



Działania na potęgach

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



W tej lekcji utrwalimy wiadomości na temat potęg. Na przykładach powtórzemy własności działań na potęgach. Rozwiążemy najbardziej popularne typy zadań, zakreślając przy tym zgrubny rys historyczny, których bardzo konkretne (łatwe do wyobrażenia, mające odbicie w rzeczywistości) początki sięgają piątego wieku przed naszą erą...

Twoje cele

- Zastosujesz własności działań na potęgach o tych samych podstawach.
- Zastosujesz własności działań na potęgach o tych samych wykładnikach.
- Zastosujesz definicje potęg o wykładnikach rzeczywistych.

Przeczytaj

O potęgowaniu mówili już Platon, Archytas i Eudoksos żyjący na przełomie V i IV wieku przed naszą erą. Opisywali liczby *powierzchniowe* (kwadratowe) i *cielesne* (stereometryczne), mając na myśli drugie i trzecie potęgi, które wykorzystywano odpowiednio do obliczania pól i objętości (źródło: O. Spengler, 1917, *Zmierzch zachodu*, Monachium).

Inne potęgi dla matematyków w Starożytnej Grecji były nie do wyobrażenia. Potęgi o wykładniku ujemnym pojawiają się w Chinach w V wieku naszej ery i służą tam do zapisywania liczb w dziesiętkowym systemie pozycyjnym, zaś oznaczenia $5^{\frac{1}{2}}$ (czyli potęgi o wykładniku wymiernym) używał w wieku XIV Mikołaj Oresme.

O potęgowaniu w sposób zbliżony do naszego, zaczęto myśleć dopiero w wieku XVII za sprawą takich matematyków jak Kartezjusz, Pascal, Fermat, Desargues (źródło: *Krótką historia matematyki*. Ryszard Paweł KostECKI).

Przypomnijmy kolejne definicje, które omawialiśmy we wcześniejszych tematach:

Dla liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej a definiujemy:

$$a^0 = 1, \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Nie definiujemy wyrażenia 0^0 – nazywamy go *symbolem nieoznaczonym*.

Jeśli podstawa potęgi nie jest zerem, możemy zdefiniować potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym.

Dla $a \neq 0$ i liczby naturalnej n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Wszystkie poznane własności potęg zachodzą dla wykładników całkowitych, o ile podstawy nie są równe zero.

Dla $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz dowolnych liczb całkowitych k i m zachodzą wzory:

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

$$a^k : a^m = a^{k-m}$$

$$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$$

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

$$a^k : b^k = (a : b)^k$$

Choć w pewnych szczególnych przypadkach mają sens potęgi o wykładnikach ułamkowych i ujemnych podstawach, to jednak ogólnie potęgi o wykładnikach wymiernych definiujemy dla podstaw dodatnich.

Dla $a > 0$ oraz liczb naturalnych k i m , gdzie $m > 1$

$$a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k} = (\sqrt[m]{a})^k$$

Potęgi o wykładnikach niewymiernych definiujemy korzystając z możliwości przybliżania z nieskończoną dokładnością liczb niewymiernych liczbami wymiernymi. Wszystkie przypomniane powyżej własności potęgowania pozostają prawdziwe dla wykładników wymiernych niecałkowitych i niewymiernych, jeśli podstawy są liczbami dodatnimi.

Przykład 1

Przekształcimy wyrażenie $\frac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 25 \cdot \sqrt{125} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{625 \cdot \sqrt{\frac{1}{25}} \cdot 125^{\frac{1}{4}}}$ do najprostszej postaci korzystając z własności działań na potęgach.

$$\begin{aligned}
& \frac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 25 \cdot \sqrt{125} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{625 \cdot \sqrt{\frac{1}{25} \cdot 125^{\frac{1}{4}}}} = \\
& = \frac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^2 \cdot 125^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{5^4 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (5^3)^{\frac{1}{4}}} = \\
& = \frac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^2 \cdot (5^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (5^2)^{\frac{1}{4}}}{5^4 \cdot (5^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot (5^3)^{\frac{1}{4}}} = \\
& = \frac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^2 \cdot 5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5^4 \cdot 5^{-1} \cdot 5^{\frac{3}{4}}} = \\
& = \frac{5^{\frac{1}{4}+2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}}{5^{4+(-1)+\frac{3}{4}}} = \\
& = \frac{5^{4\frac{1}{4}}}{5^{3\frac{3}{4}}} = \\
& = 5^{4\frac{1}{4}-3\frac{3}{4}} = \\
& = 5^{\frac{1}{2}} = \\
& = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Przykład 2

Uprośćmy wyrażenie $\frac{3^{n+3}+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^{n-1}}$ dla dowolnej liczby całkowitej n .

$$\begin{aligned}
& \frac{3^{n+3}+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^{n-1}} = \\
& = \frac{3^n \cdot 3^3 + 3^n \cdot 3}{3^{n-1} \cdot 3^2 + 3^{n-1}} = \\
& = \frac{30 \cdot 3^n}{10 \cdot 3^{n-1}} = \\
& = \frac{3 \cdot 3^n}{3^{n-1}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{3^{n-1}} =$$

$$= 3^{n+1-(n-1)} =$$

$$= 3^{n+1-n+1} =$$

$$= 3^2 =$$

$$= 9$$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $2^{x+3} - 0,5^{-x} + 2^{x-2} = 29$.

