



Przegląd równań "z mianownikiem"

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W tym materiale zbierzemy wiadomości i rozwiniemy umiejętności dotyczące rozwiązywania równań zawierających mianownik. Rozważymy problemy, których rozwiązania prowadzą do ułożenia takich równań i znalezienia liczb, które je spełniają.

Zatem przystępując do analizy tego materiału przypomnij sobie sposoby rozwiązywania równań liniowych, kwadratowych i wymiernych.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie zawierające mianownik.
- Określisz dziedzinę równania wymiernego.
- Spośród rozwiązań danego równania wybierzesz te, które spełniają warunki zadania.
- Zbudujesz model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Równania zawierające mianownik można z grubsza podzielić na dwie grupy – równania których mianownikami są tylko liczby i równania mające w mianowniku wyrażenie algebraiczne zawierające zmienne (lub parametry).

Pierwszy typ równań jest dość prosty do rozwiązania, bo cały problem polega najczęściej na jak najszybszym „pozbyciu” się mianownika. W tym celu mnożymy każdą ze stron równania przez wspólną wielokrotność (zwykle najmniejszą wspólną wielokrotność) liczb stojących w mianownikach i skracamy uzyskane ułamki.

W przypadku, gdy w mianowniku ułamka stoi wyrażenie algebraiczne zawierające „literę”, sprawa jest bardziej skomplikowana, gdyż należy w takim przypadku określić jeszcze dziedzinę równania. Można to zrobić, rozpoczynając przekształcanie równania, ale można dopiero po znalezieniu rozwiązania sprawdzić, czy dana liczba istotnie spełnia równanie.

W zadaniach z kontekstem realistycznym trzeba mieć na uwadze rzeczywiste odniesienia do znalezionych wielkości – zatem na przykład wysokość powinna wyrażać się liczbą nieujemną, a prędkość samochodu raczej liczbą mniejszą od 2000.

Na początek proste zadanie tekstowe, prowadzące do rozwiązania równania zawierającego w mianowniku liczby.

Przykład 1

Obliczymy, ile należy wziąć kilogramów srebra próby 700 i ile kilogramów srebra próby 900, aby otrzymać 4 kilogramy srebra próby 850.

Dla przypomnienia: próba srebra to sposób określenia zawartości srebra w stopie wyrażonej w promilach. Na przykład jeśli stop zawiera 70% (czyli 700 promili) czystego srebra, to jest próby 700.

Oznaczmy:

x – ilość srebra próby 700 (w kg)

$4 - x$ – ilość srebra próby 900 (w kg)

$\frac{7}{10}x + \frac{9}{10}(4 - x)$ – ilość czystego srebra w stopie (w kg)

$\frac{\frac{7}{10}x + \frac{9}{10}(4 - x)}{4}$ – próba otrzymanego stopu

Nim przystąpimy do ułożenia i rozwiązania zadania, zauważmy, że:

$$0 \leq x \leq 4$$

Czyli dziedziną równania to: $D = \langle 0, 4 \rangle$.

Zapisujemy i rozwiązujemy równanie wynikające z treści zadania.

$$\frac{\frac{7}{10}x + \frac{9}{10}(4-x)}{4} = \frac{85}{100}$$

Aby „pozbyć się” mianownika, mnożymy obie strony równania przez $NWW(4, 100) = 100$ i skracamy.

$$100 \cdot \frac{\frac{7}{10}x + \frac{9}{10}(4-x)}{4} = \frac{85}{100} \cdot 100$$

$$25 \cdot \left(\frac{7}{10}x + \frac{36}{10} - \frac{9}{10}x \right) = 85$$

Wykonujemy działania w nawiasie i obie strony dzielimy przez 5.

$$5 \left(\frac{36}{10} - \frac{2}{10}x \right) = 17$$

Po lewej stronie równania wykonujemy wskazane działania i skracamy ułamki.

$$\frac{180}{10} - \frac{10}{10}x = 17$$

$$18 - x = 17$$

$$x = 1$$

Ponieważ $1 \in D$, zatem możemy wyznaczyć drugą, szukaną wielkość.

$$4 - 1 = 3$$

Odpowiedź:

Należy wziąć 1 kg srebra próby 700 i 3 kg srebra próby 900.

W następnym przykładzie – klasyczne równanie groźnie wyglądające, ale w rzeczywistości prowadzące do dość banalnych przekształceń.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{a+c} = 2$, gdzie a, b, c to pewne liczby rzeczywiste dodatnie, x – niewiadoma.

Aby rozwiązać równanie – najpierw przyglądamy się mianownikom wyrażeń algebraicznych stojących po lewej stronie równania.

Każda z liczb a, b, c jest dodatnia, zatem $b + c > 0$, $a + c > 0$, czyli do dziedziny równania należą wszystkie liczby rzeczywiste.

