Logarytm iloczynu

Logarytm iloczynu

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

„Sztuka przynosi nam dowód, że istnieje coś innego niż nicość.”
M. Proust

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Słowo **dowód** ma wiele znaczeń. Czy innym jest dowód dla prawnika, czym innym dla filozofa lub artysty.

Dla matematyka dowód, to wykazanie, że pewne zdanie jest prawdziwe. Aby znaleźć najefektywniejszą drogę postępowania, szukając dowodu, można skorzystać z rady norweskiego pisarza i muzyka Jo Nesbo:

„Nie myśl o tym, czego szukasz. Myśl o tym, co znajdziesz. Dlaczego to tu jest? Czy powinno tu być? Co oznacza? To tak jak czytanie. Jeśli myślisz o « l » patrząc na « k », nie zrozumiesz żadnego słowa.”

W tym materiale poznasz jedno z kluczowych twierdzeń dotyczących działań na logarytmach i zmierzysz się z dowodem tego twierdzenia. Będziesz więc mieć okazję do zastanowienia się czym dla Ciebie jest dowód matematyczny i w jakich sytuacjach warto go wykorzystać.

> **Twoje cele**
>
> - Udowodnisz wzór na logarytm iloczynu.
> - Zastosujesz wzór na logarytm iloczynu przekształcając wyrażenia arytmetyczne.
> - Zapiszesz sumę logarytmów w postaci logarytmu jednomianu.

Przeczytaj

Podamy teraz jedno z podstawowych twierdzeń dotyczących działań na logarytmach. W historii matematyki odegrało ono istotną rolę, gdyż pozwalało zastępować mnożenie dużych liczb dodawaniem tych liczb, co było znacznie łatwiejsze do wykonania (pamiętajmy, że maszyny do liczenia weszły do powszechnego użytkowania dopiero na przełomie XIX i XX wieku).

We wszystkich obliczeniach w tym materiale uwzględniać będziemy założenia wynikające z definicji logarytmu – podstawa logarytmu musi być liczbą dodatnią, różną od jedności, liczba logarytmowana musi być dodatnia.

Twierdzenie: Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby x, y są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód:

Założenie:

$a > 0$, $a \neq 0$ – podstawa logarytmu,

$x > 0$, $y > 0$ – liczby logarytmowane.

Teza:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Oznaczmy: $\log_a x = p$, $\log_a y = q$.

Z definicji logarytmu wynika, że:

$$x = a^p$$

$$y = a^q$$

Mnożymy stronami otrzymane równości.

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q$$

Z własności mnożenia potęg o tych samych podstawach wynika, że:

$$x \cdot y = a^{p+q}$$

Korzystamy ponownie z definicji logarytmu.

$$\log_a(xy) = p + q$$

Zastępujemy liczby p, q odpowiednimi logarytmami. Otrzymujemy tezę.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Co kończy dowód.

Wzór zapisany w powyższym twierdzeniu można uogólnić na dowolną liczbę czynników:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n$$

Możemy powiedzieć (pamiętając o odpowiednich założeniach):

logarytm przy danej podstawie iloczynu liczb dodatnich jest równy sumie logarytmów tych liczb przy tej samej podstawie.

Zauważmy, że prawdziwy jest też wzór odwrotny:

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n = \log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)$$

Podamy teraz przykłady zastosowania twierdzenia o logarytmie iloczynu.

Przykład 1

Zapiszemy każdy z podanych logarytmów w postaci sumy liczby wymiernej i niewymiernej.

$\log_2 24 = \log_2(8 \cdot 3) = \log_2 8 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3$

$\log_3 45 = \log_3(9 \cdot 5) = \log_3 9 + \log_3 5 = 2 + \log_3 5$

$\log_{0,1} 200 = \log_{0,1}(100 \cdot 2) = \log_{0,1} 100 + \log_{0,1} 2 = -2 + \log_{0,1} 2$

Przykład 2

Zapiszemy sumy logarytmów w postaci logarytmu iloczynu i zapiszemy otrzymaną liczbę bez użycia logarytmu.

$\log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) = \log 10 = 1$

$\log_4 32 + \log_4 2 = \log_4(32 \cdot 2) = \log_4 64 = 3$

$\log_{12} 2 + \log_{12} 3 + \log_{12} 4 + \log_{12} 6 = \log_{12}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6) = \log_{12} 144 = 2$

Przykład 3

Znajdziemy liczbę x taką, że $1 + \log 2 + \log x = 3 - \log 2$.

Do obu stron równania dodajemy $\log 2$.

