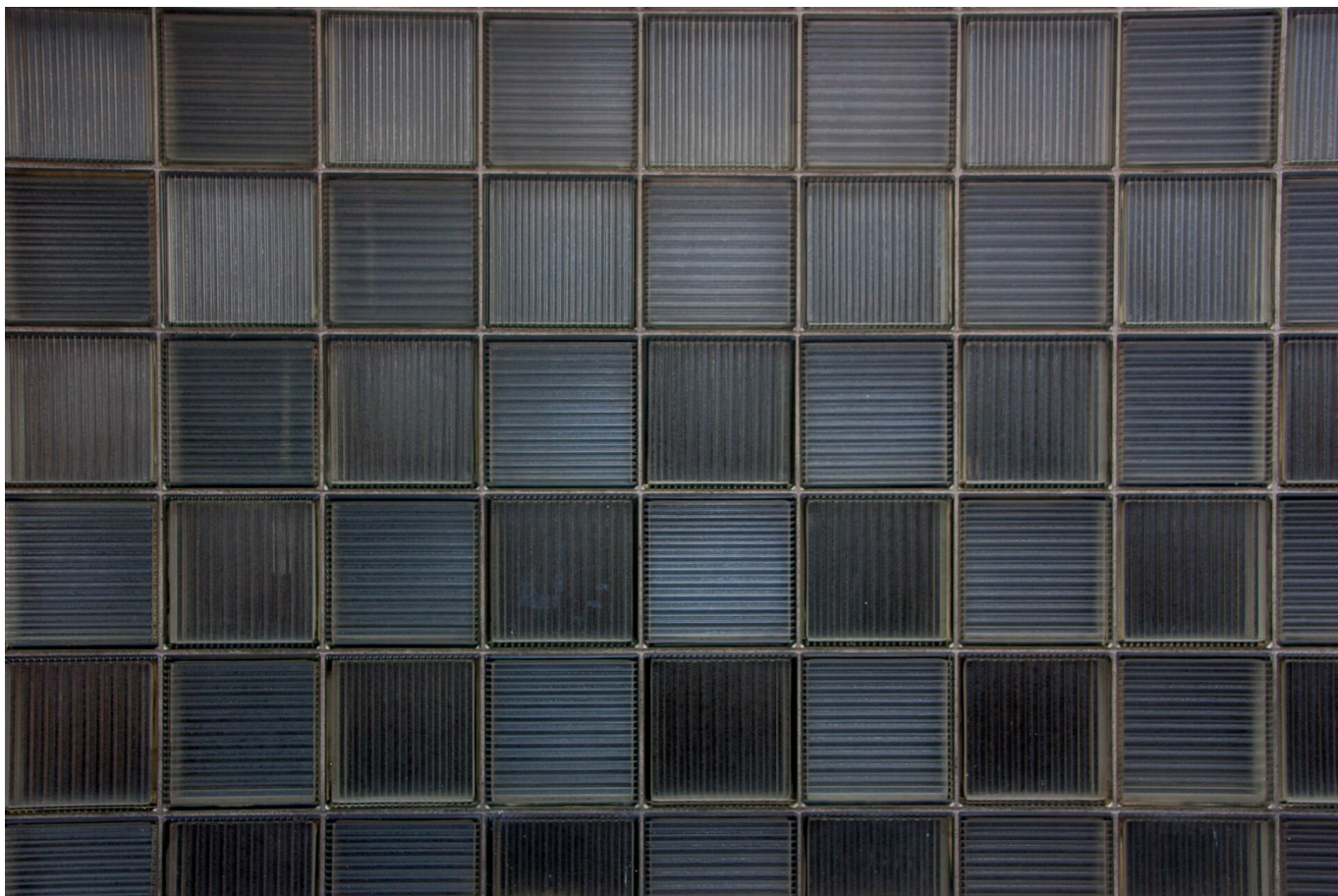




Podobieństwo czworokątów

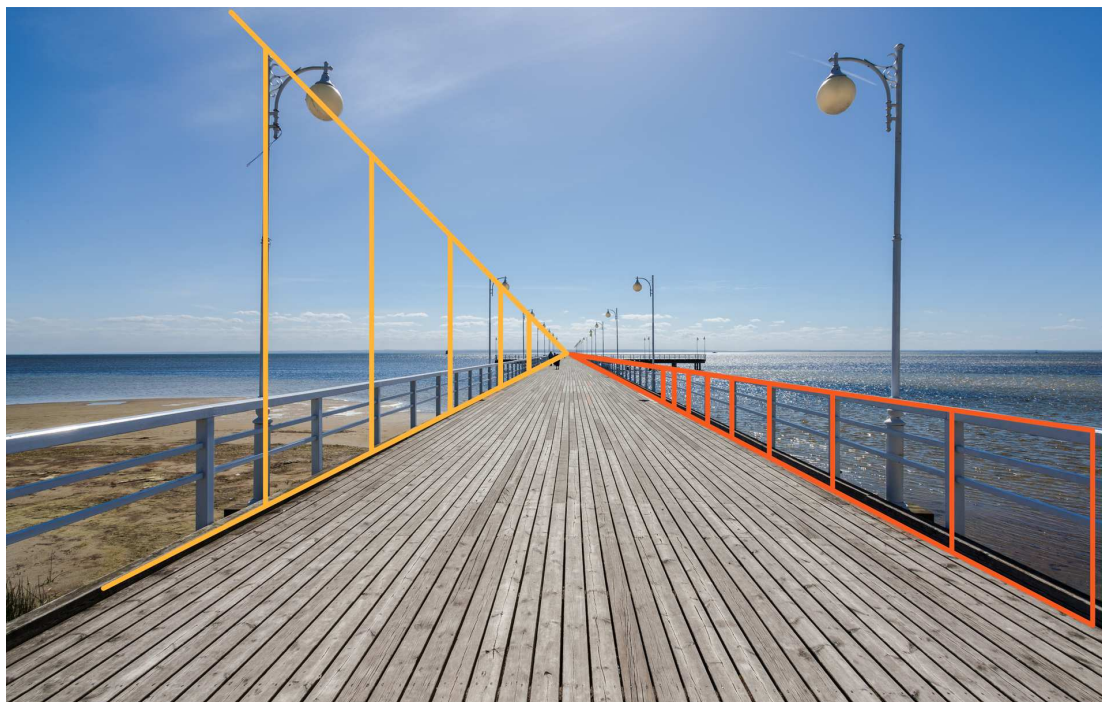
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Podobieństwo czworokątów

Źródło: dostępny w internecie: [LuAnn Hunt](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Perspektywa w malarstwie to sposób uzyskania wrażenia głębi na płaskim rysunku. Linie poziome zbiegają się na horyzoncie a odcinki pionowe zmniejszają się proporcjonalnie do odległości, ale pozostają równoległe. Główną zasadą perspektywy jest to, że pionowe obiekty równej wysokości i równooddalone od siebie przekształcane są na trapezy podobne.

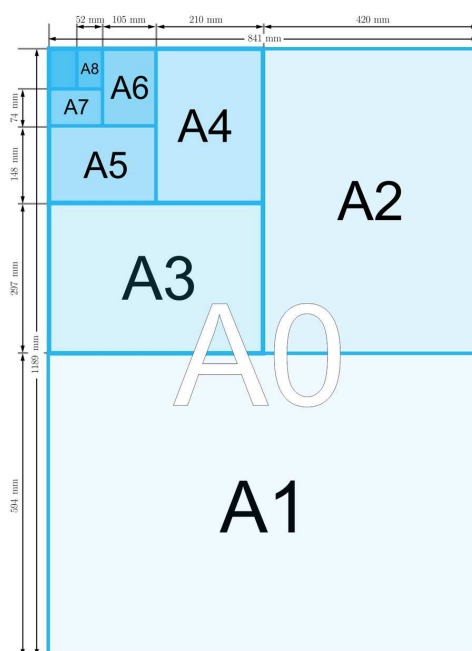


Molo w Juracie

Źródło: Wikipedia.org, dostępny w internecie: www.wikipedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Na obrazie przedstawiona jest fotografia molo w Juracie wraz z zaznaczonymi przykładowymi liniami zbiegającymi się na horyzoncie i odcinkami równoległymi.

Format arkusza – standardowe rozmiary arkusza papieru stosowane powszechnie w drukarniach i rysunku technicznym. Do oznaczenia formatu arkusza stosuje się standardowe nazewnictwo, na przykład *A4* oznacza wielkość kartki do drukarki, *A5* powstaje po złożeniu kartki *A4* na pół, wzdłuż dłuższego boku. Przedstawiane na rysunku prostokąty są podobne.



Podobieństwo czworokątów stosowane jest również w różnego rodzaju planach, odwzorowaniach, mapach.

Niniejszy materiał poświęcony jest określeniu cech, które pozwolą na rozstrzygnięcie czy dane czworokąty są podobne oraz wykorzystaniu podobieństwa czworokątów w sytuacjach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Twoje cele

- Zrozumiesz na czym polega podobieństwo figur.
- Poznasz warunki charakteryzujące czworokąty podobne.
- Poznasz i będziesz stosował własność pól figur podobnych. Zastosujesz je do skali map i planów budynków.
- Poznasz jak podobieństwo trapezów wykorzystuje się w perspektywie malarskiej.
- Zastosujesz podobieństwo czworokątów w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

