Przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ wzdłuż osi X

Przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ wzdłuż osi X

Źródło: Eric Veiga, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Własności paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej mają zastosowanie w wielu dziedzinach życia – m.in. w okularach teleskopowych, w astronomii oraz trajektorii lotu pocisku w wojskowości. Bardzo często parabola jest spotykana w budownictwie w kształtach domów.

W materiale omówimy przesunięcie wykresu funkcji kwadratowej wzdłuż osi X. Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na części teoretycznej materiału i omówionych przykładach.

Twoje cele

- Określisz własności funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2$ po przesunięciu jej wykresu wzdłuż osi X.
- Zauważysz, które własności funkcji kwadratowej zmieniają się wraz z przesunięciem jej wykresu wzdłuż osi X.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

W tej lekcji omówimy przesunięcia paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wzdłuż osi X układu współrzędnych.

Przesunięcie paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej, wzdłuż osi odciętych układu współrzędnych powoduje nie tylko zmianę położenia wykresu tej funkcji w układzie współrzędnych, ale także jej niektórych własności. Na podstawie obserwacji położenia paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej po przesunięciu ustalimy, które własności nie ulegną zmianie, a także określimy, co zmienia się po takim przekształceniu.

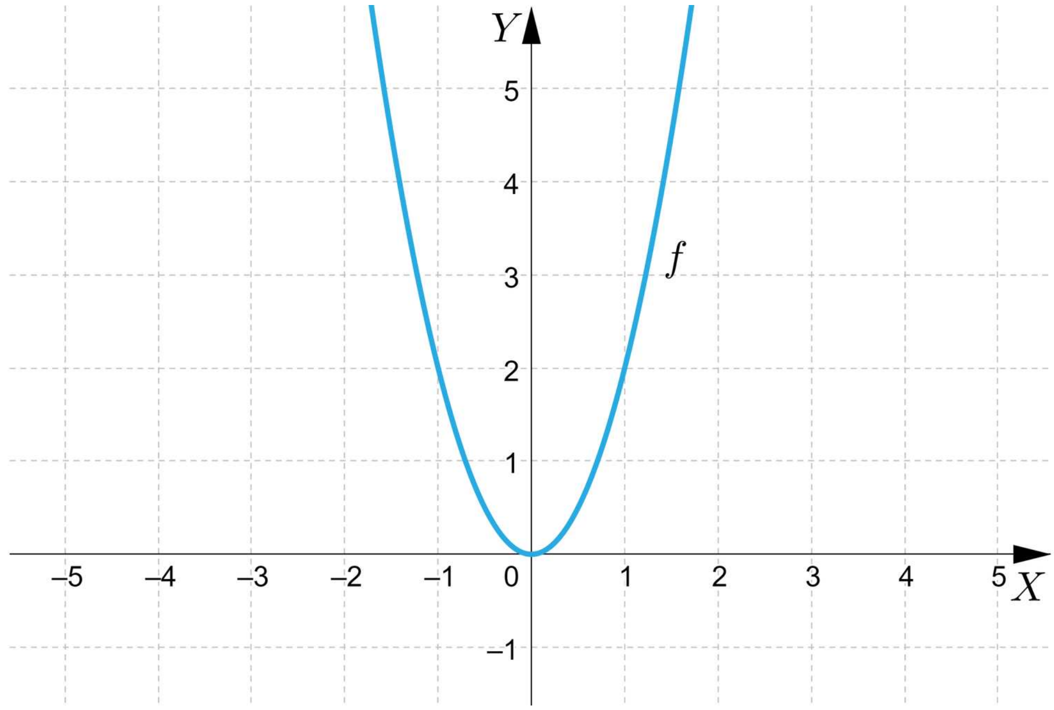
> **Definicja: przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi X**
>
> $y = f(x - p)$ otrzymujemy przez przesunięcie paraboli, będącej wykresem funkcji $y = f(x)$ o:
>
> - p jednostek w prawo, gdy $p > 0$,
> - p jednostek w lewo, gdy $p < 0$.

Naszkicujmy parabolę, będącą wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^2$.

