



## Jak obliczyć pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Jak obliczyć pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji?

Źródło: Hester Giang, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Prawnik i matematyk francuski Pierre Fermat, odkrył zasadę znajdowania minimów i maksimów funkcji algebraicznych. Jego doświadczenia otworzyły drogę rozwoju rachunku różniczkowego. Do twórców rachunku różniczkowego z pewnością należą Gottfried Leibniz oraz Isaac Newton. Jednym z ich odkryć była pochodna funkcji. W materiale omówimy, w jaki sposób obliczyć pochodną funkcji w punkcie, jeżeli wykorzystamy definicję pochodnej, a także ilorazu różnicowego funkcji.

### Twoje cele

- Określisz definicję iloraz różnicowego.
- Określisz definicję pochodnej funkcji za pomocą ilorazu różnicowego funkcji.
- Obliczysz iloraz różnicowy funkcji oraz pochodną funkcji w podanym punkcie.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

# Przeczytaj

Przypomnijmy definicję ilorazu różnicowego funkcji.

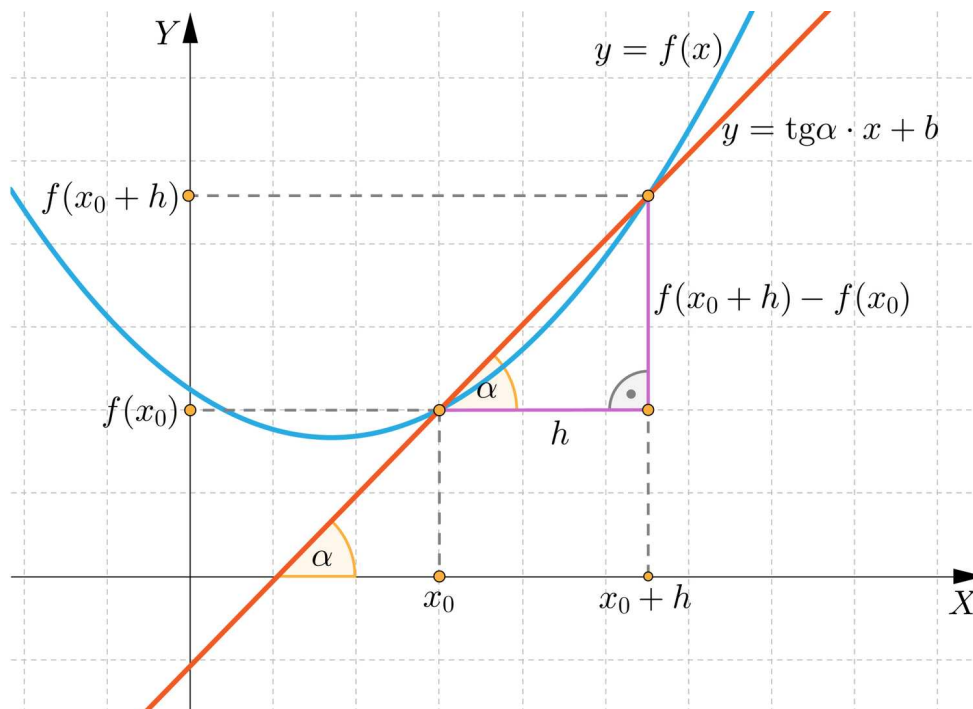
## Definicja: Iloraz różnicowy funkcji

Niech  $f(x)$  oznacza dowolną funkcję określoną w otoczeniu punktu  $x_0$ .

Ilorazem różnicowym funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x_0$  dla przyrostu  $h$  zmiennej niezależnej  $x$  nazywamy wyrażenie

$$U(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Jest to stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji.



Zdefiniujemy pochodną funkcji w punkcie.

## Definicja: Pochodna funkcji w punkcie

Niech  $f(x)$  oznacza dowolną funkcję określoną w otoczeniu punktu  $x_0$ . Jeśli istnieje skończona granica  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ , to tę granicę nazywamy pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  i oznaczamy jako  $f'(x_0)$ .

Stosując tą definicję pokażemy, jak obliczyć pochodną funkcji w podanym punkcie oraz wyprowadzimy, korzystając z definicji, wzory na pochodne różnych funkcji.

## Przykład 1

Obliczymy, korzystając z definicji, pochodną funkcji określonej wzorem  $f(x) = -x^2 + 3x$  w punkcie  $x_0 = -2$ .

**Rozwiązanie:**

Mamy  $f(x) = -x^2 + 3x$  oraz  $x_0 = -2$ .

Obliczamy wartość ilorazu różnicowego funkcji:

$$\begin{aligned} U(h) &= \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{-(-2+h)^2+3\cdot(-2+h)-(-2)^2+6}{h} = \\ &= \frac{-(4-4h+h^2)-6+3h+4+6}{h} = \frac{-4+4h-h^2-6+3h+4+6}{h} = \\ &= \frac{7h-h^2}{h} = 7 - h \end{aligned}$$

Obliczamy pochodną funkcji  $f(x) = -x^2 + 3x$  w punkcie  $x_0 = -2$ :

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} (7 - h) = 7$$

**Przykład 2**

Obliczymy, korzystając z definicji, pochodną funkcji określonej wzorem  $f(x) = x^3 + 2x$  w punkcie  $x_0 = 3$ .

**Rozwiązanie:**

Mamy  $f(x) = x^3 + 2x$  oraz  $x_0 = 3$ .