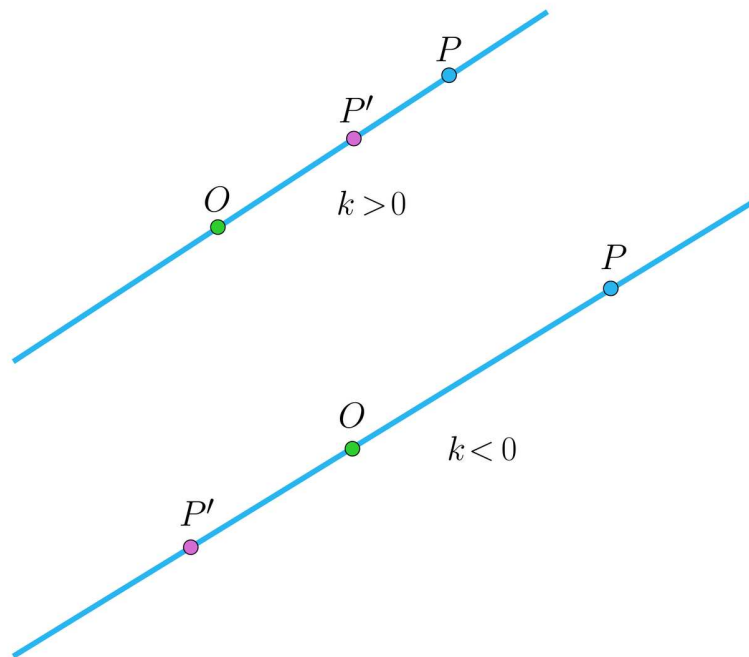
Przeczytaj

Często mówi się, że dwie figury są podobne, jeśli mają ten sam kształt, ale mogą różnić się rozmiarem. Jeśli figury są podobne i mają równe rozmiary, to wtedy mówi się, że są przystające.

Powyższa definicja jest niejednoznaczna, bo nie wiadomo co to jest kształt i co to jest rozmiar. Spróbujmy zatem uściślić definicję podobieństwa.

Powiemy, że figury są przystające, jeśli można dokładnie nałożyć jedną na drugą. Figury są podobne, jeśli jedną z nich możemy zmniejszyć lub zwiększyć proporcjonalnie przez **jednokładność** tak, żeby uzyskać figurę przystającą do drugiej.

Przypomnijmy definicję jednokładności. W tym celu popatrzmy na rysunek.



Obrazem punktu P w jednokładności o środku O i skali k jest punkt P' taki, że punkty O , P , P' są współliniowe i $|OP'| = |k| \cdot |OP|$, przy czym jeśli $k > 0$ to punkty P i P' są po tej samej stronie środka O , a jeśli $k < 0$, to punkty P i P' są po różnych stronach.

Ponadto, jeśli $|k| < 1$ to obraz figury jest mniejszy od figury, a gdy $|k| > 1$, to obraz figury jest większy od figury. Gdy $k = 1$, to obraz figury jest przystający do figury.

Twierdzenie: o własnościach jednokładności

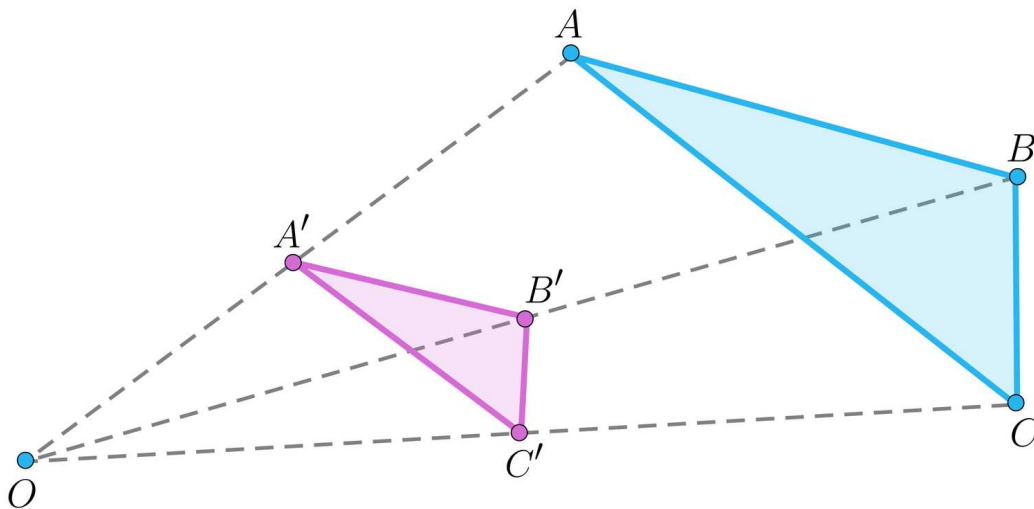
1. Obrazem odcinka AB w jednokładności o środku O i skali k jest odcinek $A'B'$ taki, że $|A'B'| : |AB| = |k|$, równoważnie $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

2. Jednokładność przekształca odcinek na równoległy do niego.
3. Jednokładność przekształca kąt na kąt o tej samej mierze.

Dowód

Do dowodu własności 1 – 3 w przypadku, gdy $k > 0$ zastosujemy twierdzenie Talesa i odwrotność twierdzenia Talesa.

Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC i jego obraz $A'B'C'$ w jednokładności o środku O i skali $k > 0$.



1. Z twierdzenia Talesa $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|} = \frac{k|OA|}{|A'B'|}$.

Stąd $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{k|OA|}{|OA|} = k$, co pokazuje własność 1.

