# Interpretacja fizyczna pochodnej

# Interpretacja fizyczna pochodnej

Źródło: dostępny w internecie: Vinod Thadhani z Pixabay, domena publiczna.

Lekcje fizyki przybliżyły Ci już zapewne takie pojęcia jak ruch prostoliniowy, ruch jednostajny, jednostajnie przyspieszony lub jednostajnie opóźniony. Niewykluczone, że podczas uczenia się tych zagadnień pojawiły się w Twojej głowie pytania: Czemu każdy z tych ruchów ma odmienne wzory na prędkość? Jak obliczyć prędkość oraz przyspieszenie punktu, który nie porusza się żadnym z wyżej wymienionych ruchów? W niniejszej lekcji postaramy się odpowiedzieć na te pytania.

**Twoje cele**

- Opiszesz ruch prostoliniowy za pomocą trajektorii.
- Zdefiniujesz prędkość i przyspieszenie dla dowolnego ruchu prostoliniowego.

# Przeczytaj

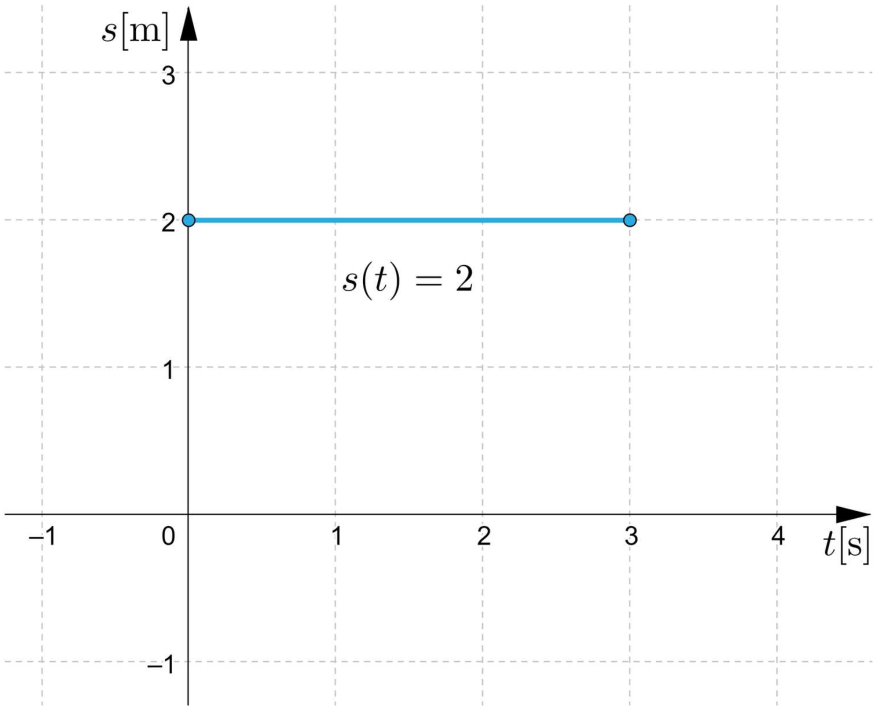
Załóżmy, że mamy do czynienia z niekończącą się drogą. Znajduje się na niej punkt materialny, który może się poruszać do przodu lub do tyłu. Taki ruch nazywamy prostoliniowym. Nasze przemieszczenie w czasie będzie opisywała funkcja $s$, nazywana dalej **trajektorią**, która każdej chwili $t$ przyporządkowuje położenie punktu materialnego w chwili $t$.

**Przykład 1**

Znajdziemy funkcję przemieszczenia w przypadku, gdy rozważany przez nas punkt znajduje się w chwili $0$ w punkcie $2$ i nie wykonuje żadnego ruchu aż do chwili $3$. Wówczas położenie punktu materialnego w każdej chwili od $0$ do $3$ wynosi $2$. Funkcja $s : \langle 0, 3\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ jest więc dana wzorem

