



Walec opisany na stożku

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Umiesz już wykreślać przekrój osiowy walca i stożka. W tym materiale wykorzystasz umiejętność myślenia przestrzennego oraz umiejętność podejmowania decyzji dotyczącej planowania strategii rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej. Twoim celem będzie rozwiązywanie problemów dotyczących walca opisanego na stożku.

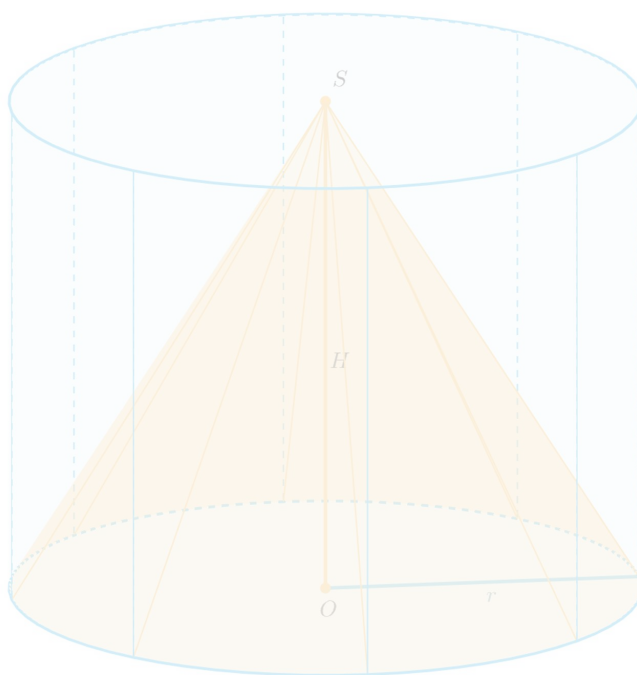
Twoje cele

- Nauczysz się wykreślać przekrój osiowy przedstawiający walec opisany na stożku.
- Wykorzystasz związki miarowe geometrii płaskiej do rozwiązywania zagadnień związanych z geometrią przestrzenną.

Przeczytaj

Walec opisany na stożku

Wyobraźmy sobie walec opisany na stożku. Zastanówmy się: jakie warunki muszą być spełnione, aby walec opisać na stożku? W jaki sposób wykreślić walec opisany na stożku na kartce papieru?

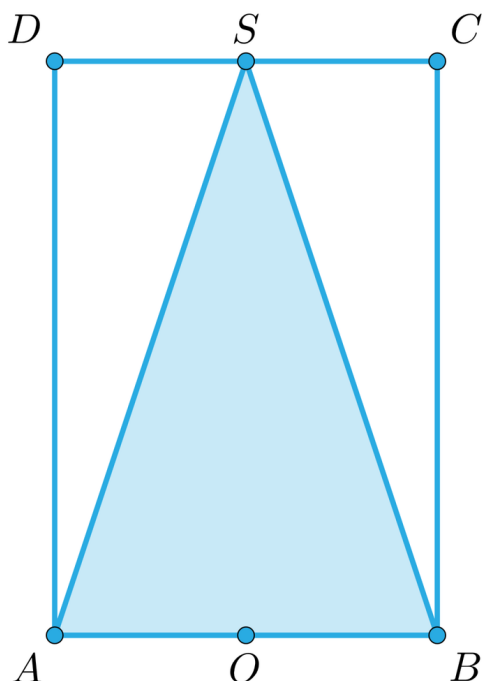


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1DirTtFk>

Zapamiętaj

Walec jest opisany na stożku wtedy i tylko wtedy, gdy podstawa stożka jest jedną z podstaw walca, a wierzchołek stożka jest środkiem drugiej podstawy walca.

Zadania dotyczące walca opisanego na stożku można sprowadzić do prostych zadań geometrii płaskiej. Na rysunku poniżej przedstawiono **przekrój osiowy walca** opisanego na stożku. Przekrój ten pomoże nam w planowaniu strategii rozwiązania wielu zadań geometrii przestrzennej.



Zauważmy, że długość promienia podstawy walca opisanego na stożku, jest równa długości promienia podstawy stożka i podobnie długość wysokości walca jest równa długości wysokości tego stożka.