W celu naszkicowania wykresu funkcji f przedstawmy w tabeli wartości funkcji f dla kilku argumentów:

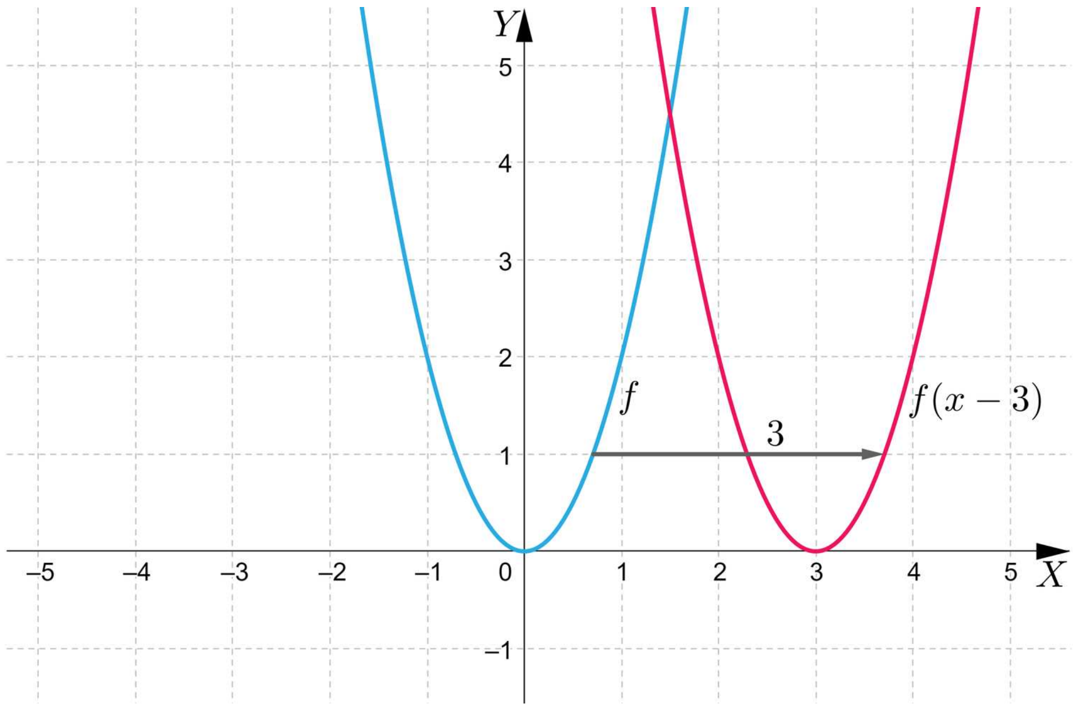
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	8	2	0	2	8

Wykres funkcji f przedstawia się następująco:



Przesuńmy parabolę, będącą wykresem funkcji f o 3 jednostki w prawo, wzdłuż osi X.
W ten sposób otrzymujemy parabolę, będącą wykresem funkcji g.

Wtedy wykresy funkcji f i g przedstawiają się następująco:



Otrzymana parabola, będąca wykresem funkcji $g = f(x-3)$ jest przystająca do paraboli, będącej wykresem funkcji f.

Zauważmy, że dziedzina funkcji g jest taka sama, jak dziedzina funkcji f, podobnie - zbiory wartości są takie same.

Określmy niektóre własności funkcji g:

- wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji g ma współrzędne $(3, 0)$,
- osią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji g jest prosta o równaniu $x = 3$,
- funkcja g jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$,
- funkcja g jest rosnąca w przedziale $\langle 3, \infty)$,

Jeżeli przesuwamy wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie $a > 0$, wzdłuż osi X o p jednostek w prawo lub p jednostek w lewo, to otrzymujemy wykres funkcji g o następujących własnościach:

