Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W trakcie tego materiału pokażemy praktyczne zastosowania reguły mnożenia, między innymi budując modele kombinatoryczne do doświadczeń polegających na losowaniu. Naszym celem będzie obliczenie, ile jest obiektów spełniających określone warunki.

Przed rozwiązywaniem tych zadań warto przypomnieć sobie pojęcia: dzielnika liczby naturalnej, reszty z dzielenia liczb naturalnych oraz rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze.

> **Twoje cele**
>
> - Będziesz doskonalić umiejętność posługiwania się regułą mnożenia.
> - Znajomość reguły mnożenia pozwoli Ci obliczać, ile jest wyników losowania spełniających zadane warunki.
> - Nauczysz się, jak wykorzystywać regułę mnożenia do rozwiązywania zadań dotyczących liczby dzielników dodatniej liczby całkowitej.
> - Dzięki zastosowaniu reguły mnożenia uzasadnisz wzór określający liczbę dzielników liczby całkowitej.

Przeczytaj

W poniższych przykładach wykorzystywać będziemy definicję reguły mnożenia.

Na wstępie przypomnimy pojęcia:

- dzielnika liczby naturalnej,
- reszty z dzielenia liczb naturalnych
- rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze.

Definicja: Reszta z dzielenia liczb całkowitych

Resztą z dzielenia dodatniej liczby całkowitej n przez dodatnią liczbę całkowitą d nazywamy taką nieujemną liczbę całkowitą r mniejszą od d, że $n = d \cdot k + r$, dla pewnej liczby całkowitej k.
Np. resztą z dzielenia liczby 19 przez 5 jest 4, ponieważ prawdziwa jest równość $19 = 5 \cdot 3 + 4$, gdzie $0 \leq 4 < 5$.

Uwaga. Jako resztę r z dzielenia przez dodatnia liczbę całkowitą d można też rozważać liczby całkowite spełniające warunek $-d < r < d$.

Jeśli reszta r z dzielenia liczby n przez liczbę d jest równa 0, to liczbę całkowitą d nazywamy dzielnikiem liczby całkowitej n.

Definicja: Dzielnik liczby całkowitej

Dzielnikiem dodatniej liczby całkowitej n nazywamy taką dodatnią liczbę całkowitą d, że $n = d \cdot k$, dla pewnej liczby całkowitej k.
Np. liczba 7 jest dzielnikiem liczby 1001, ponieważ prawdziwa jest równość $1001 = 7 \cdot 143$.

Definicja: Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze

Rozkładem liczby naturalnej na czynniki pierwsze nazywamy przedstawienie liczby naturalnej w postaci iloczynu liczb pierwszych; zapis ten zawiera potęgi liczb pierwszych o wykładnikach, które są dodatnimi liczbami całkowitymi.
Np. rozkładem na czynniki pierwsze liczby 28200 jest $28200 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 47^1$.

Przykład 1

Wybieramy liczbę a ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, następnie liczbę b ze zbioru $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ i na koniec liczbę c ze zbioru $\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

Ile jest takich trójek (a, b, c), że iloczyn $a \cdot b \cdot c$ jest podzielny przez 5?

Zauważmy, że iloczyn abc jest podzielny przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego czynników dzieli się przez 5.

Dalszą część rozwiązania przeprowadzimy na dwa różne sposoby.

I **sposób:**

Rozpatrzmy następujące trzy rozłączne przypadki:

1. każda z liczb a, b, c dzieli się przez 5,
2. dokładnie dwie spośród liczb a, b, c dzielą się przez 5,
3. tylko jedna spośród liczb a, b, c dzieli się przez 5.

Ad 1. W przypadku pierwszym liczby a, b, c spełniają warunki: $a = 5, b \in \{10, 15\}$.