$$s(t) = 2,$$

a jej wykres ma postać

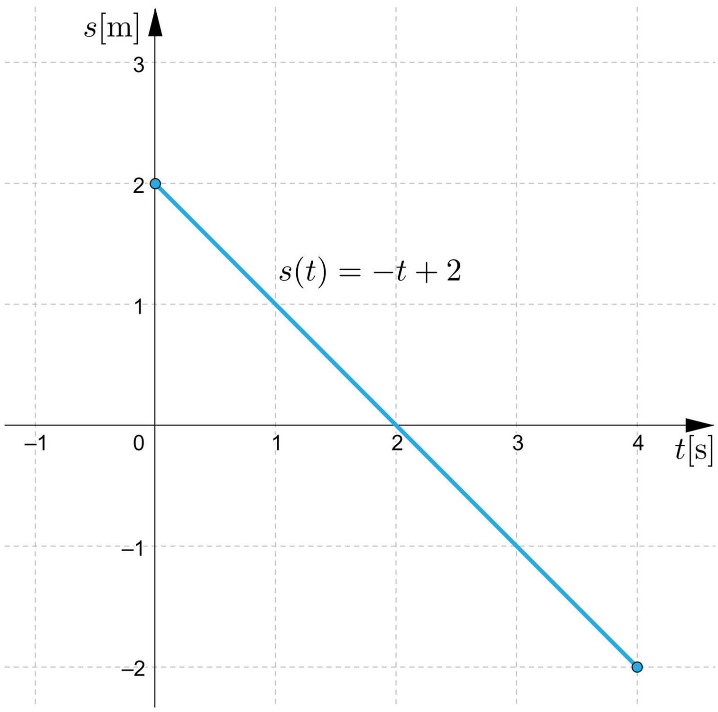



**Przykład 2**

Zobaczmy teraz jak wyglądałby ruch punktu materialnego, którego funkcja przemieszczenia $s : \langle 0, 4 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją liniową daną wzorem

$$s(t) = -t + 2.$$

Zauważmy wpierw, że wykres funkcji jest postaci




Rozważany ruch zaczyna się więc w 2 zaś kończy w $(-2)$. Poniższa animacja ukazuje nam, że punkt porusza się jednostajnie.



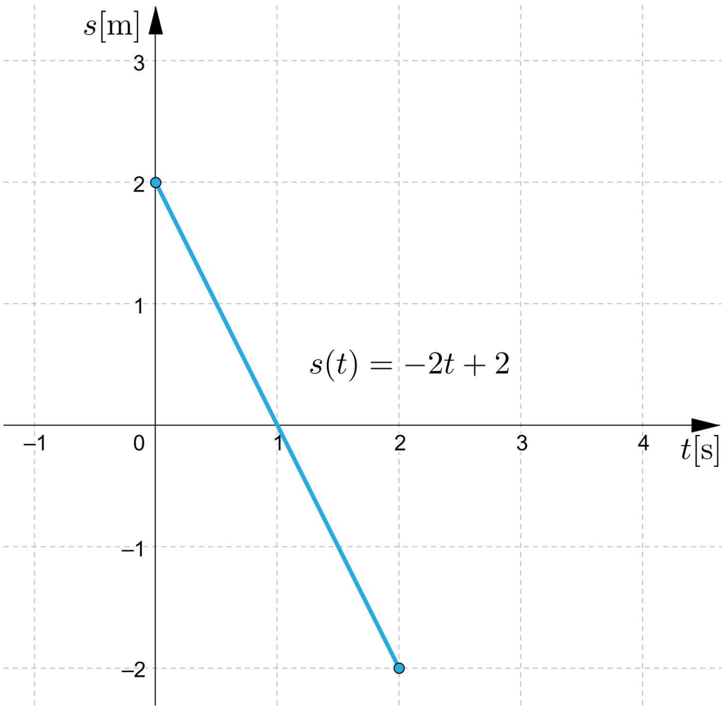

Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq](https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq)

**Przykład 3**

Tym razem rozważymy ruch opisany przez funkcję przemieszczenia $s : \langle 0, 2\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$s(t) = -2t + 2.$$

Rysując wykres funkcji s przekonujemy się, że tak jak w poprzednim przykładzie, ruch punktu rozpoczyna się w $2$ i kończy $(-2)$.




Tym razem odbywa się jednak w dwa razy krótszym czasie. Można to także zaobserwować na podstawie animacji.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq](https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq)

Widzimy zatem, że punkt materialny porusza się dwa razy szybciej niż w poprzednim przykładzie. Jest to związane z tym, że funkcja przemieszczenia $-2t+2$ ma dwa razy większy współczynnik kierunkowy niż $-t+2$. Przyjrzyjmy się animacji przedstawiającej jednocześnie ruch obu punktów.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq](https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq)

Zauważmy, że ruch opisany przez każdy z powyższych przykładów jest jednostajny. Oznacza to, że w żadnej chwili nie dochodziło do przyspieszenia ani opóźnienia. Rozważymy zatem ruch o nieco większej zmienności, tj. jednostajnie przyspieszony.

