Wielkości odwrotnie proporcjonalne

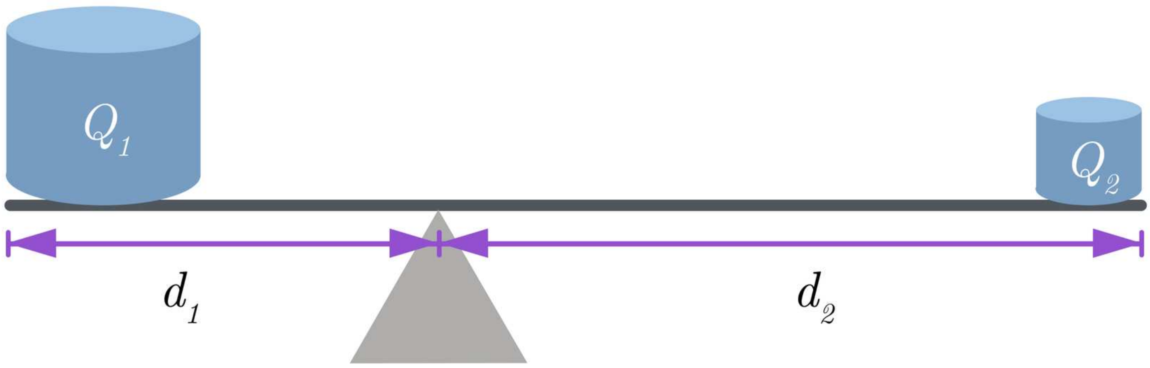
Źródło: Thanasis Papazacharias, dostępny w internecie: https://pixabay.com/.

Czy można się huśtać ze słoniem?

Oczywiście, że tak!

Dzięki prawidłowo ustawionemu punktowi podparcia w dźwigni dwustronnej każdy może huśtać się ze słoniem. Punkt podparcia musi być bliżej słonia niż Ciebie.

Reguła ta, zwaną zasadą dźwigni Archimedesa głosi, że dwa przedmioty na huśtawce będą w równowadze, gdy odległości od punktu podparcia będzie odwrotnie proporcjonalne do ich ciężarów.



$$Q_1 \cdot d_1 = Q_2 \cdot d_2$$

W tym materiale sprawdzimy jak należy ustawić punkt podparcia, aby czteroletnia Julia mogła huśtać się ze słoniem.

Twoje cele

- Odróżnisz wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne.
- Sprawdzisz, czy zmienne są odwrotnie proporcjonalne.

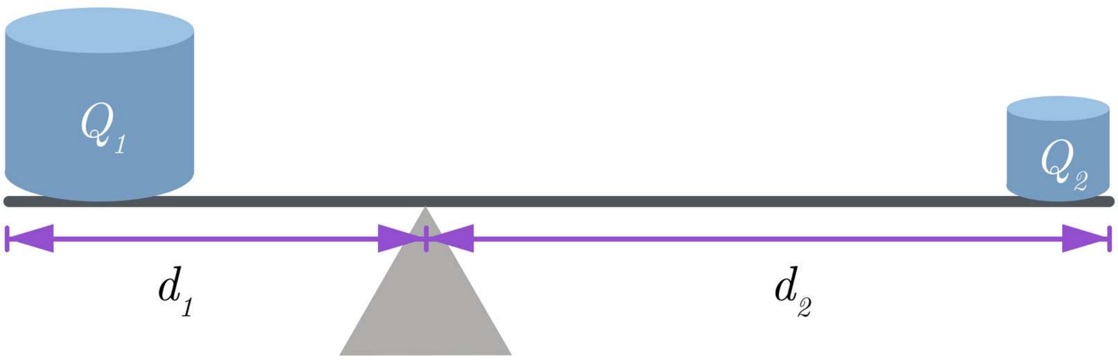
Przeczytaj

Przykład 1

Obliczymy jak daleko od punktu podparcia musiałaby usiąść czteroletnia Julia ważąca $18\ \text{kg}$, aby mogła huśtać się ze słoniem ważącym $4,5\ \text{t}$. Spójrzmy na dane podane na poniższym rysunku.

