Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania promieni i średnic kół

Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania promieni i średnic kół

Źródło: Sylabo, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Twierdzenie Pitagorasa jest chyba najbardziej znanym twierdzeniem z geometrii płaszczyzny. Ma ono także wiele zastosowań. Tu pokażemy, jak można zastosować twierdzenie Pitagorasa do obliczania długości odcinków, które są elementami okręgów lub kół. Spróbujemy na przykład rozstrzygnąć, czy mając do dyspozycji dwa proste kije, każdy o długości $1{,}7\ \mathrm{m}$, możemy je ułożyć na cembrowinie studni o średnicy $2\ \mathrm{m}$, tak, żeby przywiązany do kija obciążony sznur wskazywał dokładnie środek okręgu cembrowiny.

Twoje cele

- Mając daną długość cięciwy okręgu i znając jej odległość od środka okręgu, obliczysz długość promienia tego okręgu wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.
- Wykorzystasz twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości cięciwy lub odległości środka okręgu od danej jego cięciwy.
- Wykorzystasz twierdzenie Pitagorasa do rozwiązywania problemów geometrycznych dotyczących okręgu.
- Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa do przeprowadzania dowodów geometrycznych.

Przeczytaj

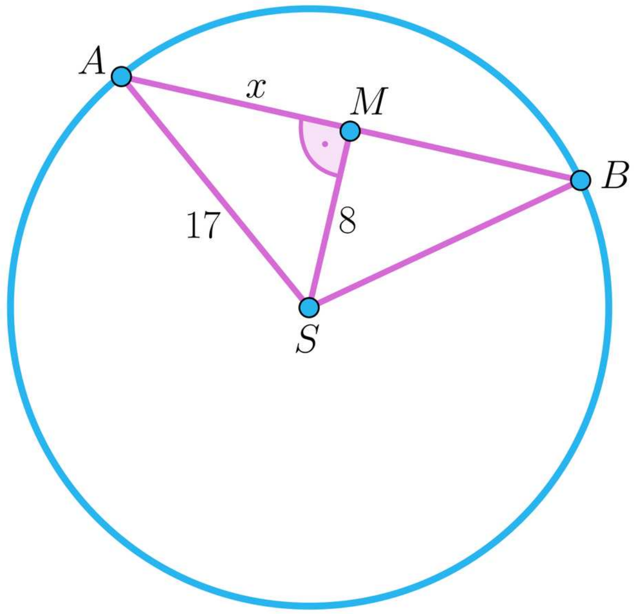
Prześledźmy kilka przykładów dotyczących okręgów lub kół, w których wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa.

Przykład 1

W okręgu o promieniu 17 poprowadzono cięciwę, która jest oddalona od środka tego okręgu o 8. Oblicz jej długość.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Odległość środka S okręgu od cięciwy AB to długość najkrótszego odcinka, którego jednym końcem jest punkt S, a drugim - punkt leżący na cięciwie AB. Jak wiemy, odległość punktu S od prostej to długość odcinka SM prostopadłego do tej prostej, którego koniec M leży na tej prostej. Ponieważ odcinki AS i BS są promieniami okręgu, to trójkąt ABS jest równoramienny. Oczywiście, o ile cięciwa nie jest średnicą okręgu. Zatem najkrótszy z odcinków łączący środek S z cięciwą AB to wysokość SM trójkąta ABS. Spodek M tej wysokości jest zatem środkiem cięciwy AB.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ASM otrzymujemy $|AS|^2 = |AM|^2 + |SM|^2$,

czyli $17^2 = x^2 + 8^2$.