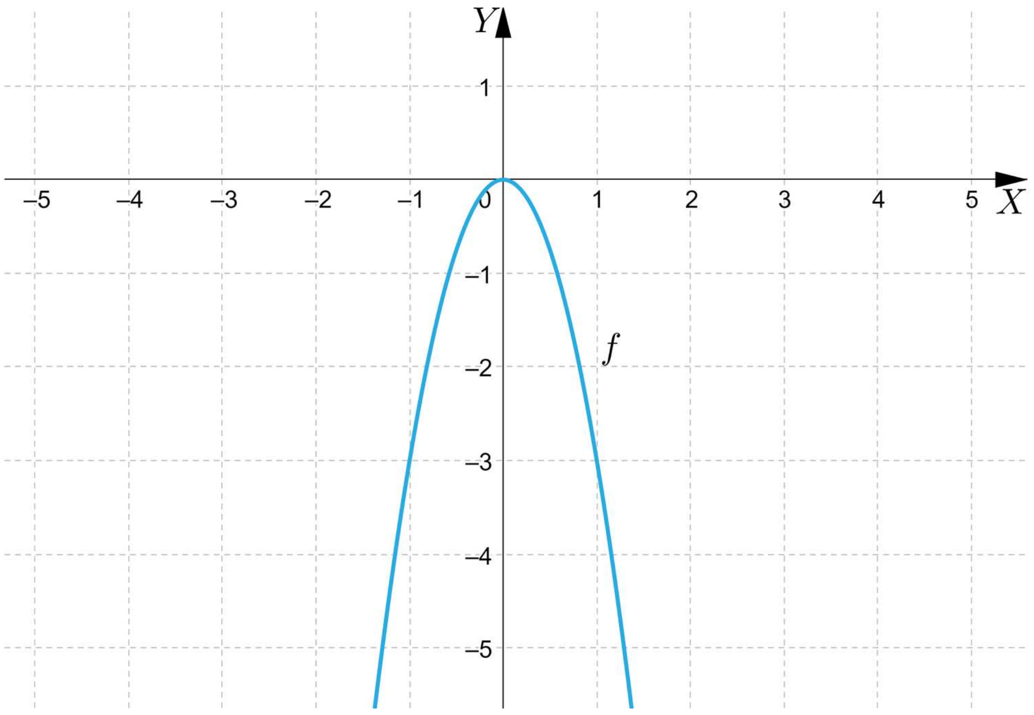
- wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji g ma współrzędne $(\mathrm{p}, 0)$
- osią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji g jest prosta o równaniu $x = p$,
- funkcja g jest malejąca w przedziale $(-\infty, p\rangle$,
- funkcja g jest rosnąca w przedziale $\langle p, \infty)$,
- funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą dla argumentu $x = \mathrm{p}$.

Naszkicujmy parabolę, będącą wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = -3x^2$.

W celu naszkicowania wykresu przedstawmy w tabeli wartości funkcji f dla kilku argumentów:

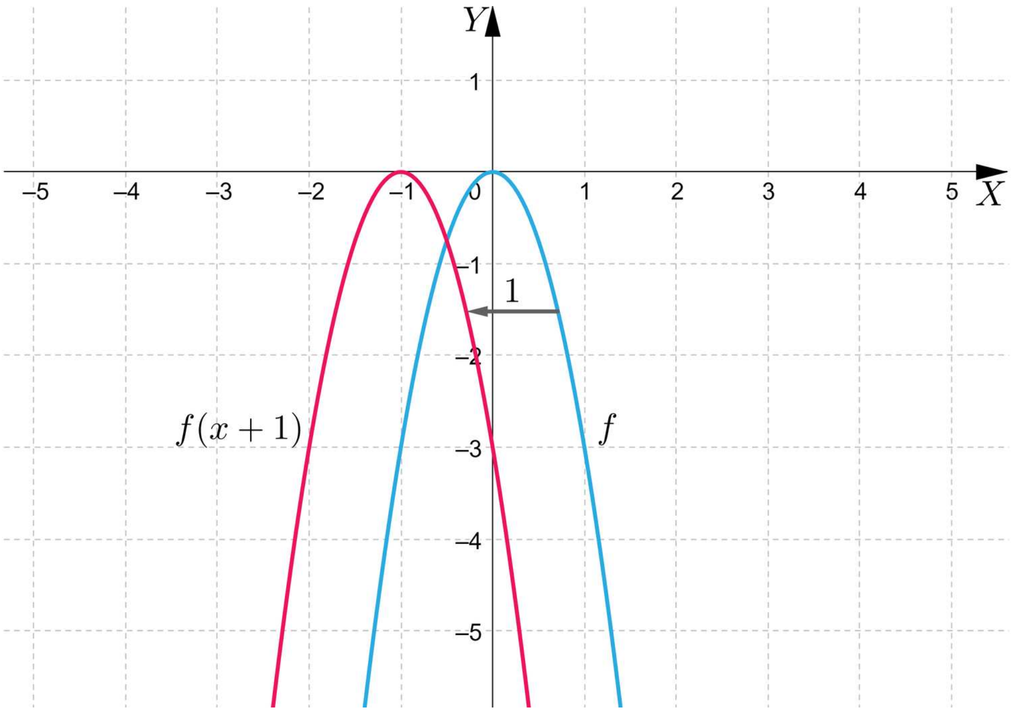
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-12	-3	0	-3	-12