**Przykład 4**

Kilogramowa kulka spada swobodnie z wysokości 100 metrów na planecie, której przyspieszenie grawitacyjne wynosi 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Jeżeli przyjmiemy, że $s(t)$ oznacza wysokość (a zatem położenie) kuli w chwili $t$, $v(t)$ – prędkość w chwili $t$, zaś $a(t)$ – przyspieszenie w chwili $t$, to korzystając ze wzorów znanych z lekcji fizyki otrzymamy

$$s(t) = 100 - 5t^2, v(t) = -10t \text{ oraz } a(t) = -10.$$

Aby obliczyć prędkość w pierwszej sekundzie ruchu możemy skorzystać z powyższego wzoru. Otrzymujemy wówczas

$$v(1) = -10.$$

Przedstawimy teraz inny sposób na otrzymanie tego samego wyniku. Policzmy wpierw średnią prędkość ruchu od chwili 1 do chwili 3. Mamy $s(1) = 95$ oraz $s(3) = 55$. Średnia prędkość kuli w czasie od 1 do 3 będzie zatem wynosiła

$$\frac{s(3)-s(1)}{3-1} = \frac{55-95}{2} = -20.$$

Z kolei średnia prędkość od chwili 1 do 2 jest równa

$$\frac{s(2)-s(1)}{2-1} = \frac{80-95}{1} = -15.$$

W ogólności, średnia prędkość w czasie od 1 do $1+h$ wynosi

$$\frac{s(1+h)-s(1)}{1+h-1} = \frac{s(1+h)-s(1)}{h} = \frac{100-5(1+h)^2-95}{h} = \frac{100-5\left(1+2h+h^2\right)-95}{h} = -10-5h.$$

Przechodząc z $h$ do zera otrzymujemy że

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(1+h)-s(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(-10-5h) = -10 = v(1).$$

Okazuje się zatem, że granica ilorazu różnicowego przy $h \to 0$ funkcji przemieszczenia jest równa prędkości w chwili 1. Postępując podobnie otrzymujemy

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-10(t+h)+10t}{h} = -10 = a(t).$$

Tym samym granicą ilorazu różnicowego w punkcie $t$ przy $h \to 0$ funkcji prędkości jest przyspieszenie.

Powyższy przykład jest szczególnym przypadkiem zależności, która stanowi główny cel tej lekcji. Aby przejść do ogólnego przypadku przypomnimy definicję pochodnej funkcji w punkcie.

**Definicja: pochodna funkcji**

Pochodną funkcji $f$ w punkcie $t_0$ nazywamy liczbę

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}.$$

Ustalmy teraz trajektorię $s\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pochodną funkcji $s$ w chwili $t$ nazywamy prędkością punktu materialnego w chwili $t$. Funkcją prędkości nazywamy funkcję $v$, która każdej chwili $t \in (a,b)$ przyporządkowuje prędkość punktu materialnego w chwili $t$. Przyspieszenie w chwili $t \in (a,b)$ jest pochodną funkcji $v$ w $t$, zaś funkcja przyspieszenia – $a$ jest przyporządkowaniem, które każdej chwili przypisuje przyspieszenie w chwili $t$.

**Przykład 5**

Przyjmijmy teraz, że trajektoria $s$, opisując ruch pewnego punktu materialnego, jest postaci

$$s(t) = \alpha t + \beta,$$

gdzie $\alpha$ oraz $\beta$ są liczbami rzeczywistymi. Łatwo policzyć wtedy prędkość rozważanego punktu materialnego

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h)+\beta-(\alpha t+\beta)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha h}{h} = \alpha.$$

Otrzymujemy zatem, że punkt materialny ma stałą prędkość równą współczynnikowi kierunkowemu funkcji $s$. Tłumaczy to obserwacje poczynione w przykładach 2 i 3. Na początku tej lekcji założyliśmy także, że omawiany ruch jest prostoliniowy. Stąd punkt materialny porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Na koniec policzmy przyspieszenie tego punktu

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha - \alpha}{h} = 0.$$

Tym samym dochodzimy do dobrze znanego z lekcji fizyki wniosku, iż przyspieszenie w ruchu jednostajnym prostoliniowym wynosi 0.