Korzystając z własności potęg, wykonujemy kolejne przekształcenia:

$$2^x \cdot 2^3 - 2^x + 2^x \cdot 2^{-2} = 29$$

$$2^x \cdot (2^3 - 1 + 2^{-2}) = 29$$

$$2^x \cdot \left(7\frac{1}{4}\right) = 29$$

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

W ostatnim kroku skorzystaliśmy z [twierdzenia o równości potęg](#).

Przykład 4

Uprościmy wyrażenie $\left(\sqrt{5^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[4]{6^{\sqrt{2}}}\right)^{2\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{5^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[4]{6^{\sqrt{2}}}\right)^{2\sqrt{2}} = \\
& = \sqrt{5^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}} \cdot \sqrt[4]{6^{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}} = \\
& = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt[4]{6^4} = \\
& = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \left(6^{\frac{1}{4}}\right)^4 = \\
& = 5^{\frac{1}{2} \cdot 2} \cdot 6^{\frac{1}{4} \cdot 4} = \\
& = 5 \cdot 6 = \\
& = 30
\end{aligned}$$

Przykład 5

Dane jest równanie $2^{x^3-x^2} = 2^{4x-4}$. Rozstrzygniemy, które spośród liczb: -2 , -1 , 1 , 2 spełniają to równanie. Aby to zrobić, wystarczy do lewej i prawej strony równania za niewiadomą x podstawić tę samą liczbę i sprawdzić, czy obie strony przyjmują tę samą wartość.

Podstawmy za niewiadomą liczbę -2 :

$$2^{x^3-x^2} \stackrel{x=-2}{=} 2^{(-2)^3-(-2)^2} = 2^{-8-4} = 2^{-12}$$

$$2^{4x-4} \stackrel{x=-2}{=} 2^{4 \cdot (-2)-4} = 2^{-8-4} = 2^{-12}$$

Ponieważ obie strony równania przyjmują tę samą wartość, zatem liczba -2 spełnia równanie.

Rozważmy teraz liczbę -1 :

$$2^{x^3-x^2} \stackrel{x=-1}{=} 2^{(-1)^3-(-1)^2} = 2^{-1-1} = 2^{-2}$$

$$2^{4x-4} \stackrel{x=-1}{=} 2^{4 \cdot (-1)-4} = 2^{-4-4} = 2^{-8}$$

Ponieważ każda ze stron równania przyjmuje inną wartość, liczba -1 nie spełnia równania.

Rozważmy liczbę 1:

$$2^{x^3-x^2} \stackrel{x=1}{=} 2^{1^3-1^2} = 2^{1-1} = 2^0$$

$$2^{4x-4} \stackrel{x=1}{=} 2^{4 \cdot 1-4} = 2^{4-4} = 2^0$$

Ponieważ obie strony równania przyjmują tę samą wartość, zatem liczba 1 spełnia równanie.

Pozostała do sprawdzenia liczba 2:

$$2^{x^3-x^2} \stackrel{x=2}{=} 2^{2^3-2^2} = 2^{8-4} = 2^4$$

$$2^{4x-4} \stackrel{x=2}{=} 2^{4 \cdot 2-4} = 2^{8-4} = 2^4$$

Ponieważ obie strony równania przyjmują tę samą wartość, zatem liczba 2 spełnia równanie.

Zatem równanie jest spełnione przez liczby -2 , 1 i 2 . Liczba -1 nie spełnia równania.

W rozwiązaniu tego zadania korzystaliśmy również z *twierdzenia o równości potęg*.

Słownik

twierdzenie o równości potęg

twierdzenie, które orzeka, że jeśli potęgi mają równe podstawy będące liczbami dodatnimi różnymi od 1 i równe wartości, to ich wykładniki są równe

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Przed Tobą gra edukacyjna zawierająca pytania dotyczące potęg i ich własności, do każdego cztery odpowiedzi, ale tylko jedna poprawna. Zagraj w grę.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKpFMMbAV>

Polecenie 2

Ułóż test złożony z pięciu pytań, każde z czterema odpowiedziami, z których dokładnie jedna będzie poprawna. Pytania mają dotyczyć potęg i ich własności. Stworzony test daj do rozwiązania koledze/koleżance z ławki.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $\frac{5^{n+1}+5^n+5^{n-2}}{5^{n+3}+2\cdot 5^{n+2}-24\cdot 5^n}$ dla dowolnej liczby całkowitej n .



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

Oblicz wartość wyrażenia $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} - 3^{-2} \cdot 9^{0,5} \cdot 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{8}{17}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$.



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Ćwiczenie 9

Rozwiąż równanie $4^{x-1} \cdot 8^{2x+1} = 8^x \cdot 64$.



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na potęgach

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Zastosujesz własności działań na potęgach o tych samych podstawach.
- Zastosujesz własności działań na potęgach o tych samych wykładnikach.
- Zastosujesz definicje potęg o wykładnikach rzeczywistych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- opowiadanie.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Działania na potęgach” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 - „Przed Tobą 12 pytań dotyczących potęg i ich własności, do każdego cztery podpowiedzi, ale tylko jedna poprawna. Rozwiąż test.” z sekcji „Gra edukacyjna”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończony na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

[Potęga o wykładniku całkowitym](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Działania na potęgach”.