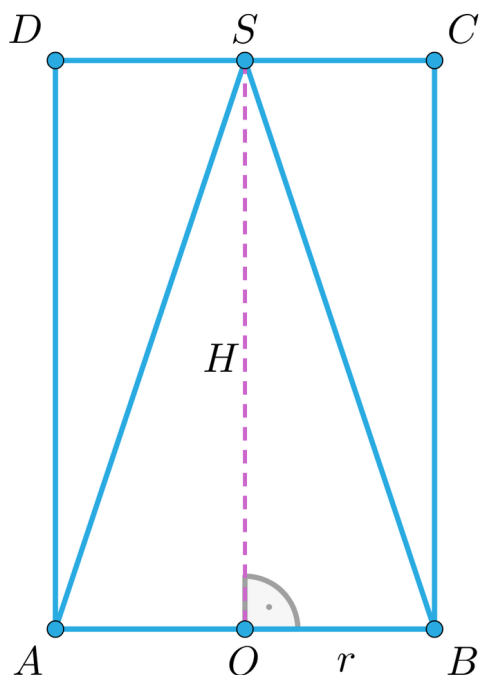
Do rozwiązywania zadań dotyczących walca opisanego na stożku wykorzystamy znane nam twierdzenia geometrii płaskiej: twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie cosinusów, wykorzystamy także zależność dla [cosinusa kąta podwojonego](#).

Przykład 1

W walec o promieniu podstawy długości 10 cm i wysokości 24 cm wpisano stożek. Obliczmy pole powierzchni bocznej stożka.

Rozwiązanie

1) Wykonujemy rysunek przedstawiający tę sytuację. Wygodnie jest narysować [przekrój osiowy](#) odpowiednio ułożonych brył. Rysunek powinien być czytelny.



2) Przyjmujemy oznaczenia.

$|OB| = r$ długość promienia podstawy walca i stożka,

$|OS| = H$ długość wysokości walca i stożka.

3) Pole powierzchni bocznej stożka obliczymy ze wzoru $P_b = \pi r l$, gdzie l oznacza długość tworzącej stożka, w tym przypadku to długość odcinka BS .

4) Z trójkąta OBS i twierdzenia Pitagorasa mamy $H^2 + r^2 = l^2$, zatem $24^2 + 10^2 = l^2$, stąd $l = 26$ [cm].

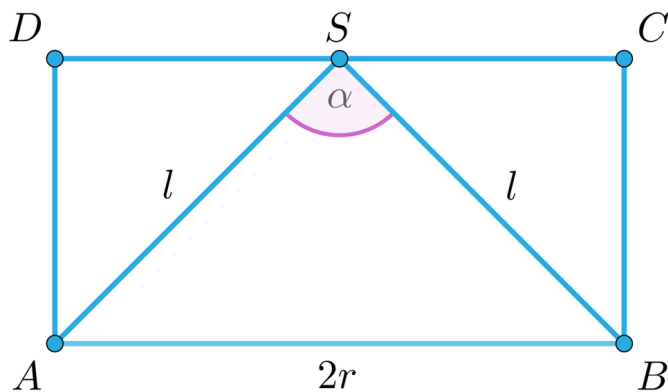
5) Pole boczne stożka wynosi $P_b = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$ [cm²].

Przykład 2

W walec wpisano stożek. Tworząca stożka ma długość 17 cm a średnica podstawy walca ma długość 30 cm. Wyznaczmy cosinus kąta rozwarcia stożka. Uzasadnimy, że jest to kąt rozwarty.

Rozwiązanie

1) Wykonujemy czytelny rysunek. Wystarczy narysować przekrój osiowy tych brył.



2) Przyjmijmy oznaczenia:

$|AB| = 2r$ długość średnicy podstawy walca i podstawy stożka,

$|BS| = |AS| = l$ długość tworzącej stożka.