Ad 2 W przypadku drugim spośród liczb a, b, c wybieramy dwie podzielne przez 5 rozpatrując następujące trzy rozłączne przypadki:

Ad 2.1 tylko liczby a i b są podzielne przez 5; wtedy $a = 5$, $b \in \{10, 15\}$, $c \in \{16, 17, 18, 19\}$,

Ad 2.2 tylko liczby a i c są podzielne przez 5; wówczas $a = 5$, $b \in \{9, 11, 12, 13, 14, 16\}$, $c \in \{15, 20\}$,

Ad 2.3 tylko liczby b i c są podzielne przez 5, wtedy $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $b \in \{10, 15\}$, $c \in \{15, 20\}$.

Ad 3. Dokładnie jedną liczbę podzielną przez 5 wybieramy spośród liczb a, b, c rozpatrując kolejne trzy rozłączne przypadki:

Ad 3.1 tylko a dzieli się przez 5; wtedy $a = 5$, $b \in \{9, 11, 12, 13, 14, 16\}$, $c \in \{16, 17, 18, 19\}$,

Ad 3.2 tylko b dzieli się przez 5; wtedy $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $b \in \{10, 15\}$, $c \in \{16, 17, 18, 19\}$,

Ad 3.3 tylko c dzieli się przez 5, co oznacza, że $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $b \in \{9, 11, 12, 13, 14, 16\}$, $c \in \{15, 20\}$.

Korzystając z reguły mnożenia oraz z reguły dodawania, obliczamy liczbę trójek (a, b, c) spełniających warunki zadania w każdym z powyższych przypadków:

1. trójka $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$,
2. trójka $1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 2 = 52$,
3. trójka $1 \cdot 6 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \cdot 4 + 8 \cdot 6 \cdot 2 = 184$.

Stąd liczba wszystkich szukanych trójek (a, b, c) jest równa
$4 + 52 + 184 = 240$.

II **sposób:**

Zauważmy, że wobec określenia liczb a, b, c liczba wszystkich możliwych trójek (a, b, c) jest równa $9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$.

W tak otrzymanym zbiorze są dwa rozłączne podzbiory:

- zbiór tych trójek (a, b, c), dla których iloczyn $a \cdot b \cdot c$ dzieli się przez 5,
- zbiór tych trójek (a, b, c), dla których iloczyn $a \cdot b \cdot c$ nie dzieli się przez 5.

Ponieważ iloczyn $a \cdot b \cdot c$ nie dzieli się przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb a; b; c jest niepodzielna przez 5, więc jest to możliwe, gdy $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $b \in \{9, 11, 12, 13, 14, 16\}$ i $c \in \{16, 17, 18, 19\}$.

Na podstawie reguły mnożenia stwierdzamy, że w tej sytuacji mamy $8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$ możliwości.

Oznaczmy przez x liczbę trójek (a, b, c), które spełniają warunki zadania. Z reguły dodawania wynika, że $x + 192 = 432$, skąd $x = 432 - 192 = 240$. Zatem dokładnie tyle jest szukanych trójek (a, b, c).

Przykład 2

W pojemniku znajduje się siedem kul, ponumerowanych od 1 do 7. Z tego pojemnika losujemy cztery razy jedną kulę, za każdym razem zwracając ją z powrotem do pojemnika. Ile jest wszystkich takich wyników tego doświadczenia, że dokładnie raz wylosujemy kulę z numerem parzystym?

Wynik doświadczenia zanotujemy jako czteroelementowy ciąg (a, b, c, d), gdzie:

- a to wynik pierwszego losowania,
- b to wynik drugiego losowania,
- c to wynik trzeciego losowania,
- d to wynik czwartego losowania,

Zauważmy, że możliwe są cztery rozłączne przypadki:

1. a jest liczbą parzystą; wtedy $a \in \{2, 4, 6\}$, $b, c, d \in \{1, 3, 5, 7\}$,
2. b jest liczbą parzystą; wtedy $b \in \{2, 4, 6\}$, $a, c, d \in \{1, 3, 5, 7\}$,
3. c jest liczbą parzystą; wtedy $c \in \{2, 4, 6\}$, $a, b, d \in \{1, 3, 5, 7\}$,
4. d jest liczbą parzystą; wtedy $d \in \{2, 4, 6\}$, $a, b, c \in \{1, 3, 5, 7\}$.