Wykres funkcji f przedstawia się następująco:



Przesuńmy parabolę, będącą wykresem funkcji f o 1 jednostkę w lewo, wzdłuż osi X. W ten sposób otrzymujemy parabolę, będącą wykresem funkcji g.

Wtedy wykresy funkcji f i g przedstawiają się następująco:



Otrzymana parabola, będąca wykresem funkcji $g = f(x+1)$ jest przystająca do paraboli, będącej wykresem funkcji f.

Zauważmy, że dziedzina funkcji g jest taka sama, jak dziedzina funkcji f podobnie - zbiory wartości są takie same.

Określmy niektóre własności funkcji g:

- wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji g ma współrzędne $(-1, 0)$,
- osą symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji g jest prosta o równaniu $x = -1$,
- funkcja g jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$,
- funkcja g jest malejąca w przedziale $\langle -1, \infty)$,

Jeżeli przesuwamy wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie $a < 0$, wzdłuż osi X o p jednostek w prawo lub p jednostek w lewo, to otrzymujemy wykres funkcji g o następujących własnościach:

- wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji g ma współrzędne $(\mathrm{p}, 0)$
- osią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji g jest prosta o równaniu $x = p$,
- funkcja g jest rosnąca w przedziale $(-\infty, p\rangle$,
- funkcja g jest malejąca w przedziale $\langle p, \infty)$,
- funkcja g przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \mathrm{p}$.

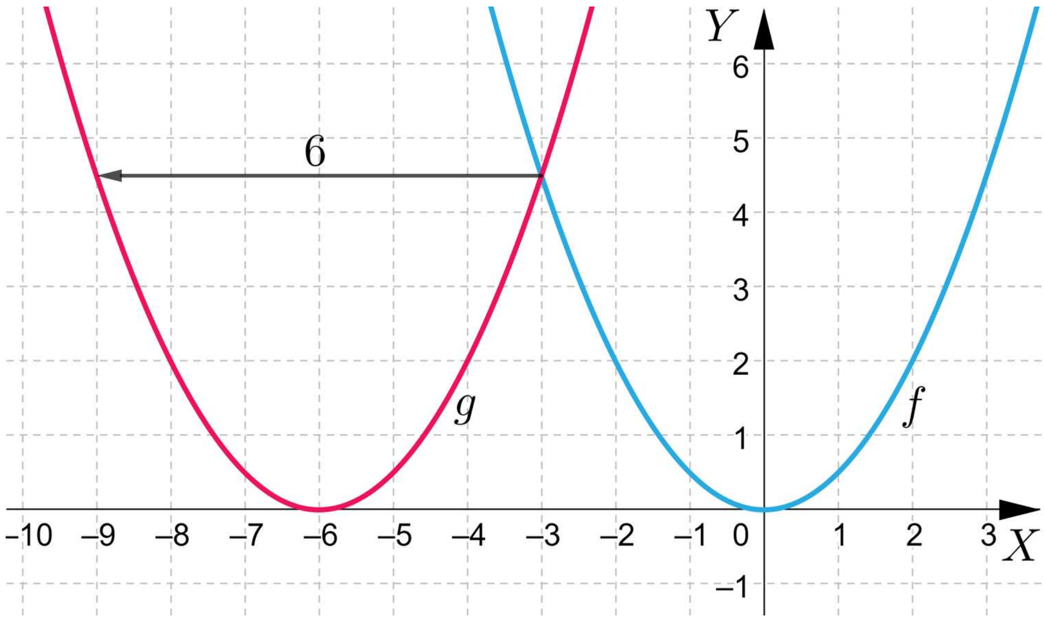
Parabolę, będącą wykresem funkcji g określonej wzorem $g(x) = a(x-p)^2$ otrzymujemy przez przesunięcie paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$:

- o p jednostek w prawo lub w lewo wzdłuż osi X,
- o wektor $\overrightarrow{u} = [p, 0]$.