Przekształcamy równoważnie równanie tak, aby „pozbyć się” mianownika.

Czyli mnożymy obie strony równania przez $(b + c)(a + c)$.

$$\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{a+c} = 2$$

$$(x - a)(a + c) + (x - b)(b + c) = 2(b + c)(a + c)$$

Wykonujemy wskazane działania.

$$xa + xc - a^2 - ac + xb + xc - b^2 - bc = 2ba + 2bc + 2ca + 2c^2$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$xa + 2xc - a^2 + xb - b^2 = 2ba + 3bc + 3ca + 2c^2$$

Przenosimy wyrazy bez niewiadomej na prawą stronę równania i wyłączamy x przed nawias.

$$xa + 2xc - a^2 + xb - b^2 = 2ba + 3bc + 3ca + 2c^2$$

$$xa + 2xc + xb = a^2 + b^2 + 2ba + 3bc + 3ca + 2c^2$$

$$x(a + b + 2c) = a^2 + b^2 + 2ba + 3bc + 3ca + 2c^2$$

Rozkładamy prawa stronę równania na czynniki.

$$x(a + b + 2c) = (a^2 + ab + 2ac) + (b^2 + ab + 2bc) + (2c^2 + ac + cb)$$

$$x(a + b + 2c) = a(a + b + 2c) + b(b + a + 2c) + c(2c + a + b)$$

$$x(a + b + 2c) = (a + b + c)(a + b + 2c)$$

Dzielimy obie strony równania przez wyrażenie dodatnie $a + b + 2c$ i skracamy.

$$x = \frac{(a+b+c)(a+b+2c)}{a+b+2c}$$

$$x = a + b + c$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równia jest liczba $x = a + b + c$.

Teraz zadanie „na dowodzenie”. Podobne nieco do poprzedniego zadania, ale teraz w mianowniku ułamków znajduje się niewiadoma.

Przykład 3

Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $b \neq a$ i $b \neq -a$.

Wykażemy, że równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$$

z niewiadomą x ma dwa rozwiązania.

Aby rozwiązać równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$$

musimy założyć, że:

$$x \neq 0, x \neq -a - b, a \neq 0, b \neq 0.$$

Sprowadzamy lewą stronę równania do wspólnego mianownika.

$$\frac{ab+xb+xa}{xab} = \frac{1}{x+a+b}$$

Przekształcamy równoważnie równanie.

$$\frac{ab+xb+xa}{xab} - \frac{1}{x+a+b} = 0$$

$$\frac{(ab+xb+xa)(x+a+b)-xab}{xab(x+a+b)} = 0$$

Ułamek jest równy 0, jeśli jego licznik jest równy 0. Wystarczy więc rozwiązać teraz równanie:

$$(ab + xb + xa)(x + a + b) - xab = 0$$

Mnożymy, odpowiednio grupujemy wyrazy i rozkładamy otrzymane wyrażenie na czynniki.

$$abx + a^2b + ab^2 + x^2b + xab + xb^2 + x^2a + xa^2 + xab - xab = 0$$

$$(x^2a + x^2b) + (xab + xb^2) + (a^2b + ab^2) + (xab + xa^2) = 0$$

$$x^2(a + b) + xb(a + b) + ab(a + b) + xa(a + b) = 0$$

$$(a + b)(x^2 + xb + ab + xa) = 0$$

$$(a + b) \cdot [x(x + b) + a(x + b)] = 0$$

$$(a + b)(x + b)(x + a) = 0$$

Zapisujemy równoważną alternatywę.

$$a + b = 0 \text{ lub } x + b = 0 \text{ lub } x + a = 0$$

$$a + b = 0 - \text{niezgodne z treścią zadania, bo } b \neq -a$$

$$x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$$

Rozwiązaniami równania są liczby $(-a)$ i $(-b)$. Równanie ma dwa rozwiązania, co należało wykazać.

Równanie zawierające mianownik nie zawsze ma rozwiązanie – może być równaniem sprzecznym.

Definicja: Równanie spreczne

Równanie, które nie ma rozwiązań, nazywamy równaniem sprzecznym.

Do rozwiązania równania zawierającego mianownik, często prowadzi równanie wykładnicze.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie

$$3^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{x}{x-1}}.$$

Określamy dziedzinę równania:

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq 1.$$

Sprowadzamy potęgi do tej samej podstawy i porównujemy wykładniki.

$$3^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2x}{x-1}$$

Korzystamy z własności proporcji i mnożymy wyrażenia stojące po obu stronach równania „na krzyż”.

$$2x^2 = x - 1$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

Równanie kwadratowe nie ma rozwiązania. Zatem i rozpatrywane równanie wykładnicze nie ma rozwiązania.

Odpowiedź:

Równanie jest **sprzeczne** – nie ma rozwiązania.