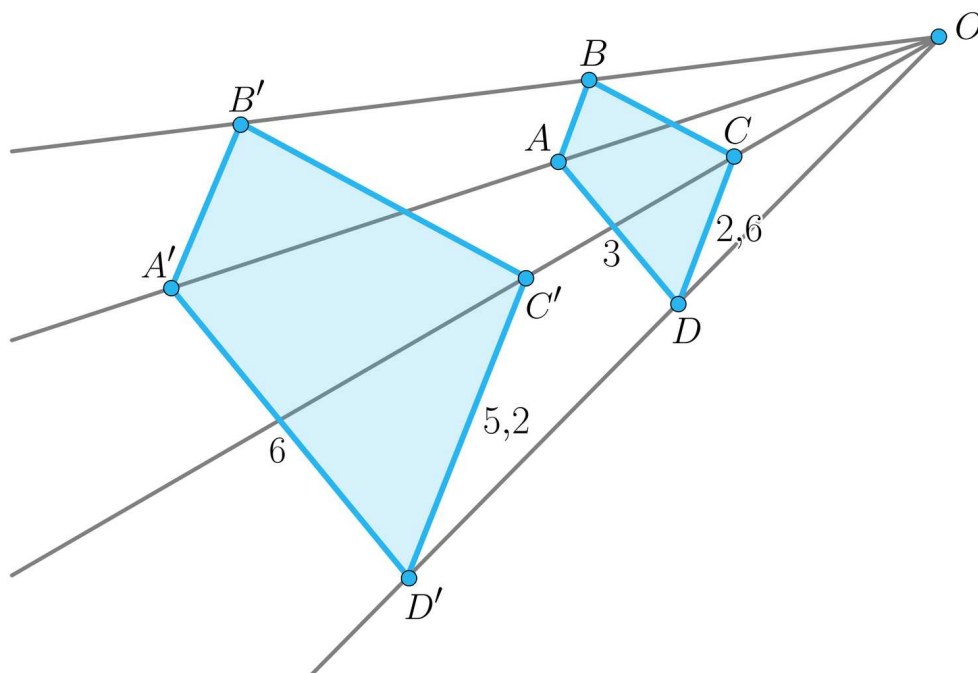
2. Aby pokazać własność 2 zauważmy, że $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{1}{k} = \frac{|OB|}{|OB'|}$, więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $A'B' \parallel AB$.

3. Niech α oznacza kąt przy wierzchołku A , a β – kąt przy wierzchołku A' . Ponieważ z 2 wynika, że $A'B' \parallel AB$ oraz $A'C' \parallel AC$, to kąty $OA'B'$ i OAB są równe jako kąty odpowiadające. Również kąty $OA'C'$ i OAC są odpowiadające, więc też równe. Stąd α i β są różnicami równych kątów, więc są równe.

W przypadku, gdy $k < 0$ stosujemy analogiczne rozumowanie z wykorzystaniem uogólnienia twierdzenia Talesa.

Przykład 1

Na rysunku czworokąt $A'B'C'D'$ jest obrazem czworokąta $ABCD$ w jednokładności o środku O .



Na podstawie długości boków podanych na rysunku wyznaczmy skalę jednokładności k .

Rozwiązanie

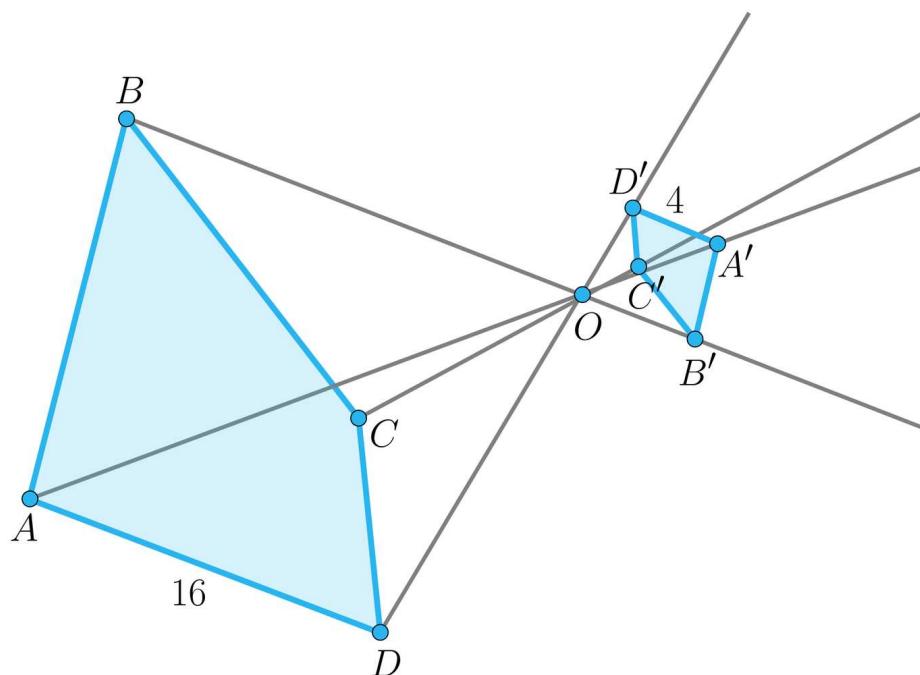
Obrazem odcinka AD długości 3 jest odcinek $A'D'$ długości 6.

