



Równanie $\operatorname{tg} x = a$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Równanie $\operatorname{tg} x = a$

Źródło: Kevin Phillips, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

W tym materiale wykorzystamy własności funkcji tangens do rozwiązywania równań postaci $\operatorname{tg} x = a$. Warto więc przypomnieć sobie, jak wygląda wykres funkcji tangens oraz podstawowe własności tego wykresu. Ważne będzie też korzystanie z własności funkcji tangens, a w szczególności z jej okresowości.

Twoje cele

- Poznasz i zastosujesz metody rozwiązywania równań typu: $\operatorname{tg} x = a$ w zadanym przedziale.
- Poznasz i zastosujesz metody rozwiązywania równań typu: $\operatorname{tg} x = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Poznasz i zastosujesz metody rozwiązywania równań typu: $\operatorname{tg}(cx + d) = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przeczytaj

Przypomnijmy własności funkcji tangens, z których będziemy korzystać przy rozwiązywaniu równań.

Twierdzenie: o własnościach funkcji tangens

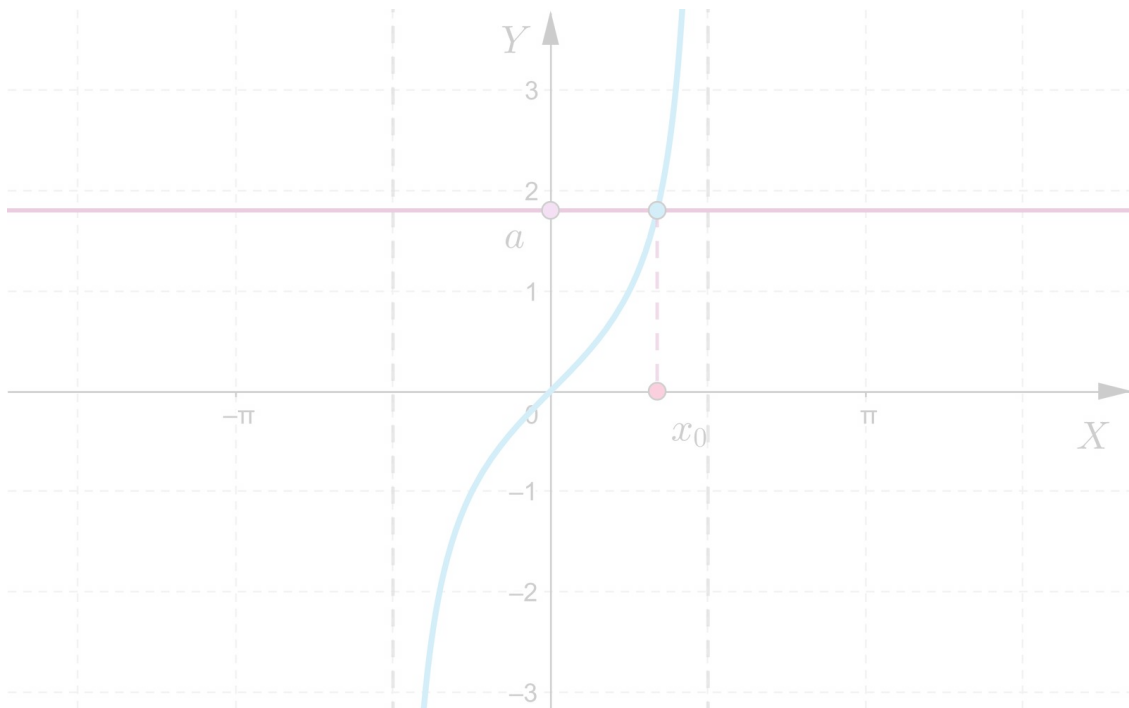
Opiszmy własności funkcji $y = \operatorname{tg} x$, gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

1. Funkcja tangens jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = \pi$.
2. Funkcja tangens jest funkcją nieparzystą.
3. Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.
4. Funkcja tangens nie ma wartości największej. Funkcja tangens nie ma wartości najmniejszej.
5. Środkiem symetrii wykresu funkcji tangens jest każdy punkt o współrzędnych $(\frac{k\pi}{2}, 0)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Liczba rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = a$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Narysujmy wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Narysujmy także prostą o równaniu $y = a$, gdzie a jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą.

Poruszajmy suwakiem na poniższym aplecie.