Przekształcenia paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej wzdłuż osi X wykorzystamy do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przykład 1

Parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ przesunięto o 6 jednostek w lewo wzdłuż osi X i otrzymano parabolę, będącą wykresem funkcji g.



Dla funkcji g wyznaczymy:

a) oś symetrii wykresu funkcji,

b) przedziały monotoniczności,

c) współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji.

Rozwiązanie:

a) oś symetrii wykresu funkcji g opisujemy za pomocą równania $x = -6$,

b) funkcja g jest:

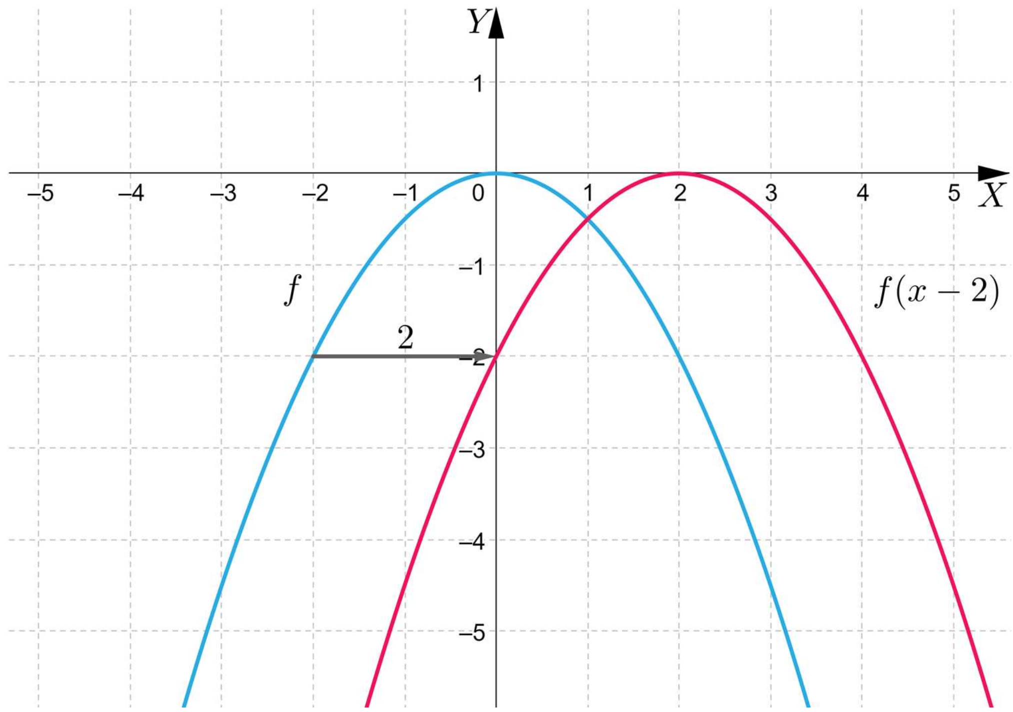
- malejąca w przedziale $(-\infty, -6\rangle$,

- rosnąca w przedziale $\langle -6, \infty)$.

c) wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji g ma współrzędne $(-6, 0)$.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ oraz wykres funkcji g po przesunięciu o 2 jednostki w prawo wykresu funkcji f wzdłuż osi X.



Określimy:

a) równanie osi symetrii wykresu funkcji g,

b) wartość funkcji g dla argumentu 12.