Obliczamy wartość ilorazu różnicowego funkcji:

$$\begin{aligned} U(h) &= \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^3+2\cdot(3+h)-3^3-2\cdot3}{h} = \\ &= \frac{27+27h+9h^2+h^3+6+2h-27-6}{h} = \frac{29h+9h^2+h^3}{h} = \\ &= 29 + 9h + h^2 \end{aligned}$$

Obliczamy pochodną funkcji  $f(x) = x^3 + 2x$  w punkcie  $x_0 = 3$ :

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} (29 + 9h + h^2) = 29$$

**Przykład 3**

Wykażemy, że pochodna funkcji określonej wzorem  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , w punkcie  $x_0$  jest równa  $2ax_0 + b$ .

**Rozwiązanie:**

Mamy  $f(x) = ax^2 + bx + c$  oraz dany punkt  $x_0$ .

Obliczamy wartość ilorazu różnicowego funkcji:

$$\begin{aligned}U(h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{a \cdot (x_0+h)^2 + b \cdot (x_0+h) + c - a \cdot x_0^2 - b \cdot x_0 - c}{h} = \\&= \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 + bx_0 + bh + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h} = \\&= \frac{2ax_0h + ah^2 + bh}{h} = 2ax_0 + ah + b\end{aligned}$$

Obliczamy pochodną funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + c$  w punkcie  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah + b) = 2ax_0 + b$$

#### Przykład 4

Wykażemy, że pochodna funkcji określonej wzorem  $f(x) = \frac{a}{x}$ , gdzie  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , w punkcie  $x_0$  jest równa  $\frac{-a}{x_0^2}$ .

#### Rozwiązanie:

Mamy  $f(x) = \frac{a}{x}$  oraz dany punkt  $x_0$ .

Obliczamy wartość ilorazu różnicowego funkcji:

$$\begin{aligned}U(h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{a}{x_0+h} - \frac{a}{x_0}}{h} = \frac{\frac{a \cdot x_0 - a \cdot x_0 - a \cdot h}{(x_0+h) \cdot x_0}}{h} = \\&= \frac{\frac{-ah}{(x_0+h) \cdot x_0}}{h} = \frac{-a}{(x_0+h) \cdot x_0}\end{aligned}$$

Obliczamy pochodną funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  w punkcie  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{-a}{(x_0+h) \cdot x_0} \right) = \frac{-a}{x_0 \cdot x_0} = \frac{-a}{x_0^2}$$

#### Przykład 5

Wykażemy, że pochodna funkcji określonej wzorem  $f(x) = \sqrt{x}$ , w punkcie  $x_0$  jest równa  $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ .

#### Rozwiązanie:

Mamy  $f(x) = \sqrt{x}$  oraz dany punkt  $x_0$ .

Obliczamy wartość ilorazu różnicowego funkcji:

$$\begin{aligned}U(h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \\&= \frac{x_0+h-x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Obliczamy pochodną funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  w punkcie  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

## Słownik

### iloraz różnicowy funkcji

wielkość, która opisuje przyrost wartości funkcji względem przyrostu argumentów funkcji w danym przedziale

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem dotyczącym obliczania pochodnej funkcji w punkcie korzystając z definicji, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DFCYsCd1l>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pochodnej funkcji.

---

## Polecenie 2

Oblicz, korzystając z definicji, pochodną funkcji określonej wzorem  $f(x) = 2x^3 - 1$  w punkcie  $x_0 = -1$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Pochodna funkcji określonej wzorem  $f(x) = 5x^3 - 5$  w punkcie  $x_0 = -1$  jest równa:

☐ -10

☐ 15

☐ -15

## Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja określona wzorem  $f(x) = 2\sqrt{x}$ . Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐

Iloraz różnicowy funkcji  $f$  w punkcie  $x_0 = 1$  o zadanym przyroście  $h$  jest równy  $\frac{2}{\sqrt{1+h}+1}$ .

☐

Pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x_0 = 9$  wynosi  $\frac{1}{3}$ .

☐

Iloraz różnicowy funkcji  $f$  w punkcie  $x_0 = 2$  o zadanym przyroście  $h$  jest równy  $\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$ .

☐

Pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x_0 = 16$  wynosi  $\frac{1}{8}$ .

### Ćwiczenie 3



Połącz w pary wzór funkcji z wartością pochodnej tej funkcji w punkcie  $x_0 = 4$ .

$$f(x) = -x^3 + 1$$

$$f'(4) = \frac{1}{8}$$

$$f(x) = \frac{16}{x}$$

$$f'(4) = -48$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$f'(4) = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

### Ćwiczenie 4



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli  $f(x) = x^5 - 2x$ , to  $f'(-2) =$

Jeżeli  $f(x) = \frac{-1}{x}$ , to  $f'(2) =$

Jeżeli  $f(x) = \frac{4}{x-1}$ , to  $f'(3) =$

### Ćwiczenie 5



Oblicz pochodną funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = \frac{2}{x^2}$  w punkcie  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

### Ćwiczenie 6



Oblicz pochodną funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  w punkcie  $x_0 = 2$ .

### Ćwiczenie 7



Wykaż, że pochodna funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = ax + b$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , w punkcie  $x_0$  nie zależy od wartości tego punktu.

## Ćwiczenie 8



Wykaż, że nie istnieje pochodna funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = |x + 3|$  w punkcie  $x_0 = -3$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Jak obliczyć pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji?

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- definiuje pojęcie ilorazu różnicowego funkcji;
- oblicza iloraz różnicowy funkcji;
- określa sposób na obliczenie pochodnej funkcji;
- oblicza pochodną funkcji, korzystając z definicji;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- metoda krokodyła;
- burza mózgów;

- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Jak obliczyć pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji?” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Film samouczek”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

#### **Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Jak obliczyć pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji?”).

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Argumenty i wartości funkcji.](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać „Film samouczek” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące obliczania pochodnej funkcji w punkcie na podstawie definicji.