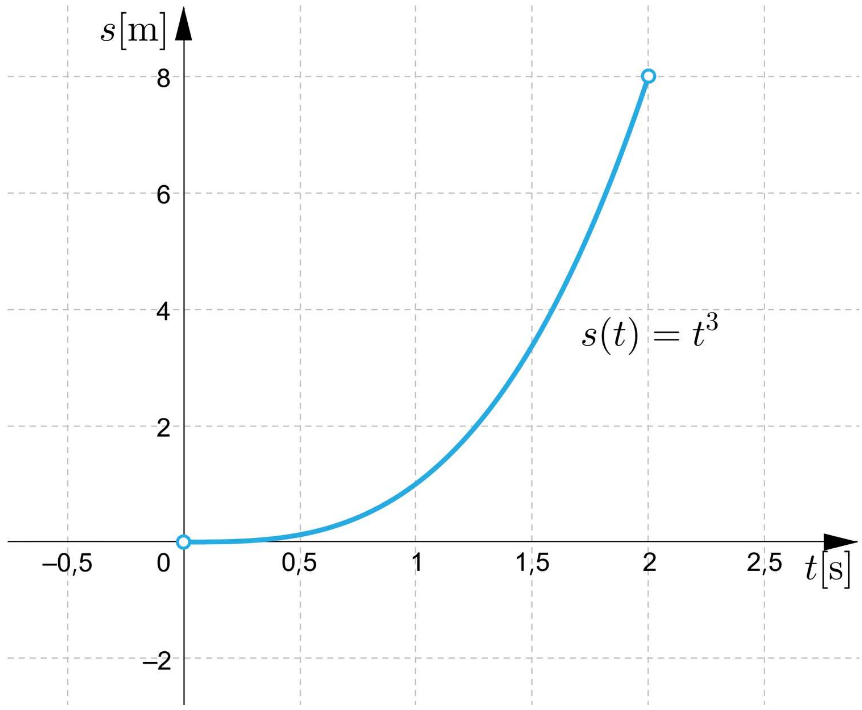
Wszystkie rozważane do tej pory przykłady można było obliczyć posługując się teorią poznaną już na lekcjach fizyki. Poniżej podamy przykład ruchu, którego przeanalizowanie wykracza już poza ramy standardowego kursu fizyki ponadpodstawowej.

**Przykład 6**

Trajektoria $s : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ punktu materialnego jest dana wzorem

$$s(t) = t^3.$$

Poniżej przedstawiony jest wykres tego ruchu wraz z animacją.







Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq](https://zpe.gov.pl/a/DxGF08FUq)

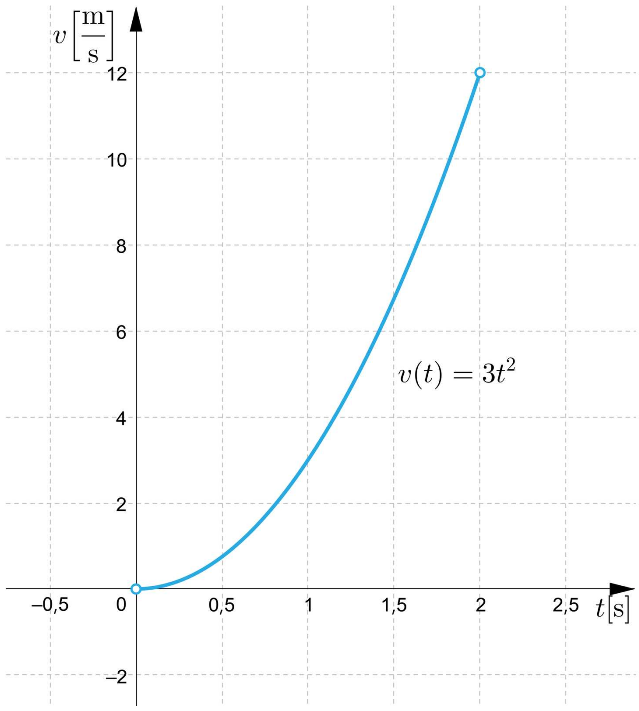
Policzymy prędkość oraz przyspieszenie punktu materialnego w pierwszej sekundzie. W celu wyznaczenia prędkości ustalmy $t \in (0, 2)$ i policzmy

