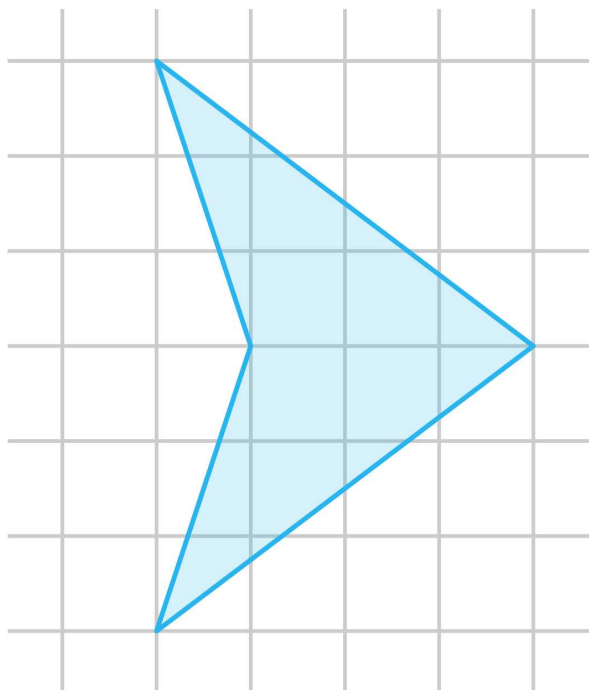
Pole powierzchni graniastopu prawidłowego trójkątnego jest sześciokrotnie mniejsze od pola powierzchni graniastopu prawidłowego sześciokątnego o tej samej długości krawędzi podstawy. Oznacza to, że wysokość graniastopu sześciokątnego jest:

- ☐ Taka sama jak w graniastopie prawidłowym trójkątnym.
- ☐ 2 razy dłuższa niż w graniastopie prawidłowym trójkątnym.
- ☐ 3 razy dłuższa niż w graniastopie prawidłowym trójkątnym.
- ☐ 6 razy dłuższa niż w graniastopie prawidłowym trójkątnym.

Ćwiczenie 3



Podstawą graniastopła prostego jest czworokąt jak na rysunku (jedna kratka to jedna jednostka).



Wysokość graniastopła wynosi 5. Pole powierzchni tego graniastopła mieści się w przedziale:

☐ (89, 99)

☐ (99, 109)

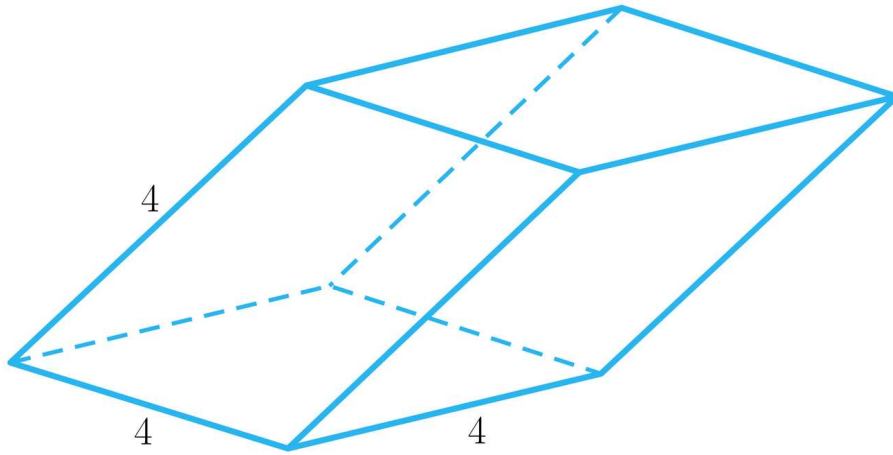
☐ (109, 120)

☐ (80, 89)

Ćwiczenie 4



W podstawie graniastostupa pochyłego znajduje się kwadrat o boku długości 4. Wszystkie jego ściany boczne są rombami, które nie są kwadratami.