Korzystając z reguły mnożenia, obliczamy liczbę wyników spełniających warunki zadania w każdym z powyższych przypadków:

1. $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$,
2. $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 192$,
3. $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 192$,
4. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 192$.

Korzystając z reguły dodawania, obliczamy liczbę wszystkich wyników, które spełniają warunki zadania

$192 + 192 + 192 + 192 = 768.$

Przykład 3

Mamy do dyspozycji trzy pudełka: czerwone, zielone i niebieskie. W czerwonym pudełku jest 9 kul, ponumerowanych od 1 do 9, w zielonym jest 7 kul, ponumerowanych liczbami od 1 do 7, a w niebieskim jest 8 kul, ponumerowanych od 1 do 8. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Ile jest wszystkich możliwości wylosowania w ten sposób takiej trójki liczb, których suma kwadratów jest podzielna przez 3?

Wynik doświadczenia zanotujemy jako trzyelementowy ciąg (c, z, n), gdzie:

- c to wynik losowania z czerwonego pudełka,
- z to wynik losowania z zielonego pudełka,
- n to wynik losowania z niebieskiego pudełka.

Mamy więc obliczyć, ile jest możliwych trójek liczb (c, z, n) jest liczbą podzielną przez 3.

Przypomnijmy, że reszta z dzielenia liczby całkowitej przez 3 jest równa 0, 1 lub 2.
W każdym z tych przypadków liczbę naturalną można zapisać w postaci odpowiednio: $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$.

Ponadto:

$(3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot \left(3k^2\right),$

$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\left(3k^2 + 2k\right) + 1,$

$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot \left(3k^2 + 4k + 1\right) + 1.$

Zatem kwadrat każdej liczby podzielnej przez 3 jest również liczbą podzielną przez 3, natomiast kwadrat każdej liczby niepodzielnej przez 3 daje z dzielenia przez 3 resztę 1.

Wynika stąd, że suma $c^2 + z^2 + n^2$ jest liczbą podzielną przez 3 w jednym z dwóch rozłącznych przypadków:

1. kiedy każda z liczb c, z, n dzieli się przez 3,
2. kiedy każda z liczb c, z, n jest liczbą niepodzielną przez 3.

Ad 1. W przypadku pierwszym: $c \in \{3, 6, 9\}$, $z \in \{3, 6\}$, $n \in \{3, 6\}$.

Ad 2. W przypadku drugim: $c \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $z \in \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $n \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Korzystając z reguły mnożenia, obliczamy liczbę wyników spełniających warunki zadania w każdym z powyższych przypadków:

1. $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$,
2. $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$.

Wobec tego trójkę liczb spełniającą warunki zadania wylosujemy na $12 + 180 = 192$ sposoby.

Przykład 4

Wykażemy, że liczba 123123 ma dokładnie 32 dodatnie dzielniki całkowite.

Zauważmy, że liczbę 123123 można rozłożyć na czynniki pierwsze np. w poniższy sposób

$$123123 = 123 \cdot 1001 = (3 \cdot 41) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13) = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41.$$

Wobec tego każdy dodatni dzielnik całkowity liczby 123123 jest liczbą postaci

$$3^{\alpha} \cdot 7^{\beta} \cdot 11^{\gamma} \cdot 13^{\sigma} \cdot 41^{\varepsilon},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, z których każda może przyjmować jedynie dwie wartości: 0, 1.

