Szeregi rozbieżne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Na tej lekcji poznamy szeregi, które są rozbieżne i są szczególnie użyteczne do badania rozbieżności powiązanych z nimi innych szeregów. Do tego będzie służyć twierdzenie o nazwie kryterium porównawcze rozbieżności szeregów. Poznamy też sposoby rozpoznawania, czy szereg może być rozbieżny.

Zagadnienia w tej jednostce, w wielu przypadkach wykraczają poza wymagania podstawy programowej z matematyki dla poziomu rozszerzonego. Niemniej są ciekawym uzupełnieniem zagadnień związanych z szeregami oraz cennym dodatkiem dla osób przygotowujących się do konkursów i olimpiad matematycznych.

Twoje cele

- Poznasz kilka ważnych szeregów rozbieżnych.
- Nauczysz się badać rozbieżność szeregów za pomocą innych szeregów.

Przeczytaj

Na tej lekcji zapoznamy się z typowymi metodami sprawdzania, czy szereg liczbowy jest rozbieżny.

Zaczniemy od następującego przykładu.

Przykład 1

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. Uzasadnimy, że dla $k \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(k \cdot a_n)$ jest także rozbieżny.

Rozwiązanie

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

jest następującej postaci:

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$

Ciąg sum częściowych szeregu

$\sum_{n=1}^{\infty}(k \cdot a_n)$

jest następującej postaci:

$t_n = k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + k \cdot a_3 + \ldots + k \cdot a_n =$

$= k(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = k \cdot s_n.$

Ponieważ ciąg (s_n) jest rozbieżny, zatem ciąg $(t_n) = (k \cdot s_n)$ jest także rozbieżny.

Zatem udowodniliśmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(k \cdot a_n)$ jest także rozbieżny.

Sformułujmy zatem twierdzenie:

Twierdzenie: O mnożeniu szeregu rozbieżnego przez liczbę

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny oraz k jest różne od 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(k \cdot a_n)$ jest także rozbieżny.

Sformułujemy teraz twierdzenie, które pozwala stwierdzić, że szereg nie jest zbieżny.

Twierdzenie: Warunek wystarczający rozbieżności szeregu

Jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub granicą ciągu (a_n) jest liczba niezerowa, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 2

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{100n+7}$.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{100n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{100+\frac{7}{n}} = \frac{1}{100}.$$

Ponieważ ciąg $a_n = \frac{n+1}{100n+7}$ jest zbieżny do liczby różnej od 0, zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{100n+7}$ jest rozbieżny.

Przykład 3

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+1}{5n-3}$.

Rozwiązanie

Przekształćmy ciąg (a_n) do postaci $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{5n-3} = \frac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{5-\frac{3}{n}}$.

Jeżeli $n = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, to $a_{2k} = \frac{1+\frac{1}{2k}}{5-\frac{3}{2k}}$ i

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2k}}{5-\frac{3}{2k}} = \frac{1}{5}.$$

Jeżeli $n = 2k-1$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, to $a_{2k-1} = \frac{-1+\frac{1}{2k+1}}{5-\frac{3}{2k+1}}$ i

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-1+\frac{1}{2k+1}}{5-\frac{3}{2k+1}} = -\frac{1}{5}.$$

Zatem ciąg $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{5n-3}$ jest rozbieżny, a zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+1}{5n-3}$ jest rozbieżny.

Przykład 4

Zbadamy zbieżność ciągu $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) =$$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} =$

$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)} = 1$

Ponieważ granicą ciągu $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$ jest 1, zatem na podstawie warunku wystarczającego rozbieżności szeregu możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$ jest rozbieżny.

Słownik

szereg liczbowy

szeregiem liczbowym o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nazywamy ciąg, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$s_1 = a_1,$

$s_2 = a_1 + a_2,$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

...

jeżeli ciąg sum częściowych szeregu ma granicę, to nazywamy ją sumą szeregu; jeżeli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy zbieżnym, jeżeli suma szeregu jest nieskończona lub jeżeli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to szereg nazywamy rozbieżnym

Infografika

Przypomnijmy twierdzenie:

Twierdzenie: Kryterium porównawcze

Zakładamy, że nierówność $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ zachodzi dla prawie wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Polecenie 1

Zapoznaj się z metodą wykorzystania kryterium porównawczego przedstawioną w infografice. Następnie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{10}}$ jest rozbieżny?

- NIE
- TAK

Ćwiczenie 2

Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$ jest rozbieżny?

- NIE
- TAK

Ćwiczenie 3

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ jest zbieżny, gdyż możemy skorzystać z kryterium porównawczego i porównać go z szeregiem ______, gdyż dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność ______.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ | $\frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ | $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ | $\frac{2}{n} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

Ćwiczenie 4

Wskaż szeregi spełniające warunek wystarczający rozbieżności.

- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 3^n|}{3^n}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{3n+10}}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n+2}{n}}{n^2}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

Ćwiczenie 5

Wskaż wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(a^2-1)n^5+1}$ jest rozbieżny.

- [ ] 2
- [ ] -2
- [ ] 0
- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] -1
- [ ] 1

Ćwiczenie 6

Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{99 \cdot n^2}$ jest rozbieżny?

- NIE
- TAK

Ćwiczenie 7

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}$.

Ćwiczenie 8

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+4n^2} - n\right)$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Szeregi rozbieżne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada rozbieżność szeregów za pomocą innych szeregów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Szeregi rozbieżne” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Infografika” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

Szeregi i tablice statystyczne

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Szeregi rozbieżne”.