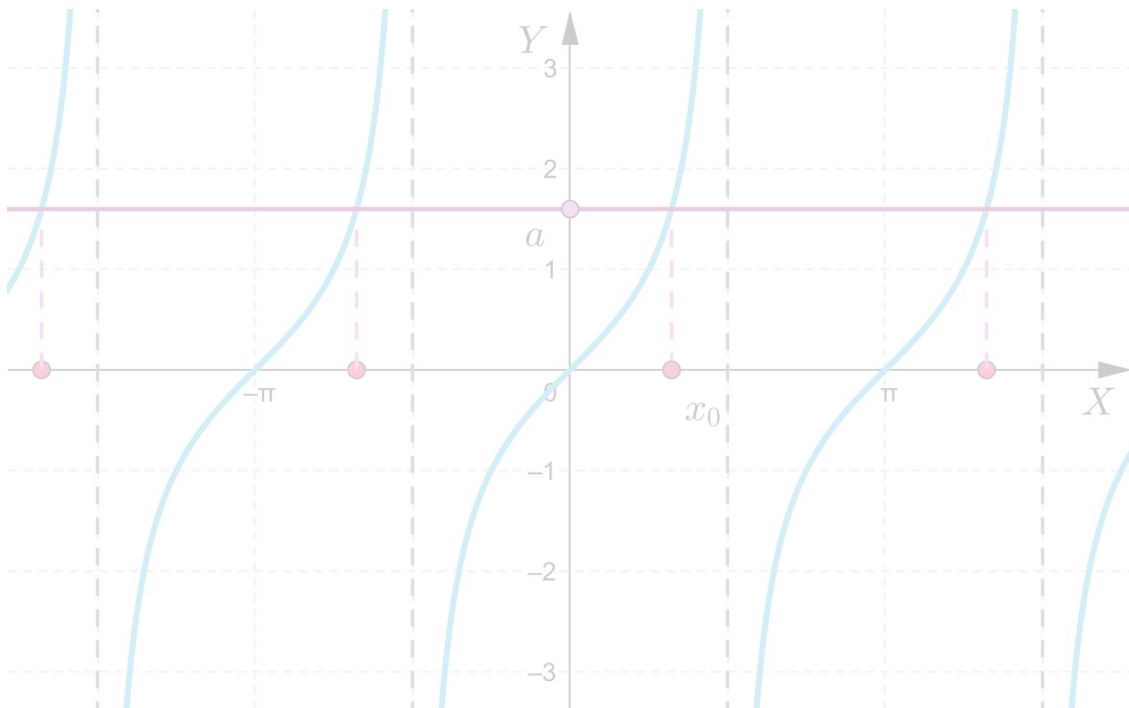
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DtvBc4psF>

Zauważmy, że w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ funkcja $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje każdą wartość rzeczywistą dokładnie jeden raz. Zatem równanie $\operatorname{tg} x = a$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokładnie jedno rozwiązanie. Na aplecie zostało oznaczone jako x_0 , czyli $\operatorname{tg} x_0 = a$.

Rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$ w dziedzinie

Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = \pi$.

Zobaczmy w aplecie, jak zachowują się punkty wspólne wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i prostej o równaniu $y = a$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DtvBc4psF>

Zauważmy zatem, że jeżeli x_0 jest rozwiązaniem równania $\operatorname{tg} x = a$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, to wszystkie rozwiązania tego równania mają postać: $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Twierdzenie: o rozwiązywaniu równania $\operatorname{tg} x = a$

Algorytm szukania rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = a$:

1. Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\operatorname{tg} x_0 = a$.
2. Zapisujemy wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$:

$$x = x_0 + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykłady

Przykład 1

Rozwiążemy w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ równanie: $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczmy jedno rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ponieważ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, to korzystając z zależności $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ otrzymujemy:
 $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zatem rozwiązaniem równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest $x = -\frac{\pi}{6}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w całej dziedzinie.

Rozwiązanie

Skorzystamy z rozwiązania poprzedniego przykładu.

Rozwiązaniem równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

Korzystając z twierdzenia o rozwiązywaniu równania $\operatorname{tg} x = a$, otrzymujemy odpowiedź:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\sqrt{3} \operatorname{tg}(2x + 1) = -3$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie do postaci: $\operatorname{tg}(2x + 1) = -\sqrt{3}$.

Podstawmy $z = 2x + 1$, otrzymujemy wówczas równanie $\operatorname{tg} z = -\sqrt{3}$.

Znajdujemy jedno rozwiązanie: $z_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} z = -\sqrt{3}$ są: $z = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ $z = 2x + 1$, wówczas rozwiązaniami równania są $x = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ równanie $|\operatorname{tg} x| = m^2 - 3m$ ma dwa rozwiązania w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że zbiorem wartości funkcji $y = |\operatorname{tg} x|$ jest przedział $\langle 0, +\infty \rangle$.

Funkcja $y = |\operatorname{tg} x|$ wartość 0 przyjmuje tylko dla argumentu 0, natomiast każdą wartość dodatnią przyjmuje dla dwóch argumentów o przeciwnych znakach.

Zatem równanie $|\operatorname{tg} x| = m^2 - 3m$ ma dwa rozwiązania w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2 - 3m > 0$.

Rozwiązujemy nierówność kwadratową: $m(m - 3) > 0$,
otrzymujemy odpowiedź: $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Słownik

rozwiązanie równania z jedną niewiadomą

liczba spełniająca równanie, czyli liczba, która po podstawieniu za zmienną daje równość liczb po prawej i lewej stronie równania.

zbiór rozwiązań równania z jedną niewiadomą

zbiór liczb spełniających równanie.

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, a następnie wykorzystaj przedstawioną metodę do wykonania kolejnych poleceń.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DseofXJrw>

Film nawiązujący do treści materiału na temat równania $tgx = a$.




Polecenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź.

Polecenie 3

Rozwiąż równanie: $tg 5x + tg 7x = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie $\operatorname{tg} x = a$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń

- rozwiązuje równanie postaci: $\operatorname{tg} x = a$ w zadanym przedziale,
- rozwiązuje postaci: $\operatorname{tg} x = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych,
- rozwiązuje równanie postaci: $\operatorname{tg}(cx + d) = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych,
- analizuje wykres funkcji tangens w celu rozwiązania równania trygonometrycznego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Równanie $\operatorname{tg} x = a$ ”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania dotyczące rozwiązywania równań z funkcją tangens. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która próbuje udzielić odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie indywidualnie analizują przedstawioną metodę rozwiązywania równań $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ w animacji, nauczyciel w razie potrzeby wyjaśnia pojawiające się wątpliwości. Następnie uczniowie rozwiązują polecenia znajdujące się pod animacją.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-7 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Równanie $\operatorname{tg} x = a$ ” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Animację można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy na temat rozwiązywania równań trygonometrycznych postaci $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$.