Rozwiązanie:

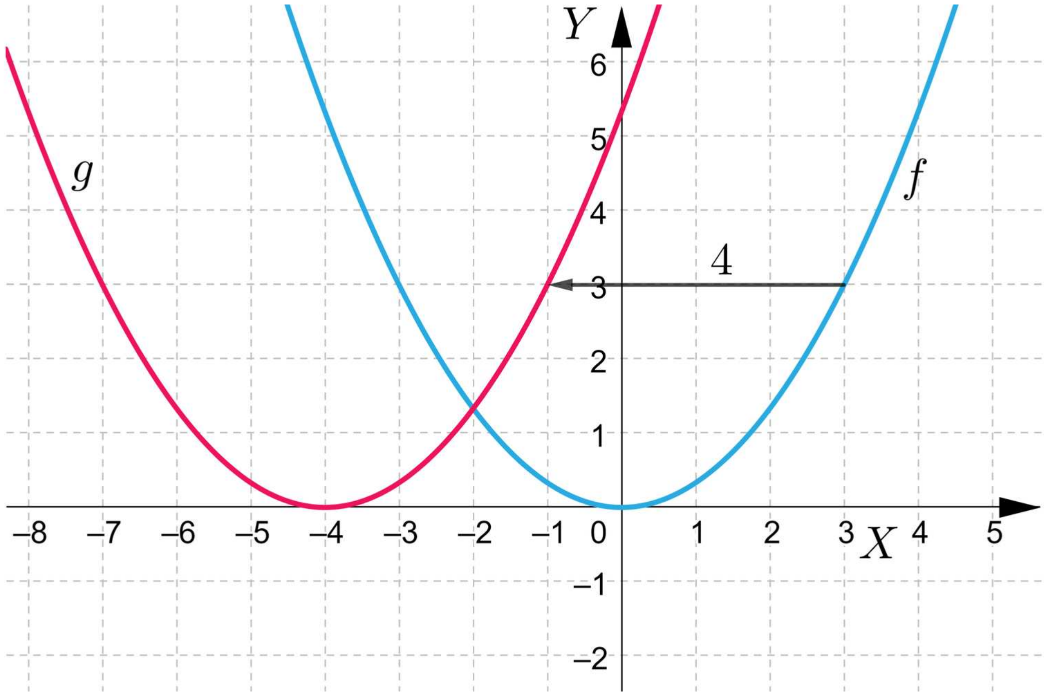
a) osią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = 2$,

b) możemy zauważyć, że zachodzi zależność $g(x) = f(x - 2)$, zatem

$g(12) = f(12 - 2) = f(10) = -\frac{1}{2} \cdot 10^2 = -50.$

Przykład 3

Parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ przesunięto o 4 jednostki w lewo wzdłuż osi X i otrzymano parabolę, będącą wykresem funkcji g.



Uporządkujmy rosnąco liczby: $g(-8)$, $g(-4)$, $g(-3)$ oraz $g(-6)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że osią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = -4$ oraz ramiona paraboli, będącej wykresem funkcji g są skierowane do góry.

Ponieważ funkcja g jest malejąca w przedziale $(-\infty, -4\rangle$ oraz rosnąca w przedziale $\langle -4, \infty)$, zatem

$g(-4) < g(-3) < g(-6) < g(-8)$.

Przykład 4

Naszkicujemy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = -(x+2)^2$.