Wybierz zdania prawdziwe:

- ☐ Ściany boczne każdego takiego graniastostupa są przystające.
- ☐ Pole powierzchni tego graniastostupa jest równe polu powierzchni sześcianu o krawędzi długości 4.
- ☐ Pole powierzchni bocznej tego graniastostupa jest mniejsze od 64.
- ☐ Pole podstawy tego graniastostupa jest większe od pola jednej ściany bocznej.

Ćwiczenie 5



W podstawie graniastopu prostego znajduje się trójkąt równoramienny o podstawie 16 i wysokości 15. Pole powierzchni bocznej tego graniastopu wynosi 225. Wysokość graniastopu ma długość:

☐ 5

☐ 8

☐ 4,5

☐ 6,5

Ćwiczenie 6



Podstawą graniastopu prostego jest dwunastokąt foremny. Wysokość graniastopu wynosi 6, a pole powierzchni bocznej 288. Krawędź podstawy tego graniastopu ma długość:

☐ 8

☐ 4

☐ 6

☐ 2

Ćwiczenie 7



Podstawą graniastopu prostego $ABCDEFGH$ jest romb, którego dłuższa przekątna ma długość 48. Trójkąt ACF , którego bokami są przekątna podstawy i przekątne ścian bocznych jest prostokątny. Kosinus kąta nachylenia wysokości trójkąta ACF wychodzącej z wierzchołka F do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{7}{24}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastopu.

Ćwiczenie 8



W podstawie graniastopu prostego znajduje się romb o boku długości 26. Dłuższa przekątna graniastopu ma długość 96 i tworzy z krawędzią boczną kąt o mierze 30° . Oblicz pole powierzchni tego graniastopu.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni graniastosłupa

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa: X Stereometria, poziom podstawowy

Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- Podaje wzór na pole powierzchni graniastosłupa.
- Oblicza pole powierzchni graniastosłupa korzystając wprost ze wzoru.
- Oblicza pole powierzchni graniastosłupa wykorzystując własności odcinków i kątów w graniastosłupie.
- Oblicza długości odcinków w graniastosłupie znając pole powierzchni bryły.
- Analizuje związek pomiędzy długością krawędzi podstawy i wysokością graniastosłupa, a jego polem powierzchni.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody pracy:

- burza mózgów,
- rozmowa nauczająca,

- dyskusja,
- ćwiczeniowa.

Formy pracy:

- praca całą klasą,
- praca w parach,
- praca samodzielna.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- materiały zawarte w e-podręczniku,
- modele graniastosłupów.

Przebieg lekcji:

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wraz z uczniami przypomina w formie pogadanki dotychczasowe wiadomości o kątach i odcinkach w graniastosłupach (może się w tym celu posłużyć materiałami z poprzednich lekcji e-podręcznika).
2. Nauczyciel formułuje temat lekcji i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel podaje wzór na pole powierzchni graniastosłupa, prosi uczniów o wyprowadzenie wzorów na pola powierzchni graniastosłupów prawidłowych.
2. Nauczyciel analizuje przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj.
3. Nauczyciel przedstawia uczniom animację 3D. Prosi uczniów o wykonanie poleceń w parach.
4. Uczniowie sprawdzają poprawność wykonanych poleceń.
5. Uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenia 1 – 4 z sekcji Sprawdź się, następnie rozwiązania są omawiane.
6. Wybrani uczniowie wykonują na tablicy ćwiczenia 7 i 8 z sekcji Sprawdź się.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenie 5 z sekcji Sprawdź się.
2. Uczniowie dokonują ewaluacji kryteriów sukcesu metodą kosza i walizki.

Praca domowa:

Ćwiczenie 6 z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

Siatka graniastosłupa

Wskazówki metodyczne:

Animacja 3D może stanowić utrwalenie wiadomości przez uczniów w domu lub podczas lekcji „Wykorzystanie trygonometrii w obliczeniach dotyczących graniastosłupów”.