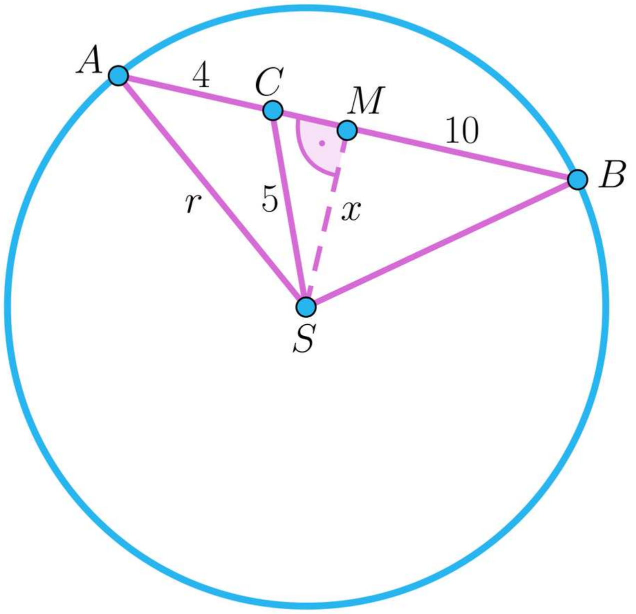
Stąd $x = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. Zatem $|AB| = 2x = 30$.

Przykład 2

Punkt C leży na cięciwie AB okręgu o środku S. Długości odcinków AC, BC i SC są równe: $|AC| = 4$, $|BC| = 10$ i $|SC| = 5$. Oblicz promień tego okręgu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Poprowadźmy odcinek SM, gdzie M to środek cięciwy AB. Niech $r = |SA|$ oraz $x = |SM|$. Wtedy $|AM| = |BM| = \frac{4+10}{2} = 7$, więc $|CM| = 7 - 4 = 3$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CMS otrzymujemy $|CS|^2 = |CM|^2 + |SM|^2$, czyli $5^2 = 3^2 + x^2$.

Stąd $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Ponownie korzystając z twierdzenia Pitagorasa, ale tym razem dla trójkąta AMS mamy $|AS|^2 = |AM|^2 + |SM|^2$,

czyli $r^2 = 7^2 + 4^2$.

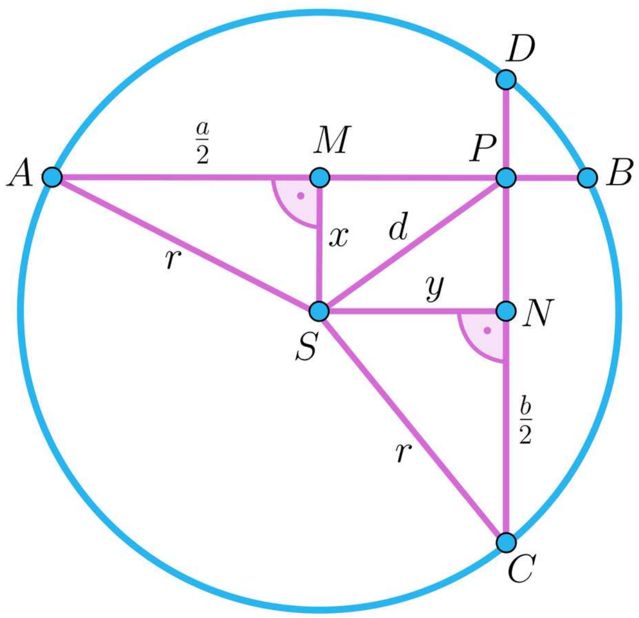
Stąd $r = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$.

Przykład 3

W okręgu o środku S i promieniu r poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy AB i CD o długościach $|AB| = a$ i $|CD| = b$, przecinające się w punkcie P. Odległość między punktami S i P jest równa $|SP| = d$. Udowodnij, że $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2+4d^2}{8}}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AMS otrzymujemy $|AS|^2 = |AM|^2 + |SM|^2$, czyli $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2$.

Stąd $x^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}$.

Tak samo z twierdzenia Pitagorasa dla dla trójkąta CNS otrzymujemy $|CS|^2 = |CN|^2 + |SN|^2$, czyli $r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + y^2$. Stąd $y^2 = r^2 - \frac{b^2}{4}$.

Ponownie wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta SMP. Dostajemy wtedy $|SP|^2 = |SM|^2 + |MP|^2$, czyli $d^2 = x^2 + y^2$.

Stąd i z otrzymanych poprzednio dwóch równości mamy $d^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} + r^2 - \frac{b^2}{4}$, skąd otrzymujemy kolejno $2r^2 = d^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, $r^2 = \frac{4d^2+a^2+b^2}{8}$.