Zatem skala jednokładności jest równa $k = \frac{6}{3} = 2$.

Oczywiście, wartość k można wyznaczyć z dowolnych dwóch odpowiednich odcinków, na przykład na rysunku podane są długości odcinka CD i jego obrazu $C'D'$. Wtedy $k = \frac{5,2}{2,6} = 2$.

Przykład 2

Na rysunku czworokąt $A'B'C'D'$ jest obrazem czworokąta $ABCD$ w jednokładności o środku O .



Na podstawie długości boków podanych na rysunku wyznaczmy skalę jednokładności k .

Rozwiązanie

Obliczamy stosunek długości odpowiadających sobie boków: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Teraz zauważamy, że czworokąt i jego obraz leżą po różnych stronach środka O , więc skala jednokładności jest ujemna. Stąd $k = -\frac{1}{4}$.

Własność: odcinków i kątów w czworokątach podobnych

Jeśli czworokąty są podobne w skali k , to:

1. stosunki odpowiednich odcinków są równe skali k ;
2. kąty między odpowiednimi odcinkami w czworokącie są równe.

Dowód

Zgodnie z definicją figur podobnych, figury są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy można je tak ułożyć na płaszczyźnie i znaleźć taki środek jednokładności, żeby były jednokładne. Zatem dowód tych własności sprowadzimy do wykorzystania własności jednokładności.

Z własności 3. jednokładności wynika, że kąty przekształcane są na kąty równej miary, a własność 1. jednokładności mówi, że stosunki odpowiednich boków są równe skali podobieństwa. To pokazuje, że jeśli czworokąty są podobne, to mają równe odpowiednie kąty oraz równe stosunki odpowiednich boków.

Własność: relacji podobieństwa

1. Jeżeli figura F_1 jest podobna do figury F_2 , to stosunki odpowiednich odcinków a_1 i a_2 w tych figurach są równe. Stosunek $k = \frac{a_1}{a_2}$ nazywamy skalą podobieństwa figury F_1 do figury F_2 .
2. Każda figura jest podobna do siebie.
3. Relacja podobieństwa jest symetryczna, to znaczy, że jeśli jedna figura jest podobna do drugiej, to druga figura jest też podobna do pierwszej.
4. Jeśli jedna figura jest podobna do drugiej w skali k , to druga figura jest podobna do pierwszej w skali $\frac{1}{k}$.
5. Relacja podobieństwa jest przechodnia, to znaczy, jeżeli jedna figura podobna jest do drugiej, a druga figura podobna do trzeciej, to również pierwsza figura podobna jest do trzeciej.
6. Jeśli jedna figura jest podobna do drugiej w skali k , a druga figura jest podobna do trzeciej w skali l , to pierwsza figura jest podobna do trzeciej w skali $k \cdot l$.

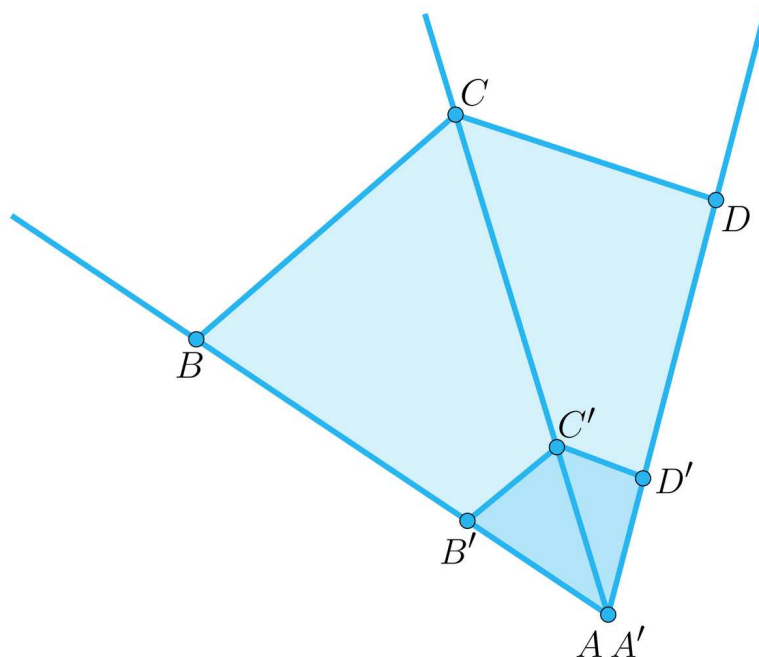
Twierdzenie: o podobieństwie czworokątów

1. Czworokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie kąty oraz równe stosunki odpowiednich boków.
2. Czworokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy stosunki odpowiednich boków i stosunki odpowiednich przekątnych są równe.