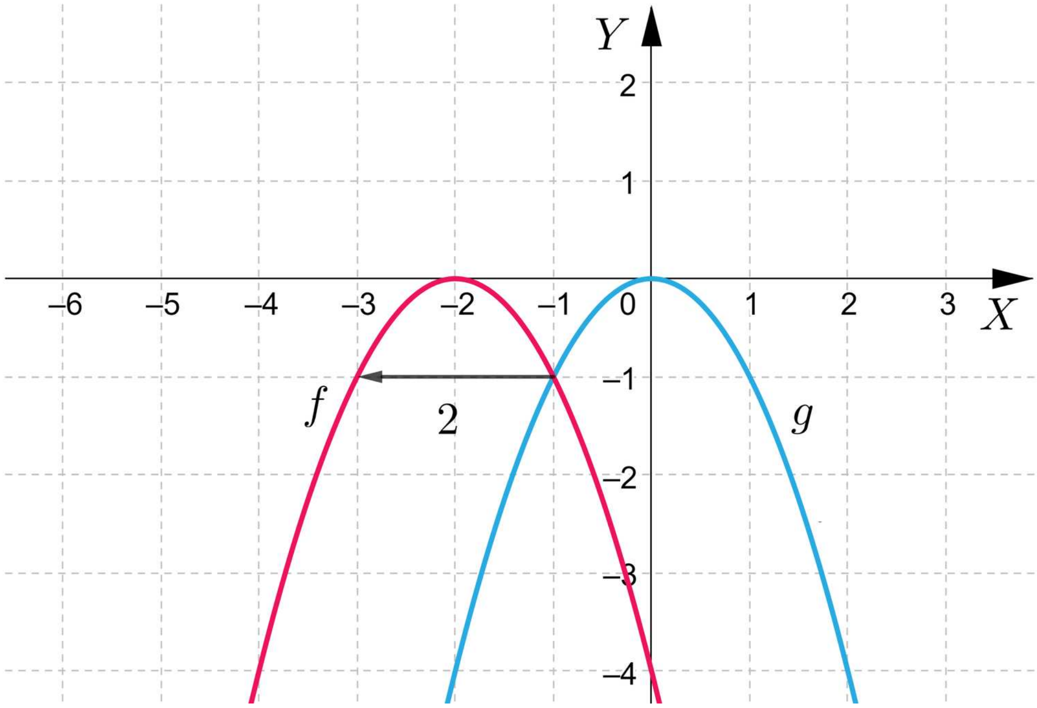
Rozwiązanie:

Zauważmy, że w celu naszkicowania wykresu funkcji f wystarczy:

- naszkicować wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = -x^2$,
- przesunąć wykres funkcji g o wektor $\overrightarrow{u} = [-2, 0]$, co jest równoznaczne z przesunięciem wykresu tej funkcji o 2 jednostki w lewo wzdłuż osi X.

W celu naszkicowania wykresu przedstawmy w tabeli wartości funkcji g dla kilku argumentów:

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-4	-1	0	-1	-4



Przykład 5

Funkcję kwadratową f określono wzorem $f(x) = ax^2$. Niech $g(x) = f(x-2)$ oraz $h(x) = g(x+5)$. Wyznaczymy:

a) współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji h,

b) oś symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji h.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeżeli $g(x) = f(x-2)$ oraz $h(x) = g(x+5)$, to:

$h(x) = f(x-2+5) = f(x+3)$.

Zatem parabolę, będącą wykresem funkcji h otrzymamy przez przesunięcie paraboli, będącej wykresem funkcji f o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi X.

a) wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji h jest punkt o współrzędnych $(-3, 0)$,

b) osią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji h jest prosta o równaniu $x = -3$.

Przykład 6

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -2x^2$. Parabolę, będącą wykresem funkcji f przesunięto o 2 jednostki w lewo wzdłuż osi X i otrzymano parabolę, będącą wykresem funkcji g. Dodatkowo parabolę, będącą wykresem funkcji f przesunięto o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi X i otrzymano parabolę, będącą wykresem funkcji h. Wykażemy, że różnica wartości funkcji g i h dla dowolnego $x \in \mathbb{C}$ jest liczbą podzielną przez 16.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$g(x) = f(x+2)$

$h(x) = f(x-2)$

Dziedziną każdej z funkcji f, g, h jest zbiór liczb rzeczywistych.

Wówczas:

$g(x) - h(x) = f(x+2) - f(x-2) =$

$= -2(x+2)^2 - \left(-2(x-2)^2\right) = -2\left(x^2+4x+4\right) - \left(-2\left(x^2-4x+4\right)\right) =$

$= -2x^2 - 8x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 = -16x$

Ponieważ różnica tych wartości jest iloczynem liczby 16 i liczby całkowitej x, zatem rozpatrywana liczba jest podzielna przez 16.