Zadanie możemy rozwiązać dwoma sposobami:

I sposób:

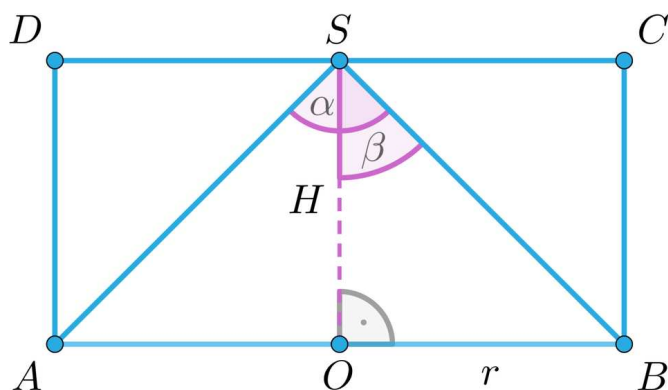
Z trójkąta ABS i [twierdzenia cosinusów](#) wyznaczmy kąt rozwarcia stożka α .

Mamy zatem $(2r)^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos \alpha$, po podstawieniu otrzymujemy odpowiednio $900 = 289 + 289 - 2 \cdot 289 \cdot \cos \alpha$. Stąd $\cos \alpha = -\frac{322}{578} = -\frac{161}{289}$.

Ponieważ $\cos \alpha < 0$, to kąt rozwarcia stożka α jest kątem rozwartym.

II sposób:

Poprowadźmy wysokość stożka SO , gdzie punkt O jest środkiem podstawy stożka.



Zauważmy, że kąt $\alpha = 2\beta$ i ze wzoru na cosinus kąta podwojonego mamy $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta$ oraz trójkąta OBS mamy $\sin \beta = \frac{15}{17}$. Wynika stąd, że $\cos \alpha = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{15}{17}\right)^2 = -\frac{161}{289}$.

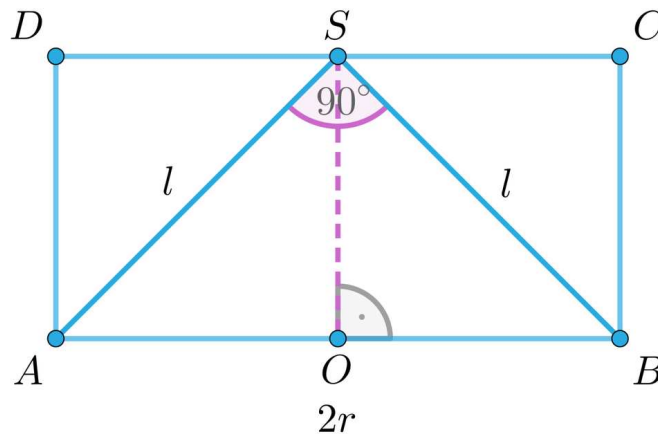
Ponieważ $\cos \alpha < 0$, to kąt rozwarcia stożka α jest kątem rozwartym.

Przykład 3

W walec wpisano stożek. Kąt rozwarcia stożka jest kątem prostym, zaś wysokość walca ma długość 12 cm. Obliczmy różnicę pomiędzy polem powierzchni całkowitej walca i polem powierzchni całkowitej stożka.

Rozwiązanie

Rysujemy przekrój osiowy bryły.



Przyjmujemy oznaczenia.

$|OB| = r$ długość podstawy stożka i walca,

$|OS| = H$ długość wysokości walca i stożka,

$|BS| = l$ długość tworzącej stożka,

$|\sphericalangle ASB| = 90^\circ$ miara kąta rozwarcia stożka.

Zauważmy, że trójkąt OBS jest trójkątem równoramiennym, zatem $|OS| = |OB| = 12$ i $|BS| = 12\sqrt{2}$.

Pole powierzchni całkowitej walca obliczymy ze wzoru $P_{cw} = 2\pi r(r + H)$, stąd $P_{cw} = 2\pi \cdot 12 \cdot (12 + 12) = 576\pi$.

Pole powierzchni całkowitej stożka obliczymy ze wzoru $P_{cs} = \pi r(r + l)$,
 $P_{cs} = \pi \cdot 12 \cdot (12 + 12\sqrt{2}) = 144\pi + 144\sqrt{2}\pi$.