Dzielnikami liczby 123123 są np.

$$21 = 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 41^0,$$

$$123 = 3^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 41^1,$$

$$231 = 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdot 41^0,$$

$$17589 = 3^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 41^1.$$

Oznacza to, że każdemu dodatniemu dzielnikowi całkowitemu liczby 123123 da się wzajemnie jednoznacznie przyporządkować pięcioelementowy ciąg $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ wykładników, zgodnie z kolejnością zapisaną w rozkładzie

$$3^{\alpha} \cdot 7^{\beta} \cdot 11^{\gamma} \cdot 13^{\sigma} \cdot 41^{\varepsilon}.$$

W ten sposób:

- liczba $21 = 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 41^0$ jest reprezentowana przez ciąg $(1, 1, 0, 0, 0)$ oraz temu ciągowi odpowiada liczba 21,
- liczba $123 = 3^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 41^1$ jest reprezentowana przez ciąg $(1, 0, 0, 0, 1)$ oraz temu ciągowi odpowiada liczba 123,
- liczba $231 = 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdot 41^0$ jest reprezentowana przez ciąg $(1, 1, 1, 0, 0)$ oraz temu ciągowi odpowiada liczba 231,
- liczba $17589 = 3^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 41^1$ jest reprezentowana przez ciąg $(1, 0, 1, 1, 1)$ oraz temu ciągowi odpowiada liczba 17589.

Wynika stąd, że dodatnich dzielników całkowitych liczby 123123 jest dokładnie tyle, ile opisanych wyżej ciągów $(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon)$. Ponieważ każda z liczb α, β, γ, σ, ε może przyjmować dokładnie dwie wartości, więc korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że takich ciągów jest $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Zatem liczba 123123 ma 32 dodatnie dzielniki całkowite.

Ważne!

Każdą dodatnią liczbę całkowitą n można przedstawić w postaci rozkładu na czynniki pierwsze, to znaczy, że istnieją takie parami różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_k$ oraz nieujemne liczby całkowite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, że

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Rozumując analogicznie jak w powyższym przykładzie, stwierdzamy, że dodatnich dzielników całkowitych liczby n jest dokładnie tyle, ile różnych ciągów postaci $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ w liczbach nieujemnych, ograniczonych wartościami odpowiednio $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Z reguły mnożenia wynika, że takich ciągów jest

$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Zatem liczba $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ma dokładnie $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ dodatnich dzielników całkowitych.

Korzystając z tego spostrzeżenia ustalimy np., że:

- liczba $2020 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 101^1$ ma $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ dodatnich dzielników całkowitych,
- liczba $16200 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ ma $(3 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ dodatnich dzielników całkowitych,

- liczba $46464 = 2^7 \cdot 3^1 \cdot 11^2$ ma $(7+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 8 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ dodatnich dzielników całkowitych.

Słownik

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n-tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$

ciąg

funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych lub pewien jego podzbiór, a wartościami są liczby rzeczywiste

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak wyznaczyć liczbę wszystkich kwadratów, których boki zawierają się w liniach siatki prostokąta o wymiarach 7×12.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DjaKrMdRr

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej reguły mnożenia i tego jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki.

Polecenie 2

Korzystając z omówionego przykładu, rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Rozpatrujemy wszystkie prostokąty, których boki zawierają się w liniach siatki dzielącej na kwadraty jednostkowe prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 10$, $|BC| = n$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 10.

Wykaż, że wśród tak otrzymanych prostokątów jest dokładnie $55n - 165$ kwadratów.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wybieramy liczbę a ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, następnie liczbę b ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, w trzecim kroku liczbę c ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i na koniec liczbę d ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ile jest takich czwórek (a, b, c, d), że iloczyn $abcd$ jest nieparzysty?