Słownik

przekształcenie wykresu funkcji f(x - p)

przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi X o p jednostek w prawo $(p > 0)$ lub p jednostek w lewo $(p < 0)$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną. Odczytaj, jakie wartości po przesunięciu paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej przyjmują współrzędne wierzchołka paraboli oraz równanie osi symetrii. Określ również miejsce zerowe oraz przedziały monotoniczności otrzymanej funkcji.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFQUAWv3S

Polecenie 2

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji, równanie osi symetrii, miejsce zerowe oraz przedziały monotoniczności dla funkcji w przekształceniu, jeżeli po przesunięciu paraboli, będącej wykresem funkcji f otrzymujemy parabolę, będącą wykresem funkcji g określonej wzorem:

a) $g(x) = f(x - 3)$

b) $g(x) = f(x + 2)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

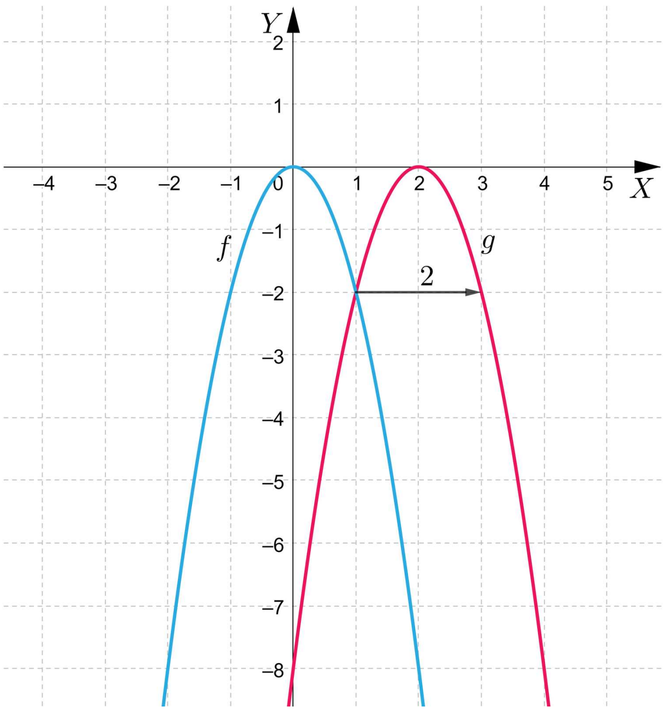
Ćwiczenie 7

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = 5x^2$.

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej k liczba $f(k+1) - f(k-1)$ jest podzielna przez 20.

Ćwiczenie 8

Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = -2x^2$. Parabolę, będącą wykresem tej funkcji przesunięto o 2 jednostki w prawo i otrzymano parabolę, będącą wykresem funkcji g, jak na poniższym rysunku.



Uporządkuj malejąco liczby: $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(4)$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ wzdłuż osi X

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa własności funkcji kwadratowej po przesunięciu jej wykresu wzdłuż osi odciętych układu współrzędnych.
- sprawdza, które własności nie zmieniają się, a które ulegają zmianie przy przesunięciu wykresu funkcji kwadratowej wzdłuż osi X.
- stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ wzdłuż osi X", wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 2 grupach, metodą tekstu przewodniego – wykorzystując odpowiednie treści z sekcji „Przeczytaj". Celem 1 grupy jest poznanie własności wykresu funkcji kwadratowej po przesunięciu w prawo wzdłuż osi odciętych, a grupy 2 – po przesunięciu tego wykresu w lewo. Wszyscy uczniowie spotykają się przy „okrągłym stole". Zadaniem przedstawicieli grup jest przekazanie zdobytej wiedzy pozostałym uczniom. Następnie uczniowie wspólnie ustalają własności funkcji kwadratowej, w zależności od tego, w którą stronę są skierowane ramiona paraboli.
2. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałem w sekcji „Symulacja interaktywna", a następnie dzielą się zdobytą wiedzą z pozostałymi uczniami. Następnie wykonują polecenia zawarte w tej sekcji.
3. Uczniowie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1- 5 w sekcji „Sprawdź się". Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz", która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Zadania numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawiają je wspólnie z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ wzdłuż osi X”).

Materiały pomocnicze:

- Jednomian kwadratowy i jego współczynniki. Przesunięcie wykresu jednomianu kwadratowego wzdłuż osi układu współrzędnych.

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Symulacja interaktywna” można wykorzystać jako powtórzenie wiadomości w temacie przesunięcia wykresu funkcji kwadratowej.
- „Symulację interaktywną” można wykorzystać do wyznaczania wzoru funkcji kwadratowej po przesunięciu jej wykresu wzdłuż osi odciętych układu współrzędnych.