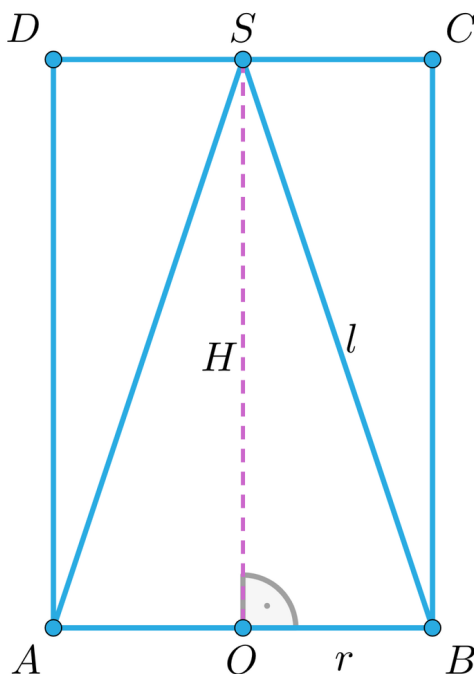
Różnica pomiędzy polem powierzchni całkowitej walca a polem powierzchni całkowitej stożka wynosi $P_{cw} - P_{cs} = 576\pi - 144\pi - 144\sqrt{2}\pi = (432 - 144\sqrt{2})\pi \text{ [cm}^2\text{]}$.

Przykład 4

W walec wpisano stożek o wysokości długości H . Pole powierzchni bocznej stożka jest równe polu powierzchni bocznej walca. Wyznaczmy objętość walca.

Rozwiązanie

Rysujemy przekrój osiowy bryły.



Przyjmujemy oznaczenia.

$|OB| = r$ długość podstawy stożka i walca,

$|OS| = H$ długość wysokości walca i stożka,

$|BS| = l$ długość tworzącej stożka.

Pole powierzchni bocznej walca wyrażamy wzorem $P_{bw} = 2\pi rH$ oraz pole powierzchni bocznej stożka wzorem $P_{bs} = \pi rl$.

Z warunków zadania otrzymujemy zależność $2\pi rH = \pi rl$, stąd mamy $2H = l$.

Objętość walca obliczymy ze wzoru $V_w = \pi r^2 H$. Zauważmy, że z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OBS mamy $H^2 + r^2 = l^2$.

Zatem z układu warunków $2H = l$ i $H^2 + r^2 = l^2$ otrzymujemy $H^2 + r^2 = 4H^2$, a stąd $r^2 = 3H^2$.

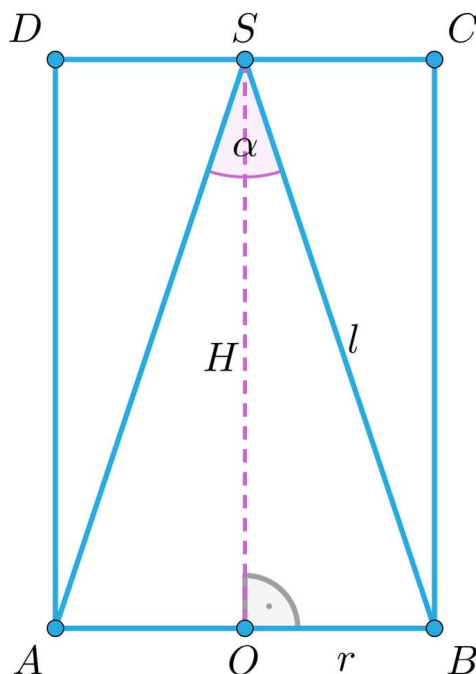
Objętość walca zatem jest równa $V_w = \pi \cdot 3H^2 \cdot H = 3\pi H^3$.

Przykład 5

W walec wpisano stożek. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe polu powierzchni bocznej walca. Wyznamy miarę kąta rozwarcia stożka.

Rozwiązanie

Rysujemy przekrój osiowy bryły.



Przyjmujemy oznaczenia.

$|OB| = r$ długość podstawy stożka i walca,

$|OS| = H$ długość wysokości walca i stożka,

$|BS| = l$ długość tworzącej stożka.

Kąt rozwarcia stożka, który mamy wyznaczyć to $\sphericalangle ASB$. Przyjmijmy, że $|\sphericalangle ASB| = \alpha$.

Wyznamy miarę kąta rozwarcia stożka dwoma metodami.

I metoda

Z warunków zadania otrzymujemy zależność $2\pi rH = \pi rl$, stąd mamy $2H = l$.