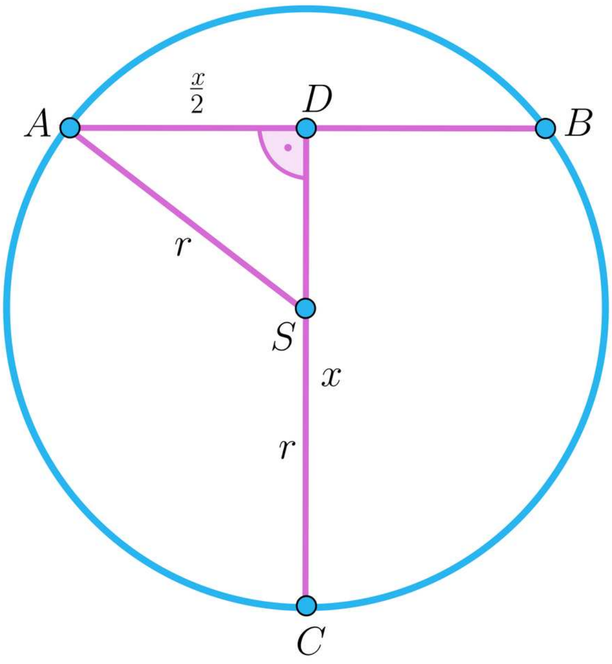
Zatem $r = \sqrt{\frac{4d^2+a^2+b^2}{8}}$. To należało udowodnić.

Przykład 4

Pokażemy, że mając do dyspozycji dwa kije, każdy o długości $1{,}7$ m możemy tak je ułożyć na okrągłej cembrowinie studni o średnicy 2 m, żeby można było do któregoś z tych kijów przywiązać obciążony sznur, który będzie wskazywał środek okręgu cembrowiny.

Rozwiązanie

Zanim sporządzimy rysunek, zauważmy, że skoro obciążony sznur ma wskazywać środek okręgu cembrowiny studni, to musi on być przywiązany do któregoś kija w punkcie leżącym dokładnie w środku okręgu. Wobec tego kij ten musi być ułożony wzdłuż średnicy studni. Ponieważ jednak jego długość jest mniejsza od średnicy studni, to nie może on opierać się na cembrowinie dwoma końcami. Stąd wniosek, że jednym końcem musi opierać się na drugim kiju, który z kolei musi obydwoma końcami opierać się na cembrowinie. Teraz możemy więc sporządzić odpowiedni rysunek.



Połóżmy kije tak, żeby kij AB był prostopadły do kija CD. Minimalną długość kija oznaczmy przez x, a więc $|AB| = |CD| = x$, a przez r - promień okręgu.

Wówczas przyprostokątna DS trójkąta prostokątnego ADS ma długość równą $|DS| = x - r$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|AS|^2 = |AD|^2 + |DS|^2$, czyli $r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x-r)^2$.

Stąd $r^2 = \frac{x^2}{4} + x^2 - 2rx + r^2$, a dalej $\frac{5x^2}{4} = 2rx$, czyli $x = \frac{8}{5}r$.

Zatem $x = \frac{4}{5} \cdot 2r$. To oznacza, że kij musi mieć długość co najmniej równą $\frac{4}{5}$ długości średnicy.

Jeśli więc średnica cembrowiny jest równa 2 m, to długość kija musi być równa co najmniej $\frac{4}{5} \cdot 2 = 1,6$ m. Kij o długości 1,7 m spełnia ten warunek.

Słownik

twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli a i b są długościami przyprostokątnych, zaś c długością przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, to zachodzi związek $a^2 + b^2 = c^2$.

cembrowina studni

betonowy krąg uniemożliwiający osuwanie się ziemi do otworu studni

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z tą częścią animacji, która zawiera zadanie pierwsze wraz z jego rozwiązaniem. Zwróć uwagę na figurę, jaką tworzy cięciwa koła i promienie poprowadzone do jej końców.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D141GJZR6

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący związków miarowych kół.

Polecenie 2

Zapoznaj się z tą częścią animacji, która zawiera zadanie drugie. Włącz pauzę po zapoznaniu się z treścią zadania. Zastanów się, czy problem postawiony w tym zadaniu można sprowadzić do problemu z zadania pierwszego.