Rozwiązanie

Dźwignia dwustronna pozostaje w równowadze, gdy spełniony jest warunek



$Q_1 \cdot d_1 = Q_2 \cdot d_2$

$4,5\ \text{t} = 4500\ \text{kg}$

$4500 \cdot 2 = 18 \cdot x$

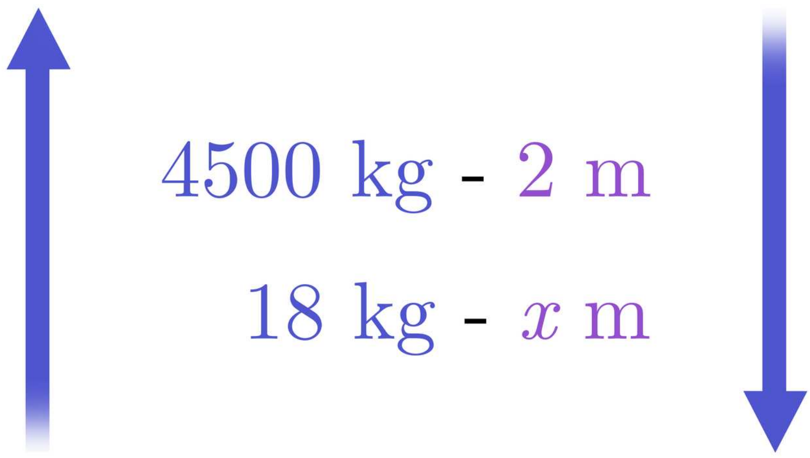
$9000 = 18 \cdot x$

$x = 500$

Odpowiedź

Julia musiałaby usiąść 500 m od punktu podparcia.

Zauważmy, że moglibyśmy zapisać dane z zadania w następujący sposób:



Mnożąc wierszami otrzymamy

$4500 \cdot 2 = 18 \cdot x$

$9000 = 18 \cdot x$

$x = 500$

Odpowiedź

Julia musiałaby usiąść 500 m od punktu podparcia.

Faktycznie, odległości od punktu podparcia będą odwrotnie proporcjonalne do ciężarów ciał. Im większa odległość od punktu podparcia, tym mniejszy ciężar.

Definicja: Proporcjonalność odwrotna

Proporcjonalnością odwrotną nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi x, y, określoną wzorem

$$x \cdot y = a,$$

gdzie a jest liczbą różną od zera.

O zmiennych x, y mówimy, że są *odwrotnie proporcjonalne*. Współczynnik a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej**.
Ważne!

Iloczyn odpowiadających sobie wartości dwóch wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały. W zastosowaniach praktycznych zakładamy, że wielkosci odwrotnie proporcjonalne sa dodatnie.

Przykład 2

Julia pokonuje pieszo drogę do szkoły z prędkością $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w ciągu $30\ \text{min}$. Ile czasu zajęłoby Julce pokonanie takiej samej drogi, gdyby jechała na hulajnodze z prędkością $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Rozwiązanie

x – czas (w godzinach) pokonania drogi z domu do szkoły, gdyby Julka jechała hulajnogą.

$$4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad - \quad \frac{1}{2}\ \text{h}$$

$$10\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad - \quad x\ \text{h}$$

$4 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot x$, czyli $x = \frac{1}{5}$.

Przypomnijmy, że $\frac{1}{5}\ \text{h} = \frac{12}{60}\ \text{h} = 12\ \text{min}$.

Odpowiedź

Julia pokonałaby drogę do szkoły w ciągu 12 minut, gdyby jechała hulajnogą.

Na podstawie poniższej tabeli przedstawmy, w jaki sposób zmiana wartości prędkości wpływa na zmianę wartości czasu.

Zależność czasu od prędkości						
Prędkość $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	4	10	12	20	2	3
Czas $[\text{h}]$	$0,5$	$0,2$	$\frac{1}{6}$	$0,1$	1	$\frac{2}{3}$
Droga $[\text{km}]$	2	2	2	2	2	2

Przypomnijmy wzór:

$$s = v \cdot t$$

Zauważmy, że droga (s) jest wielkością stałą (nie zmienia się), czyli jej wartość jest współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej. Natomiast prędkość (V) i czas (t) są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Jeśli jedna wielkość maleje, to druga tyle samo rośnie.