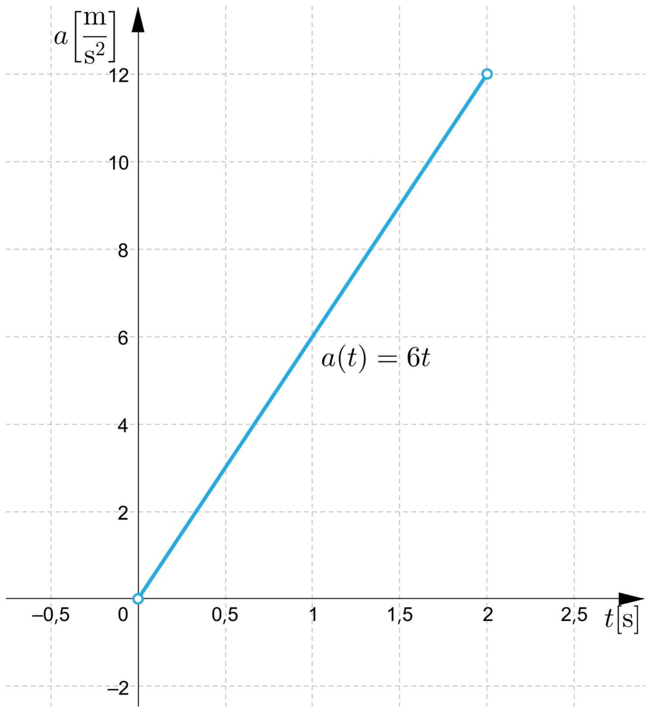
$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^3 - t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{t^3+3t^2h+3th^2+h^3-t^3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(3t^2 + 3th + h^2\right) = 3t^2.$$

Otrzymujemy zatem, że funkcja prędkości ma postać $v(t) = 3t^2$. Możemy na jej podstawie obliczyć przyspieszenie

$a(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3(t+h)^2-3t^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3t^2+6th+3h^2-3t^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(6t + 3h) =$
$= 6t.$

Stąd $v(1) = 3$ oraz $a(1) = 6$. Prędkość punktu materialnego w pierwszej sekundzie wynosiła zatem $3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, zaś jego przyspieszenie było równe $6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Możemy jeszcze narysować wykresy prędkości oraz przyspieszenia aby otrzymać bardziej pełny obraz ruchu punktu materialnego.



# Słownik

**trajektoria**

funkcja, która każdej chwili przyporządkowuje położenie punktu materialnego w tej chwili

**prędkość**

w chwili $t$ – pochodna trajektorii w chwili $t$

**przyspieszenie**

w chwili $t$ – pochodna funkcji prędkości w chwili $t$

# Film samouczek

**Polecenie 1**

Poznałeś już interpretację fizyczną pochodnej. Wiesz zatem, że jeżeli drogę punktu materialnego opisuje funkcja $s$, to prędkość $v$ tego punktu w chwili $t_0$ wyrażona jest właśnie jako pochodna funkcji $s$ w punkcie $t_0$, a zatem $v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$.

Zwróć uwagę, że możemy uprościć nieco powyższy zapis przyjmując $U(h) = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$.

Wielkość $U(h)$ jest więc średnią prędkością w czasie od $t_0$ do $t_0 + h$. W konsekwencji $v(t_0) = \lim_{h \to 0} U(h)$.

Wykorzystując powyższy zapis, postaramy się znaleźć graficzną interpretację pochodnej funkcji.

Zapoznaj się z poniższym materiałem. Zwróć szczególną uwagę na zależności pomiędzy interpretacją graficzną i fizyczną pochodnej funkcji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D19uK0DQU

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej interpretacji fizycznej pochodnej.

---

**Polecenie 2**

Załóżmy, że drogę jaką przebył pewien obiekt w zależności od czasu $t$ opisuje funkcja $s(t) = at^2 + bt + c$, gdzie $a \neq 0$. Oblicz z jakim przyspieszeniem porusza się ten obiekt.