Zauważmy, że z [twierdzenia Pitagorasa](#), mamy $H^2 + r^2 = l^2$, zatem $H^2 + r^2 = 4H^2$, a stąd $r^2 = 3H^2$.

Określmy $\cos \alpha$ stosując [twierdzenie cosinusów](#) dla trójkąta ABS . Mamy zatem $(2r)^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos \alpha$. Podstawiając odpowiednio otrzymujemy zależność

$4 \cdot 3H^2 = 2 \cdot 4H^2 - 2 \cdot 4H^2 \cos \alpha$, stąd $12H^2 = 8H^2 - 8H^2 \cos \alpha$, zatem $\cos \alpha = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$, stąd $\alpha = 120^\circ$.

II metoda

Przyjmijmy $|\sphericalangle OSB| = \beta = \frac{1}{2}\alpha$. W trójkącie prostokątnym OBS mamy zależność $\cos \beta = \frac{H}{l}$.

Z warunków zadania otrzymujemy zależność $2\pi rH = \pi rl$, stąd mamy $2H = l$.

Zatem $\cos \beta = \frac{H}{2H} = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy $\beta = 60^\circ$, a stąd $\alpha = 120^\circ$.

Kąt rozwarcia stożka α jest kątem rozwartym o mierze $\alpha = 120^\circ$.

Słownik

przekrój osiowy stożka

przekrój stożka płaszczyzną zawierającą oś obrotu stożka. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym

przekrój osiowy walca

przekrój walca płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca. Przekrój osiowy walca jest prostokątem

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

twierdzenie Pitagorasa

jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2$$

cosinus kąta podwojonego

zależność opisująca cosinus miary kąta podwojonego

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

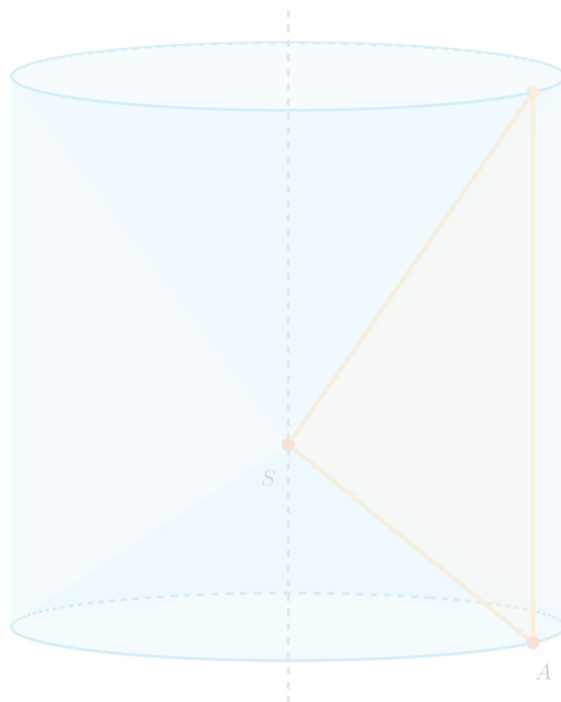
Aplet

Polecenie 1

Rozważmy trójkąt prostokątny obracający się wokół prostej równoległej do jednej z przyprostokątnych i przechodzącej przez wierzchołek trójkąta nienależący do tej przyprostokątnej. Jaką bryłę otrzymamy w wyniku takiego obrotu?

Porównaj swoją odpowiedź z obrotem przedstawionym w poniższym aplecie.

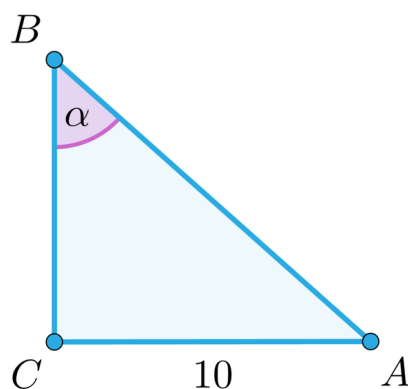
Aby otrzymać różne rodzaje trójkąta, zmieniaj położenie punktu S . Obserwuj jaka bryła powstanie w wyniku takiego obrotu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D502jpxNk>