Dowód

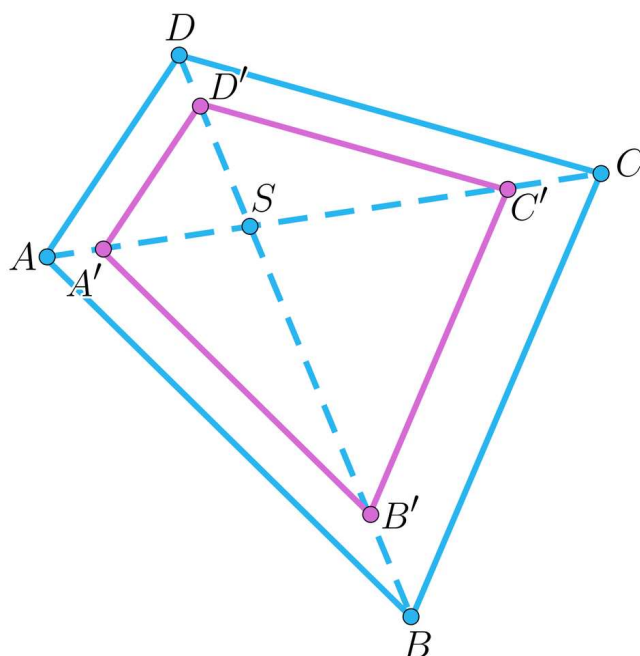
Korzystając z własności odcinków i kątów w czworokątach podobnych dostajemy, że jeśli czworokąty są podobne to stosunki odpowiednich boków i przekątnych są równe oraz kąty między bokami w czworokącie są równe.

1. Aby pokazać, że zachodzi własność odwrotna, że jeżeli wielokąty mają równe odpowiednie kąty oraz równe stosunki odpowiednich boków, to są podobne, ułożmy czworokąty tak, żeby miały wspólny wierzchołek i kąt przy tym wierzchołku, a odpowiadające boki miały wspólne ramię tego kąta jak na rysunku.



W ten sposób dostajemy jednokładność tych czworokątów o środku we wspólnym wierzchołku i skali równej stosunkowi odpowiednich boków.

2. Załóżmy, że stosunki odpowiednich boków i przekątnych dwóch czworokątów są równe.



Z założenia, stosunki boków AB do $A'B'$ oraz AD do $A'D'$ w trójkącie ABD i odpowiadającym mu trójkącie $A'B'C'$ są równe, i są równe też stosunkowi przekątnej BD i odpowiadającej jej przekątnej $B'D'$. To na mocy [cechy podobieństwa b-b-b](#) dowodzi, że trójkąty ABD i $A'B'D'$ są podobne. Stąd odpowiednie kąty w tych

trójkątach są równe. To samo rozumowanie prowadzi do wniosku, trójkąt BCD i odpowiadający mu trójkąt są podobne, więc mają równe odpowiednie kąty. Wtedy kąt przy wierzchołku D jako suma kątów trójkątów ABD i BCD jest równy odpowiadającemu mu kątowi w drugim czworokącie. W podobny sposób pokazuje się dla pozostałych kątów.

Przykład 3

Pokażemy, że równe stosunki odpowiednich boków nie wystarczą do pokazania podobieństwa czworokątów.

Rozwiązanie

Wystarczy wziąć romb, który nie jest kwadratem i kwadrat o takich samych długościach boków. Czworokąty te mają równe boki, ale odpowiednie kąty nie są równe.

Przykład 4

Pokażemy, że równość miar odpowiednich kątów nie wystarczy do pokazania podobieństwa czworokątów.

Rozwiązanie

Wystarczy wziąć kwadrat i prostokąt, który nie jest kwadratem. Czworokąty te mają równe kąty, ale stosunki odpowiednich boków nie są równe.

Przy ocenie czy czworokąty są podobne stawiamy przed problemem określenia co to znaczy, że kąty i boki są odpowiednie. Należy dopasowywać boki i kąty poprzez szukanie cech charakterystycznych, na przykład porównujemy boki po uporządkowaniu w kolejności malejącej. Można również wziąć dłuższą/ krótszą przekątną, wysokości itp. Ważna jest też równoległość i prostopadłość boków i innych odcinków w czworokącie.

Przykład 5

Czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne. Boki czworokąta $ABCD$ mają długości 8, 4, 16 i 12 centymetrów. Najdłuższy bok czworokąta $A'B'C'D'$ ma 20 cm.

Wyznamy długości pozostałych boków czworokąta $A'B'C'D'$.

Rozwiązanie

Najdłuższy bok czworokąta $ABCD$ ma długość 16 cm i odpowiada on najdłuższemu bokowi czworokąta $A'B'C'D'$ o długości 20 cm.

Stosunek tych boków wynosi $k = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$. Stąd stosunek pozostałych boków też jest równy k , więc boki czworokąta $A'B'C'D'$ zapisane w kolejności malejącej mają długości: $20, 12 \cdot \frac{5}{4} = 15, 8 \cdot \frac{5}{4} = 10, 4 \cdot \frac{5}{4} = 5$ centymetrów.