Sprawdź się

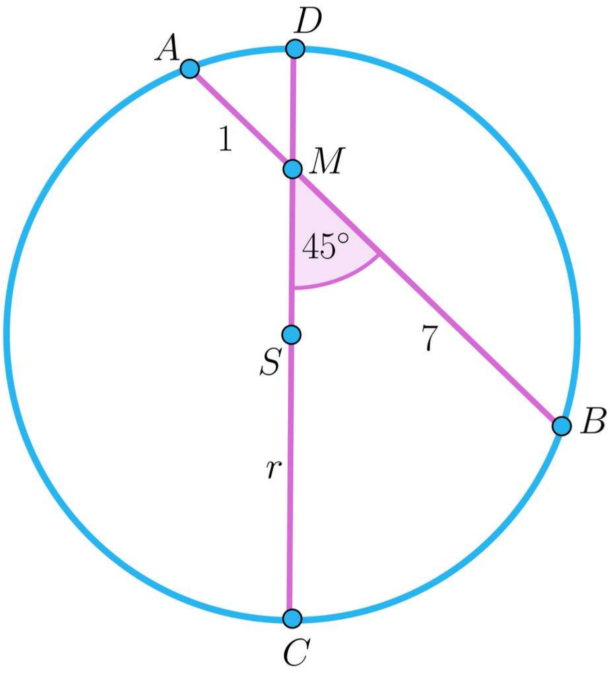
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

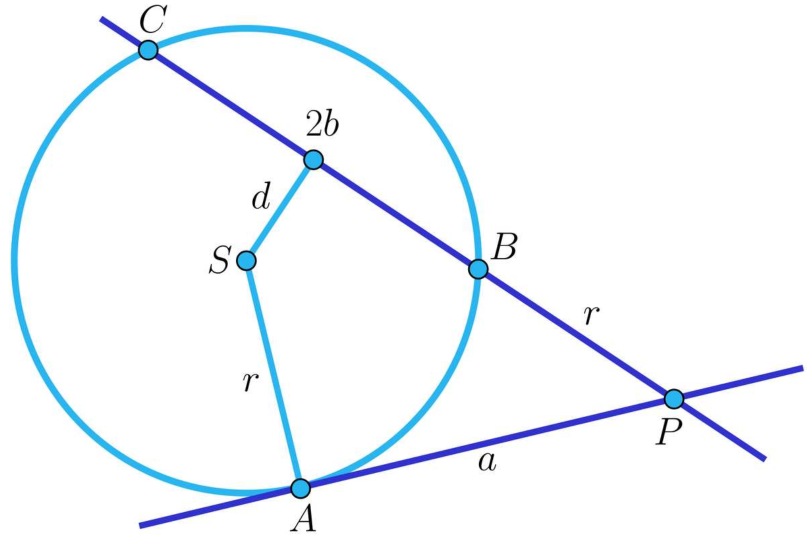
Cięciwa AB przecina średnicę CD okręgu w punkcie M pod kątem 45°. Odcinki AM i BM mają długości równe odpowiednio 1 i 7.