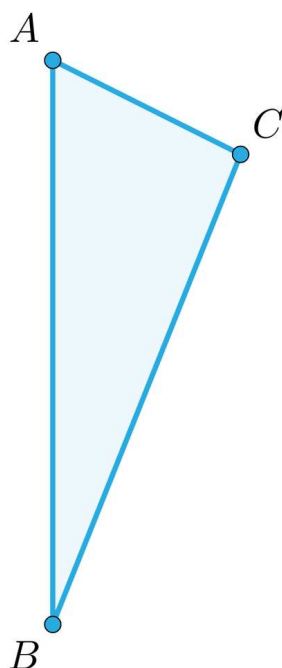
Polecenie 2

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (jak na rysunku), gdzie $|AC| = 10$ cm oraz $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. Trójkąt ten obracamy wokół prostej równoległej do przyprostokątnej AC i przechodzącej przez wierzchołek B . Oblicz objętość powstałej bryły.



Polecenie 3

Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku obraca się wokół prostej równoległej do boku AB i przechodzącej przez punkt C . Wiedząc, że $|BC| = 14$ cm, $|AC| = 8$ cm i $|AB| = 18$ cm, oblicz objętość bryły powstałej w wyniku tego obrotu.



Polecenie 4

W walcu wydrążono stożki (patrz aplet powyżej). Udowodnij, że objętość części walca pozostałego po wydrążeniu stożków jest niezależna od wyboru długości wysokości tych stożków.

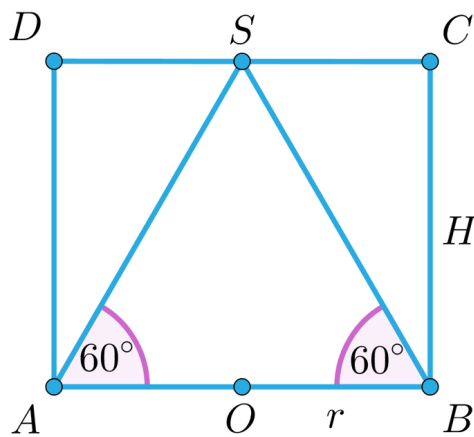
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest walec opisany na stożku. Przekrój osiowy tego stożka jest trójkątem równobocznym o polu powierzchni równym $147\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość walca opisanego na tym stożku. W rachunkach przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$. Wpisz odpowiedź.



$V =$ cm^3

Ćwiczenie 2



W walec wpisano stożek. Wiedząc, że stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola powierzchni bocznej stożka wynosi 1 : 1. Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Pole powierzchni całkowitej stożka i walca są takie same.

☐ Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° .

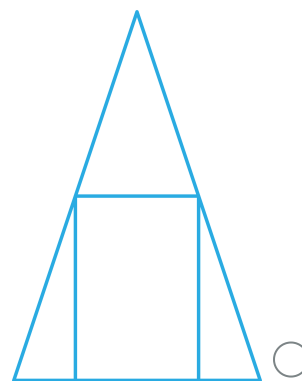
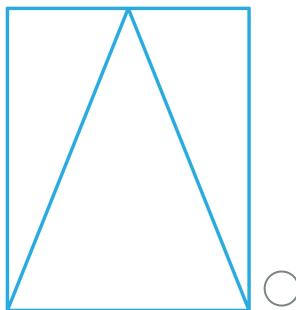
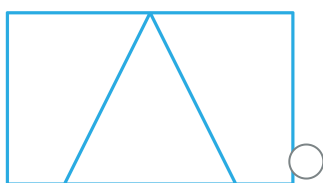
☐ Długość wysokości walca jest dwa razy większa od długości tworzącej stożka.

☐ Długość wysokości walca jest dwa razy mniejsza od długości tworzącej stożka.

Ćwiczenie 3



Dany jest walec opisany na stożku. Zaznacz rysunek, na którym przedstawiono przekrój osiowy opisanej sytuacji.



Ćwiczenie 4



Stosunek długości wysokości walca do długości tworzącej stożka wpisanego w ten walec wynosi $\frac{1}{2}$, wynika stąd, że miara kąta rozwarcia stożka wynosi:

☐ 60°

☐ 30°

☐ 150°

☐ 120°

Ćwiczenie 5



Dany jest walec opisany na stożku. Przekrojem osiowym tego walca jest kwadrat, natomiast długość tworzącej tego stożka wynosi $4\sqrt{5}$ cm. Oblicz objętość walca.