Własność: równoległoboków podobnych

Równoległobok o bokach $a \geq b$ jest podobny do równoległoboku o bokach $c \geq d$ wtedy i tylko wtedy, gdy mają przynajmniej jeden kąt równy i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Dowód

Jeśli znamy jeden z kątów równoległoboku, to potrafimy jednoznacznie wyznaczyć pozostałe kąty, więc kryterium równości kątów jest spełnione. Jeśli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to po przekształceniu tej proporcji mamy $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Stąd stosunki odpowiednich boków są równe.

Przykład 6

Pokażemy, że romby, które mają przynajmniej jeden kąt równy są podobne.

Rozwiązanie

Rzeczywiście, romby mają równe boki, więc stosunek boków w dowolnym rombie jest 1. Informacja o równości przynajmniej jednego kąta prowadzi do wyznaczenia pozostałych kątów. Ostatecznie, z własności [równoległoboków](#) podobnych, takie romby są podobne.

Własność: prostokątów podobnych

Prostokąt o bokach $a \geq b$ jest podobny do prostokąta o bokach $c \geq d$ jeśli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Dowód

Prostokąty mają wszystkie kąty równe, więc kryterium równości kątów jest spełnione. Równość stosunków odpowiednich boków wynika z własności [równoległoboków](#) podobnych.

Przykład 7

Mamy do wyboru dwa telewizory, oba w rozdzielczości 3840×2160 px. Mniejszy ma przekątną 55 cali a większy – 65 cali. Pokażemy, że ekrany obu telewizorów są podobnymi [prostokątami](#) oraz wyznaczmy skalę podobieństwa k .

Rozwiązanie

Rozdzielczość ekranu 3840×2160 px mówi, że jest 3840 pikseli w każdej linii, a linii tych jest 2160. Przyjmujemy, że piksel jest małym kwadracikiem.

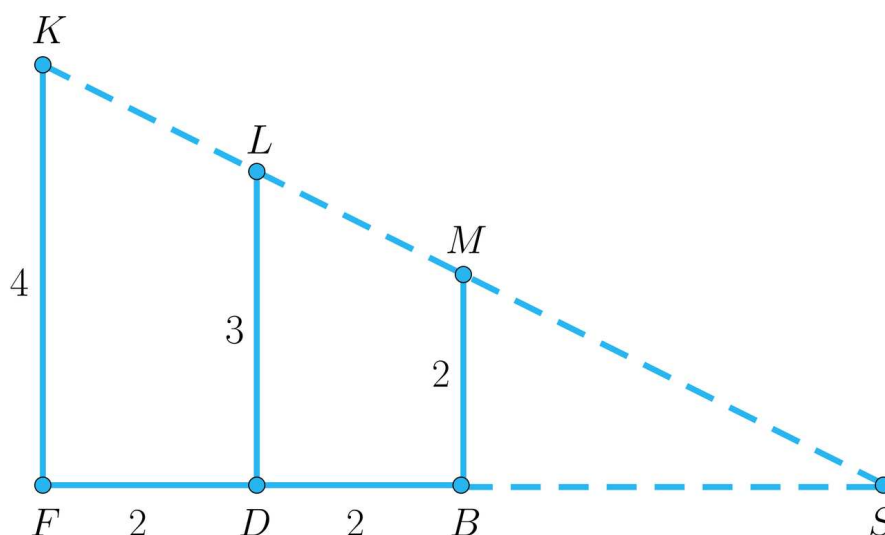
Zatem rozdzielczość mówi o proporcji obrazu, czyli o stosunku boku dłuższego do krótszego.

Stąd ekrany tych telewizorów są podobne w skali $k = \frac{55}{65} = \frac{11}{13}$.

Przykład 8

Główną zasadą perspektywy w malarstwie (zobacz rysunek z wprowadzenia do tego materiału) jest to, że rzeczywiste pionowe obiekty równej wysokości i równooddalone od siebie, czyli tworzące przystające prostokąty, przekształcane są na **trapezy** podobne. Załóżmy, że latarnie FK , DL , BM mają w rzeczywistości równe wysokości.

Na rysunku wykonanym zgodnie z zasadami perspektywy w malarstwie, otrzymaliśmy trapezy o podstawach 2, 3, 4.



Pokażemy, że w rzeczywistości odległość między latarniami K i L jest inna niż między L i M .

Rozwiązanie

Gdyby odległości między latarniami K i L oraz L i M były równe, to trapezy $KLDL$ oraz $LMBM$ byłyby podobne. Wtedy stosunki odpowiednich boków, w szczególności podstaw trapezów byłyby równe.

Obliczmy $\frac{|KF|}{|LD|} = \frac{4}{3}$, $\frac{|LD|}{|MB|} = \frac{3}{2}$. Te stosunki nie są równe, więc w rzeczywistości odległość między latarniami K i L jest inna niż między L i M .

Związek podobieństwa czworokątów z ich polem

Twierdzenie: o polu czworokątów podobnych

Jeżeli czworokąty są podobne w skali k , to stosunek ich pól jest równy k^2 .

Dowód

Pokażemy wpierw, że jeśli trójkąty są podobne w skali k , to stosunek ich pól jest równy k^2 .