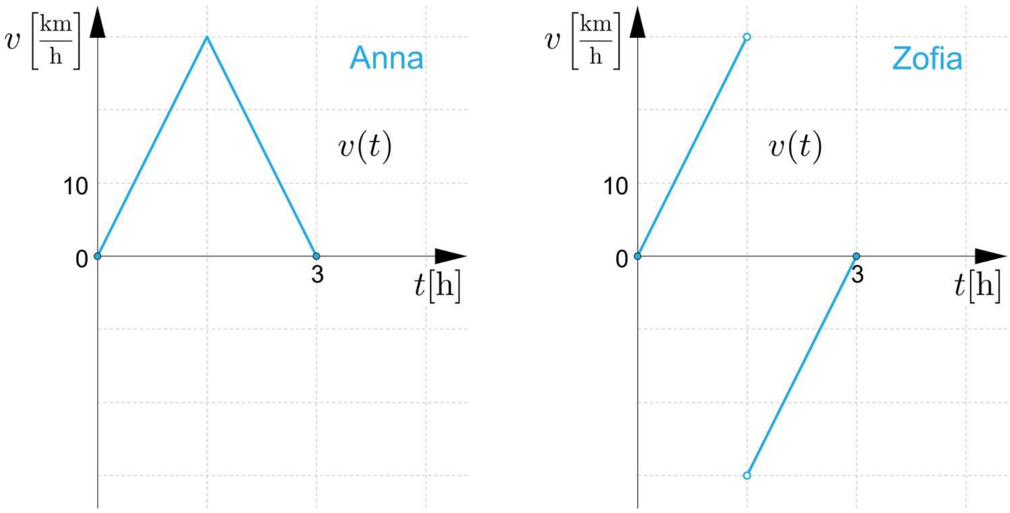
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

### Ćwiczenie 1

### Ćwiczenie 2

Korzystając z informacji na wykresach, wskaż wszystkie zdania prawdziwe.




### Ćwiczenie 3

Trzech pięcioletnich rowerzystów (wraz z rodzicami) wyruszyło na godzinną przejażdżkę rowerową. Ich odległość od domu opisują funkcje: $s_1(t) = t^2 \text{ km}$, $s_2(t) = t^3 \text{ km}$ oraz $s_3(t) = t \text{ km}$.

### Ćwiczenie 4

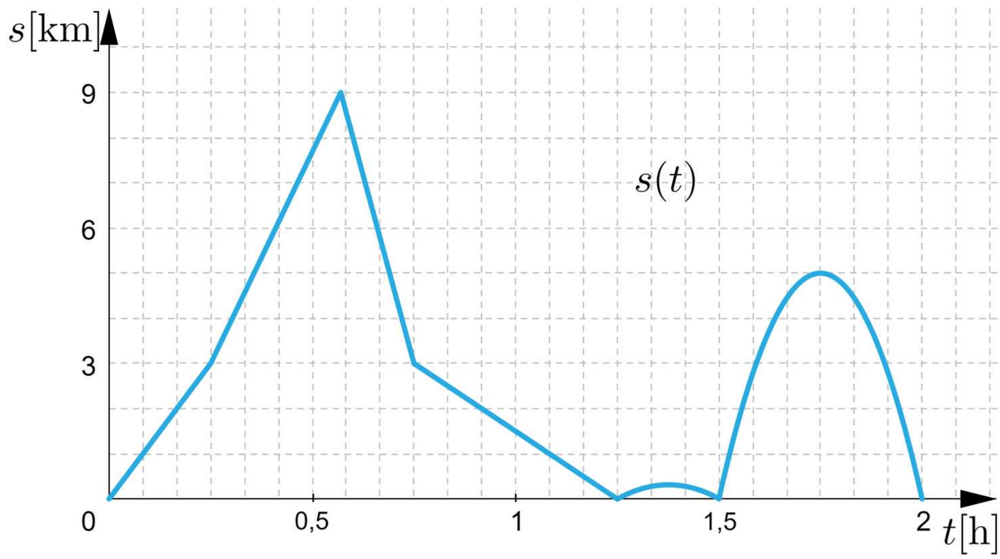
### Ćwiczenie 5

### Ćwiczenie 6

Niech funkcja $d(t) = -t^2 + 6t + 16$ opisuje wysokość jaką osiaga plastikowa kulka wystrzelona z balkonu, gdzie $0 \leq t \leq 6$ oznacza czas jaki upłynął od jej wystrzelenia (liczony w sekundach). Oblicz prędkość tej kulki po upływie trzech sekund.

### Ćwiczenie 7

### Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

**Autor:** Michał Bełdziński, Julia Wódka

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Interpretacja fizyczna pochodnej**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- opisuje ruch prostoliniowy za pomocą trajektorii,
- definiuje prędkość i przyspieszenie dla dowolnego ruchu prostoliniowego.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

**Formy pracy:**

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

**Przebieg lekcji**

**Przed lekcją:**

Nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj".

**Faza wstępna:**

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

**Faza realizacyjna:**

1. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj"). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Interpretacja fizyczna pochodnej" i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli). Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Film samouczek” i rozwiązują polecenia z nim związane.

**Materiały pomocnicze:**

- Pochodne funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym

**Wskazówki metodyczne:**

- Film samouczek może zostać wykorzystany do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie pracować na lekcji.