W powyższym przykładzie: jeśli prędkość zwiększymy $2,5$ raza, to czas przejazdu skróci się $2,5$ raza.

$4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2,5 = 4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{5}{2} = 10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$30\ \text{min} : 2,5 = 30\ \text{min} \cdot \frac{2}{5} = 12\ \text{min}$.

Przypomnijmy rodzaje proporcjonalności:

- proporcjonalność prosta,
- proporcjonalność odwrotna.

Przeanalizujmy poniższe zadania z proporcjonalnością prostą i odwrotną, aby utrwalić i zapamiętać różnice między nimi występujące.

- Cukiernik przygotowuje 2 torty, na które zużywa tuzin jajek. Następnie dostał zamówienie na kolejne 3 torty. Ile łącznie jajek zużyje?
- Zapas składników na torty dla 80 porcji wystarczy na 6 dni. Na ile dni wystarczy tych zapasów, jeśli liczba porcji wzrośnie o 16 (zakładamy, że porcje tortu pozostają takie same)?

Przykład 3

Cukiernik przygotowuje 2 torty Pavlova, na które zużywa tuzin jajek. Następnie dostał zamówienie na kolejne 3 tory Pavlova. Ile łącznie jajek zużyje?

Rozwiązanie

Tuzin to 12 sztuk.

2 torty - 12 jajek

5 tortów - x jajek

Ze wzrostem ilości tortów, wzrasta ilość jajek zużytych do wypieków. W danym przykładzie wielkości są wprost proporcjonalne.

Mnożymy „na krzyż”, czyli

$2 \cdot x = 5 \cdot 12$, czyli $x = 30$.

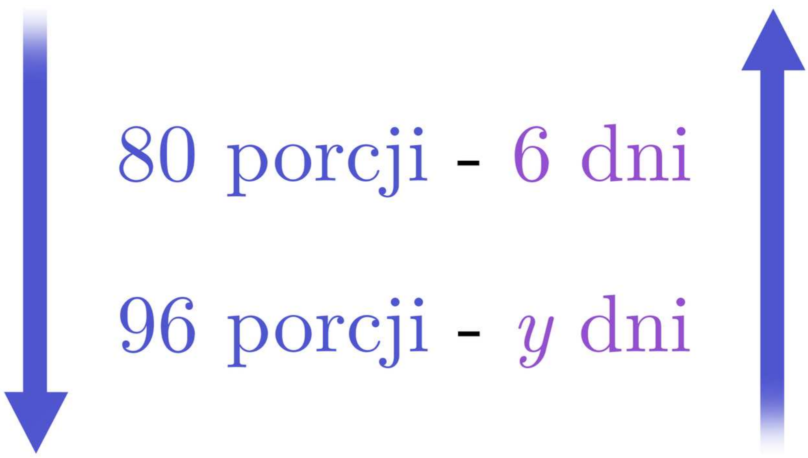
Odpowiedź

Łącznie cukiernik zużył 30 jaj.

Przykład 4

Zapas składników na torty, z których można wykonać 80 porcji wystarczy na 6 dni. Na ile dni wystarczy tych zapasów, jeśli liczba porcji wzrośnie o 16 (zakładamy, że wielkość porcji jest taka sama)?

Rozwiązanie



Ze wzrostem ilości porcji, maleje ilość dni na jakie wystarczy zapasu składników.

Zatem wielkości są odwrotnie proporcjonalne.

Mnożymy „wierszami”, czyli

$80 \cdot 6 = 96 \cdot y$, czyli $y = 5$.

Odpowiedź

> Na 5 dni wystarczy zapasów składników na torty, z których można wykonać 96 porcji.