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

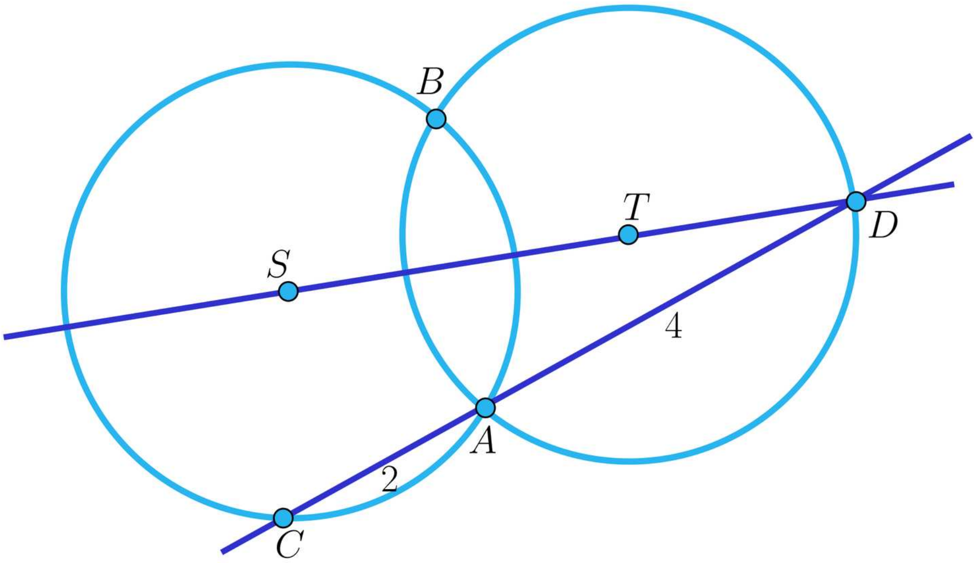
Styczna do okręgu w punkcie A przecina sieczną tego okręgu w punkcie P. Środek S okręgu leży w odległości d od siecznej, a cięciwa BC okręgu wyznaczona przez sieczną ma długość $2\ b$. Odcinek PB siecznej jest równy promieniowi r okręgu, a odcinek AP stycznej ma długość a. Punkt S leży wewnątrz kąta APB (zobacz rysunek).



Wskaż wszystkie prawdziwe równości.

Ćwiczenie 6

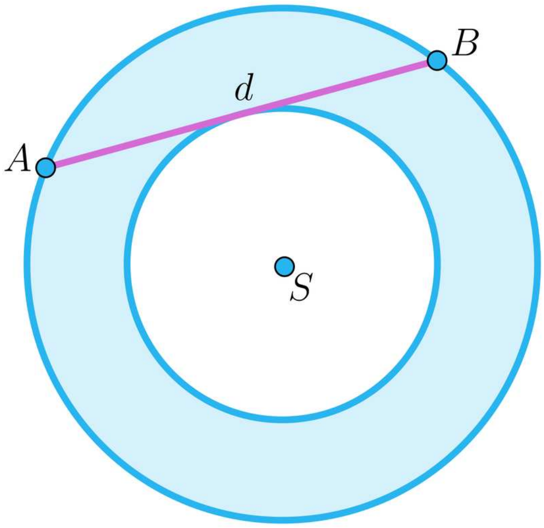
Dwa okręgi o jednakowych promieniach i środkach S i T przecinają się w punktach A i B. Wspólna sieczna tych okręgów przecina okrąg o środku S w punktach A i C, a okrąg o środku T w punktach A i D. Punkt D leży na prostej ST. Cięciwy AC i AD mają długości $|AC| = 2$ i $|AD| = 4$.



Oblicz promień każdego z tych okręgów.

Ćwiczenie 7

Cięciwa AB zewnętrznego okręgu pierścienia kołowego o środku S jest styczna do wewnętrznego okręgu tego pierścienia, a długość tej cięciwy jest równa d (zobacz rysunek).



Udowodnij, że pole tego pierścienia nie zależy od promieni tych okręgów.

Ćwiczenie 8

Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c, d leżą na okręgu, a przekątne AC i BD tego czworokata są prostopadłe. Wykaż, że promień r tego okręgu jest równy $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{8}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania promieni i średnic kół

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza promienia okręgu, mając daną długość cięciwy tego okręgu i znając jej odległość od środka okręgu wykorzystując twierdzenie Pitagorasa,
- oblicza długości cięciwy lub odległości środka okręgu od danej jego cięciwy wykorzystując twierdzenie Pitagorasa,
- rozwiązuje problemy geometryczne dotyczące okręgu wykorzystując twierdzenie Pitagorasa,
- przeprowadz dowody geometryczne wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda stolików eksperckich;
- lekcja odwrócona;
- dyskusja;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przypominają sobie twierdzenie Pitagorasa.

Faza wstępna:

- Przedstawienie uczniom tematu: „Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania promieni i średnic kół" oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
- Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

- Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj". Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj"). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
- Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem w sekcji „Animacja". Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.

- Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 3-4 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
- Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie".

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1, 2, 5 z sekcji „Sprawdź się".

Materiały pomocnicze:

- Twierdzenie Pitagorasa

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie pracować podczas lekcji.