W ostatnim zadaniu mamy do rozwiązania problem z kontekstem realistycznym. Wydaje się, że analogiczny, jak w Przykładzie 1, jednak, jak się przekonamy, trudniejszy. Istotne więc będzie dobre opisanie zależności wynikających z treści zadania.

Przykład 5

W bańce znajduje się mieszanina soli z wodą w stosunku 2 : 3. W dzbanku znajduje się mieszanina soli z wodą w stosunku 3 : 7. Obliczymy, ile kubków mieszaniny należy wziąć z każdego naczynia, aby otrzymać 12 kubków mieszaniny o stosunku soli do wody 3 : 5.

Oznaczmy:

x – liczba kubków mieszaniny, którą należy pobrać z bańki ($x \geq 0$)

$12 - x$ – liczba kubków mieszaniny, którą należy pobrać z dzbanka ($x \leq 12$)

$\frac{2}{5}$ – zawartości kubka zawierającego mieszaninę z bańki to sól

$\frac{3}{10}$ – zawartości kubka zawierającego mieszaninę z dzbanka to sól

Zatem

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(12 - x)$$

zawartości x kubków mieszaniny z bańki i $12 - x$ kubków mieszaniny z dzbanka to sól.

Jednocześnie

$$12 - \left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(12 - x) \right]$$

zawartości x kubków mieszaniny z bańki i $12 - x$ kubków mieszaniny z dzbanka to woda.

Budujemy równanie wynikające z treści zadania.

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(12 - x)}{12 - \left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(12 - x) \right]} = \frac{3}{5}$$

Sprowadzamy najpierw do najprostszej postaci licznik i mianownik ułamka stojącego po lewej stronie równania.

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(12 - x)}{12 - \left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(12 - x) \right]} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{4}{10}x + \frac{36}{10} - \frac{3}{10}x}{12 - \frac{4}{10}x - \frac{36}{10} + \frac{3}{10}x} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x + 36}{84 - x} = \frac{3}{5}$$

Teraz mnożymy „na krzyż” i rozwiązujemy proste równanie liniowe.

$$5x + 180 = 252 - 3x$$

$$8x = 72$$

$$x = 9$$

Wyznaczona liczba spełnia początkowe założenia: $0 \leq 9 \leq 12$.

Musimy jeszcze sprawdzić, czy mianownik równania dla $x = 9$ jest różny od zera (wcześniej nie określiliśmy w sposób jawny dziedziny równania).

$$12 - \left[\frac{2}{5} \cdot 9 + \frac{3}{10}(12 - 9) \right] = 12 - \frac{18}{5} - \frac{36}{10} + \frac{27}{10} = 12 - \frac{45}{10} = \frac{75}{10} \neq 0$$

Obliczmy, ile kubków mieszanki należy wziąć z dzbanka.

$$12 - 9 = 3$$

Odpowiedź:

Z bańki należy wziąć 9 kubków mieszanki, a z dzbanka tylko 3.

Słownik

równanie sprzeczne

równanie, które nie ma rozwiązań, nazywamy równaniem sprzecznym

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przedstawione tam zadania, a dopiero następnie porównaj z rozwiązaniami.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DQs6p6y27>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej równań zawierających mianownik.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $x - \frac{3x-6}{3} = 1 - \frac{4-2x}{4}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jednym z rozwiązań równania

$$\frac{x-1}{x-3} + \frac{x+7}{x+3} = \frac{4}{5}$$
 jest liczba:

☐ -1

☐ -7

☐ 0

☐ -3

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $\frac{x+3}{x-3} = \frac{x-4}{x+4}$:

☐ ma jedno rozwiązanie, które jest liczbą niewymierną

☐ ma jedno rozwiązanie, które jest liczbą naturalną

☐ ma dwa rozwiązania całkowite

☐ nie ma rozwiązania

Ćwiczenie 3



Wskaż wszystkie liczby, które **nie należą** do dziedziny równania $\frac{4-x}{4-x} + \frac{4}{4+x^2} - \frac{3-x}{2(3+x)} = 0$:

☐ 4

☐ 0

☐ -4

☐ -3

Ćwiczenie 4



Rozwiąż równanie $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+6}{x-1} = \frac{2x+1}{x+1}$ i zaznacz, która odpowiedź jest prawdziwa, a która fałszywa.

	Prawda	Fałsz
Równanie nie ma rozwiązania.	☐	☐
Do dziedziny równania nie należą dwie liczby.	☐	☐
Iloczyn rozwiązań równania jest liczbą ujemną.	☐	☐
Wszystkie liczby spełniające to równanie są liczbami całkowitymi.	☐	☐

Ćwiczenie 5



Rozwiąż równanie $25^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{6-4x}{x}}$ i wpisz liczbę, która jest rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązaniem równania jest .