- 256
- 192
- 81
- 144

Ćwiczenie 2

Mamy do dyspozycji dwa pudełka: białe i czarne. W białym pudełku jest 10 kul, ponumerowanych od 1 do 10, a w czarnym jest 11 kul, ponumerowanych liczbami od 1 do 11. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę.
Przyjmujemy następujące oznaczenia:
A - zbiór wszystkich takich wyników powyższego losowania, że iloczyn wylosowanych numerów jest liczbą niepodzielną przez 5 ,
B - zbiór wszystkich takich wyników powyższego losowania, że iloczyn wylosowanych numerów jest liczbą niepodzielną przez 7 ,
C - zbiór wszystkich takich wyników powyższego losowania, że iloczyn wylosowanych numerów jest liczbą nieparzystą,
D - zbiór wszystkich takich wyników powyższego losowania, że iloczyn wylosowanych numerów jest liczbą podzielną przez 3 .
Połącz w pary podane niżej liczby.

$\|D\|$	54
$\|C\|$	72
$\|B\|$	30
$\|A\|$	90

Ćwiczenie 3

Opisane poniżej liczby uporządkuj rosnąco.

- Liczba wszystkich dodatnich dzielników całkowitych liczby 1026.
- Liczba wszystkich dodatnich dzielników całkowitych liczby 1023.
- Liczba wszystkich dodatnich dzielników całkowitych liczby 1025.
- Liczba wszystkich dodatnich dzielników całkowitych liczby 1024.

Ćwiczenie 4

Oblicz, ile dodatnich dzielników całkowitych ma liczba 20592. Kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku wpisz w okienku poniżej.

Ćwiczenie 5

W pojemniku znajduje się dziesięć kul, ponumerowanych od 1 do 10. Z tego pojemnika losujemy trzy razy jedną kulę, za każdym razem zwracając ją z powrotem do pojemnika. Oblicz, ile jest wszystkich takich wyników tego doświadczenia, że co najmniej raz wylosujemy kulę z numerem podzielnym przez 3.

- 343
- 900
- 999
- 657

Ćwiczenie 6

Wszystkich dodatnich, parzystych dzielników liczby 3536 jest:

- [ ] tyle samo, co wszystkich dodatnich dzielników liczby 1410.
- [ ] tyle samo, co wszystkich dodatnich dzielników liczby 216.
- [ ] tyle samo, co wszystkich dodatnich dzielników liczby 384.
- [ ] tyle samo, co wszystkich dodatnich dzielników liczby 2000.

Ćwiczenie 7

W kopercie znajduje się 11 kartek, ponumerowanych kolejno od 1 do 11. Z tej koperty losujemy cztery razy jedną kartkę, zwracając ją po każdym losowaniu do koperty. Oblicz, ile jest wszystkich możliwości wylosowania w ten sposób takiej czwórki liczb, których suma kwadratów jest podzielna przez 4. Wpisz w okienku poniżej kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Ćwiczenie 8

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne trzycyfrowe, które mają dokładnie trzy dodatnie dzielniki całkowite. Wówczas suma najmniejszej i największej z takich liczb:

- [ ] jest mniejsza niż 1100.
- [ ] jest liczbą parzystą.
- [ ] jest liczbą podzielną przez 3.
- [ ] jest większa niż 1050.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Reguła mnożenia – jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki?

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.
Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne (językiem ucznia):

Uczeń:

- będzie doskonalić umiejętność posługiwania się regułą mnożenia;
- będzie obliczać, ile jest wyników losowania spełniających zadane warunki;

- nauczy się, jak wykorzystywać regułę mnożenia do rozwiązywania zadań dotyczących liczby dzielników dodatniej liczby całkowitej;

Dzięki zastosowaniu reguły mnożenia uzasadnisz wzór określający liczbę dzielników liczby całkowitej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- gra dydaktyczna;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki?" oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja" - „Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej

rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak wyznaczyć liczbę wszystkich kwadratów, których boki zawierają się w liniach siatki prostokąta o wymiarach 7×12." Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się". Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki?" i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja" i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze

- Reguła mnożenia, reguła dodawania

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja" można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki?".