Słownik

proporcjonalność prosta

proporcjonalnością prostą nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi y, x, określoną wzorem

$$y = a \cdot x,$$

gdzie a jest liczbą różną od zera, zwaną współczynnikiem proporcjonalności

wprost proporcjonalne

jeśli dwie wielkości dodatnie zmieniają się w tym samym stosunku, to mówimy, że te dwie wielkości są wprost proporcjonalne

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w prezentacji multimedialnej, a następnie wykonaj samodzielnie Polecenie 2 i 3.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DEvdbUsSq

Polecenie 2

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Uzupełnij zdania przeciągając odpowiednie wyrażenia.

wprost proporcjonalne, wprost proporcjonalne, odwrotnie proporcjonalne, wprost proporcjonalne, odwrotnie proporcjonalne, odwrotnie proporcjonalne

Długość boku trójkąta i wysokość opuszczona na ten bok w trójkącie, o ustalonym polu to wielkości ....
Obwód koła i średnica tego koła to wielkości ....
Krótsza przekątna sześciokąta foremnego i bok sześciokąta foremnego to wielkości ....
Wysokość stożka o ustalonej objętości i pole jego podstawy to wielkości ....

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Duże koło zębate o obwodzie $62,8\ \mathrm{cm}$ napędza mniejsze koło zębate. Jaki jest promień małego koła, jeśli na pewnym odcinku duże koło wykona 13 obrotów, a małe 30 pełnych obrotów?

Wynik zakoduj podając cyfrę jedności i dwie kolejne cyfry po przecinku przyjmując, że $\pi = 3,14$.

....

Ćwiczenie 6

Pięciu pracowników wykonuje pewną pracę w ciągu $10\ \mathrm{h}$. Oblicz ile pracowników (pracujących z taką samą wydajnością) wykona tę samą pracę w ciągu $3\ \mathrm{h}\ 20\ \mathrm{min}$.

Ćwiczenie 7

Zapas żywności w schronisku wystarczy dla k osób na 16 dni. Oblicz, na ile pełnych dni wystarczy żywności w schronisku, jeśli w schronisku będzie o 50% osób więcej, a dzienna porcja żywieniowa nie ulegnie zmianie.

Ćwiczenie 8

Paweł ukończyłby prace budowlane w czasie o 30 godzin krótszym niż zrobiłby to Gaweł. Pracując razem wykonaliby prace budowlane w ciągu 20 godzin. Ile godzin potrzebowałby każdy z nich na samodzielne prace budowlane?

Dla nauczyciela

Autor: Monika Dudek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Uczeń:

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wielkości odwrotnie proporcjonalne, rozwiązując zadania z kontekstem realistycznym;
- sprawdza, czy zmienne są odwrotnie proporcjonalne;
- rozpoznaje wielkości odwrotnie proporcjonalne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel definiuje pojęcie wielkości odwrotnie proporcjonalnych korzystając z wprowadzenia.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują przykłady 3 i 4 z sekcji „Przeczytaj". Uczniowie podają różnice między proporcjonalnością prostą, a odwrotną. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie w grupach 3–osobowych lub 4–osobowych zapoznają się z prezentacją multimedialną. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie w grupach wykonują polecenie 2, 3 z sekcji „Prezentacja multimedialna".
4. Następnie nauczyciel proponuje, aby uczniowie stworzyli zadania dotyczące wielkości odwrotnie proporcjonalnych.
5. Uczniowie wymieniają się zadaniami z innymi grupami.
6. Uczniowie rozwiązują zadania na kartce.
7. Wybrani uczniowie prezentują na forum treści swoich zadań. Pozostałe grupy podają rozwiązanie do danych zadań. Nauczyciel sprawdza poprawność zadań. W razie wątpliwości udziela odpowiedzi na zadane przez uczniów pytania.
8. Pod koniec zajęć uczniowie przekazują nauczycelowi zadania wraz z rozwiązaniami. Nauczyciel może ocenić uczniów za pracę na lekcji.
9. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 4-7 z sekcji „Sprawdź się".

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Wielkości odwrotnie proporcjonalne" i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów.

2. Chętni uczniowie podsumowują lekcję. Jeśli jest potrzeba, to nauczyciel uzupełnia informację.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują te ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Maszyny proste. Wyznaczanie masy ciała przy użyciu dźwigni dwustronnej
- Wielkości wprost proporcjonalne

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną może zastosować w trakcie lekcji powtórzeniowej przed sprawdzianem.

Prezentacja może zostać wykorzystana na lekcji, na której będzie omawiana proporcjonalność prosta.