Ćwiczenie 6



Wpisz najmniejszą liczbę naturalną, przez którą należy pomnożyć obie strony równania, aby „pozbyć się” mianownika.

$$\frac{2x+7}{5} - \frac{3}{4}x + 9 \cdot \frac{6-x}{7} = \frac{11(5x-7)}{6} - \frac{1}{18}$$

Najmniejsza liczba naturalna to .

Ćwiczenie 7



Uzupełnij rozwiązanie zadania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

Suma dwóch różnych liczb jest równa 16, a suma ich odwrotności jest równa $\frac{4}{15}$. Znajdź te liczby.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

x – pierwsza z szukanych liczb

Równanie wynikające z treści zadania to

$$\frac{1}{x} + \left(1 : \boxed{}\right) = \frac{4}{15}$$

Dziedzina równania: $D = \mathbb{R} \setminus \boxed{}, \boxed{}$.

Rozwiązujemy równanie.

$$\left(\boxed{}\right) : [x(16 - x)] = \frac{4}{15}$$

$$\frac{16}{-x^2 + 16x} = \left(\boxed{} : 60\right)$$

$$-x^2 + \boxed{} = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\Delta = \boxed{} > 0$$

$$x_1 = 10 \in D$$

$$x_2 = \boxed{} \in D$$

$$x_1 = 10 \Rightarrow 16 - 10 = 6$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow 16 - 6 = \boxed{}$$

Odpowiedź:

Szukane liczby to 6 i 10.

$$16 - x + x$$

$$16$$

$$6$$

$$10$$

$$16x - 60$$

$$16$$

$$0$$

$$(16 - x)$$

$$16$$

Ćwiczenie 8



Wykaż, że dla $x > 2$ równanie

$$\frac{-2\sqrt{x} + x\sqrt{2} + \sqrt{2x}}{\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{2x}}} = 2x \text{ ma nieskończenie wiele rozwiązań.}$$

Ćwiczenie 9



Przy pogłębianiu rowu pracowały trzy różne koparki.

Gdyby pracowała tylko pierwsza – wykonałaby całą pracę w czasie o 10 dni dłuższym. Gdyby pracowała tylko druga koparka – wykonałaby pracę w czasie o 20 dni dłuższym. Trzecia – samodzielnie pogłębiłaby rów w czasie 6 razy dłuższym. W jakim czasie wykona daną pracę każda z koparek pracując oddzielnie?

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przegląd równań „z mianownikiem”

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania zawierające mianownik
- określa dziedzinę równania wymiernego
- spośród rozwiązań danego równania wybiera te, które spełniają warunki zadania

- buduje model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- karta kołowa
- planowanie z przyszłości

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Metodą karty kołowej uczniowie przypominają wiadomości i umiejętności związane z rozwiązywaniem równań zawierających mianownik.
2. Nauczyciel przedstawia problem i dzieli uczniów na grupy. Każdej grupie rozdaje karty kołowe z „okienkami”:
 - rodzaje równań zawierających mianownik,
 - przykłady równań zawierających mianownik,
 - zadania z kontekstem realistycznym, których rozwiązanie prowadzi do ułożenia równania zawierającego mianownik (1–2 przykłady).
3. Przedstawiciele poszczególnych grup prezentują swoje karty.
4. W wyniku dyskusji podsumowującej, uczniowie powinni zauważyć, że równania zawierające mianownik, można podzielić na dwie najważniejsze grupy – w mianowniku stoi liczba (czyli współczynniki liczbowe są zapisane w postaci ułamków) lub w mianowniku znajduje się co najmniej jedno wyrażenie zawierające zmienną. W pierwszym przypadku najczęściej dziedziną takiego równania jest zbiór liczb rzeczywistych, a w drugim przypadku, istotne jest określenie dziedziny równania.
5. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą planowania z przyszłości. Punktem startu jest stwierdzenie przez uczniów, że potrafią rozwiązywać równania zawierające

mianownik.

2. Patrząc z przyszłości określają działania, jakie wykonali by to osiągnąć. Cofając się wstecz – określają czynności, które muszą obecnie wykonać, aby ukształtować dane umiejętności. W ułożonym planie działań powinni uwzględnić wiadomości, które mogą pozyskać z sekcji „Przeczytaj” i sekcji „Animacja”.
3. Grupy postępują zgodnie z ułożonym planem. Po upływie czasu wyznaczonego przez nauczyciela, rozwiązują Ćwiczenia sprawdzające – grupy kolejno rozwiązują zadania, wykonując obliczenia na tablicy, tłumacząc ich rozwiązania pozostałym.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

W ramach pracy domowej uczniowie powinni wykonać mapę myśli, pokazującą rozliczne zastosowania równań zawierających mianownik.

Materiały pomocnicze:

[Rozwiązywanie równań zawierających mianownik metodą równań równoważnych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja będzie przydatna na zajęciach poświęconych określaniu dziedziny równania.