$1 + \log 2 + \log x + \log 2 = 3$

Zapisujemy liczby 1 i 3 za pomocą logarytmów.

$\log 10 + \log 2 + \log x + \log 2 = \log 1000$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu.

$\log(10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x) = \log 1000$

Porównujemy liczby logarytmowane – korzystając z różnowartościowości funkcji logarytmicznej.

$40x = 1000$

$x = 25$

Liczba 25 jest dodatnia (liczba logarytmowana musi być dodatnia), zatem spełnia warunki zadania.

Odpowiedź:

szukana liczba to 25.

Przykład 4

Wiedząc, że $\log_3 5 \approx 1{,}47$ i $\log_3 2 \approx 0{,}63$, obliczymy przybliżone wartości liczb $\log_3 15$, $\log_3 \frac{1}{6}$, $\log_3 2\frac{1}{4}$.

$\log_3 15 = \log_3 3 + \log_3 5 \approx 1 + 1{,}47 = 2{,}47$

$\log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \frac{1}{3} + \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 3 - \log_3 2 \approx -1 - 0{,}63 = -1{,}63$

$\log_3 2\frac{1}{4} = \log_3 \frac{9}{4} = \log_3 9 + \log_3 \frac{1}{4} = 2 - 2 \cdot \log_3 2 \approx 2 - 2 \cdot 0{,}63 = 0{,}74$

Przykład 5

Wiedząc, że $\log_2 3 = m$ obliczymy $A = \log_2 \sqrt{54}$.

Zapisujemy liczbę podpierwiastkową w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest potęga liczby 2.

$A = \log_2 \sqrt{54} = \log_2 \sqrt{2 \cdot 27}$

Zapisujemy logarytm iloczynu w postaci sumy logarytmów.

$A = \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{27}$

Ponieważ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ i $\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}}$, stąd

$A = \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 27 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log_2 3^3$

Podstawiając $\log_2 3 = m$, otrzymujemy

$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}m$

Słownik

twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby x, y są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DxhDMOo4R

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej logarytmu iloczynu.

Polecenie 2

Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami dodatnimi, to $\log xy + \log x^2y^2 + \log x^3y^3 = 6 \cdot \log xy$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wiadomo, że $\log_2 7 = a$ i $\log_2 3 = b$. Wykaż, że $\log_2 882 = 1 + 2 \cdot (a + b)$.

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Ćwiczenie 13

Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

Ćwiczenie 16

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Logarytm iloczynu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- udowadnia wzór na logarytm iloczynu
- stosuje wzór na logarytm iloczynu przekształcając wyrażenia arytmetyczne
- zapisuje sumę logarytmów w postaci logarytmu jednomianu
- określa historyczne znaczenie i przydatność wzoru na możliwość zamiany iloczynu na sumę
- łączy umiejętności z kilku działów matematyki, ustalając strategię rozwiązania zadania logarytmicznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- technika 1 – 2
- technika kruszenia
- technika obiegu kart

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie, korzystając z techniki 1 – 2 (jedno pytanie, odpowiada 2 uczniów – pierwszy wypowiada podpowiedź, drugi daje odpowiedź), odpowiadają na pytania nauczyciela przypominające wiadomości o logarytmach.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach pracują techniką kruszenia. Znając cele zajęć, ustalają co należy zrobić, aby cele zostały osiągnięte. Zastanawiają się też w jaki sposób można uniknąć powstawania problemów w czasie rozwiązywania zadań.
2. Gdy już uczniowie ustalą plan działań, przystępują do przeanalizowania treści zawartych w sekcji „Przeczytaj” i „Animacja „.
3. Teraz każda grupa przygotowuje jedno zadanie analogiczne do zawartych w przeczytanym materiale. Ułożone zadania grupy przekazują sobie nawzajem tak, aby każda z grup rozwiązała wszystkie zadania.
4. Zadania rozwiązywane są techniką obiegu kart. Czyli uczniowie danej grupy dopisują kolejne kroki rozwiązań.

Faza podsumowująca:

1. Podsumowaniem zajęć powinna być dyskusja, w wyniku której przedstawiciele grup omówią ustalone sposoby osiągania celów, ewentualne modyfikacje planu i osiągnięte efekty.
2. Końcowy element to refleksje nauczyciela na temat pracy uczniów i ocena prac grup.

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Działania na logarytmach. Przykłady

Wskazówki metodyczne:

Animacja jest dobrym materiałem do krótkiego powtórzenia materiału na początku lekcji poświęconej logarytmowi ilorazu.