Ćwiczenie 6



Kąt rozwarcia stożka wpisanego w walec ma miarę 150° . Wiedząc, że długość średnicy podstawy walca wynosi 8 cm, oblicz objętość walca.

Ćwiczenie 7

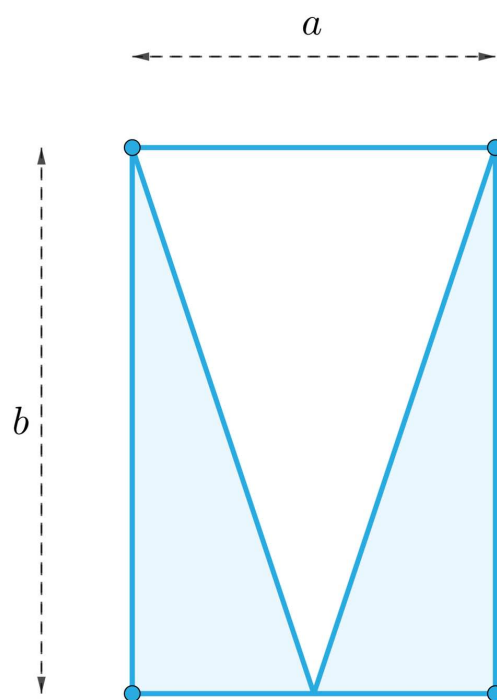


W walec wpisano stożek. Stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola powierzchni bocznej stożka wynosi $\frac{2}{3}$. Wyznacz cosinus kąta rozwarcia stożka.

Ćwiczenie 8



W walcu, wydrążono stożek o średnicy podstawy długości a i wysokości długości dwa razy dłuższej od średnicy podstawy stożka. Przekrój osiowy walca po wydrążeniu stożka przedstawiono na rysunku.



Wierzchołek stożka znajduje się na powierzchni podstawy walca. Oblicz pole całkowite powierzchni bryły pozostałej z walca po wydrążeniu stożka.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Bochenek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Walec opisany na stożku

Grupa docelowa: Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria

Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje walec opisany na stożku i potrafi naszkicować przekrój osiowy tej sytuacji
- bada związki miarowe między odcinkami na wykreślonym przekroju osiowym
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja w oparciu o ćwiczenia interaktywne,

- pokaz,
- analiza pomysłów.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- przekroje brył obrotowych, model walca opisanego na stożku,
- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-podręczniku,
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz o powtórzenie twierdzenia cosinusów i zależności na cosinus kąta podwojonego.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat: „Walec opisany na stożku” i cele zajęć.
2. Uczniowie formułują kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują przekroje osiowe walca i stożka na modelach. Zapoznają się z modelem walca opisanym na stożku.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 5 grup i przydziela każdej grupie jedno polecenie z sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie przygotowują rozwiązania i wspólnie omawiają sposób rozwiązania zadania umieszczonego w danym poleceniu na forum klasy.
3. Nauczyciel wykorzystuje aplet do zwizualizowania walca opisanego na stożku powstałym poprzez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej równoległej do jednej z przyprostokątnych i przechodzącej przez wierzchołek trójkąta nienależącego do tej przyprostokątnej.
Następnie uczniowie rozwiązują polecenie 2.
4. Uczniowie w grupach dzielą się na mniejsze podgrupy i przygotowują rozwiązania ćwiczeń od 1 do 7 z sekcji „Sprawdź się.”
5. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń omawia rozwiązanie ćwiczenia na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy związane z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do sformułowanych na początku lekcji kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się” oraz polecenia 3 i 4 w sekcji „Aplet”.

Materiały pomocnicze:

[Twierdzenie cosinusów](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel wykorzystuje aplet do zwizualizowania brył powstających poprzez obrót trójkąta wokół osi równoległej do jednego z boków trójkąta i przechodzącej przez wierzchołek nienależący do tej osi. Nauczyciel może poprosić uczniów o uogólnienie własności dotyczącej objętości brył powstających poprzez obrót wokół omawianej prostej.