Jeśli wysokość i podstawę jednego trójkąta oznaczmy symbolami h , a , to drugi trójkąt ma wysokość i podstawę kh i ka . Stosunek ich pól jest równy $\frac{\frac{kh \cdot ka}{2}}{\frac{ha}{2}} = \frac{k^2 ha}{ha} = k^2$.

Teraz dzielimy dany czworokąt jedną z przekątnych na dwa trójkąty i odpowiednią przekątną dzielimy czworokąt podobny na dwa trójkąty o polach P_1 , P_2 . Wtedy odpowiednie trójkąty powstałe w ten sposób są podobne, więc ich pola są równe $k^2 P_1$, $k^2 P_2$.

Wyznaczamy stosunek pól czworokątów $\frac{k^2 P_1 + k^2 P_2}{P_1 + P_2} = \frac{k^2 (P_1 + P_2)}{P_1 + P_2} = k^2$.

Przykład 9

Na planie w skali 1 : 100 obraz pokoju jest prostokątem o bokach 3 cm na 4 cm, a pole powierzchni obrazu kuchni w kształcie trapezu wynosi 8 cm².

Wyznamy wymiary i powierzchnię pokoju oraz powierzchnię kuchni.

Rozwiązanie

Skalą podobieństwa jest $k = \frac{1}{100}$. Skala ta mówi, że wymiary pomieszczeń zostały 100 razy zmniejszone i narysowane na planie.

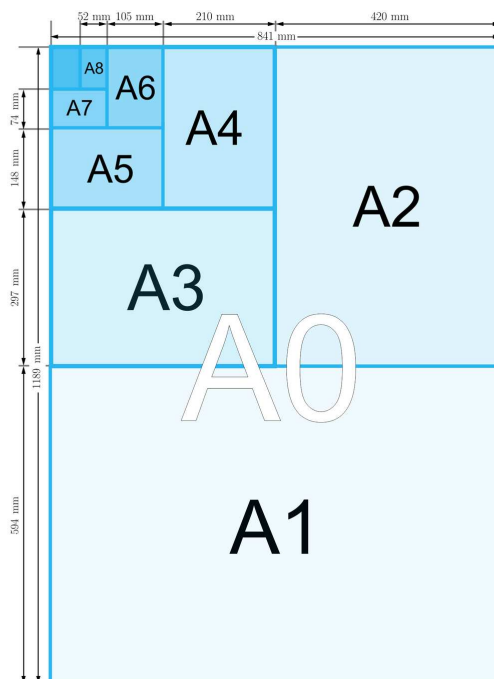
Stąd wymiary pokoju wynoszą $100 \cdot 3 = 300$ cm = 3 m oraz $100 \cdot 4 = 400$ cm = 4 m, a pole powierzchni $3 \cdot 4 = 12$ m².

Obraz kuchni ma pole 8 cm², więc powierzchnia kuchni wynosi

$$8 \cdot 100^2 = 80000 \text{ cm}^2 = 8 \text{ m}^2.$$

Przykład 10

Standardowe rozmiary arkusza papieru opisywane są symbolami A0, A1, ... (zobacz rysunek)



Kartka do drukarki ma rozmiar $A4$, arkusz papieru kancelaryjnego ma rozmiar $A3$.

$A5$ powstaje po złożeniu kartki $A4$ na pół, wzdłuż krótszego boku. Wszystkie arkusze A_i są prostokątami podobnymi.

Wyznamy skalę podobieństwa arkuszy oznaczanych kolejnymi liczbami, symbolicznie A_i oraz A_{i+1} .

Rozwiązanie

Pole prostokąta A_i jest dwa razy większe niż pole prostokąta A_{i+1} . Stąd stosunek pola A_i do pola A_{i+1} jest równy 2.

Z własności pola figur podobnych $k^2 = 2$, więc $k = \sqrt{2}$.

Stąd A_i jest podobny do A_{i+1} w skali $k = \sqrt{2}$.

Przykład 11

Arkusz $A4$ ma wymiary $210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$. Wyznamy wymiary arkusza $A5$.

Rozwiązanie

Ponieważ wyliczyliśmy w poprzednim przykładzie, że A_i jest podobny do A_{i+1} w skali $k = \sqrt{2}$, to $A4$ jest podobny do $A5$ w skali $k = \sqrt{2}$.

Natomiast $A5$ jest podobny do $A4$ w skali $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Zatem wymiary arkusza $A5$ to $\frac{210}{\sqrt{2}}$ i $\frac{297}{\sqrt{2}}$.

Ze względów praktycznych wymiary arkusza podaje się w pełnych milimetrach, więc zastosujemy przybliżoną wartość $\sqrt{2} = 1,414213562$.

Wtedy przybliżone wymiary arkusza A5 to $\frac{210}{1,414213562} = 148$ mm i $\frac{297}{1,414213562} = 210$ mm.

Uwaga!

Nie trzeba było w ten sposób wyliczać wymiarów arkusza A5, tylko pomyśleć praktycznie.

Skoro A5 powstaje z A4 przez złożenie A4 na połowę wzdłuż krótszego boku, to krótszy bok A5 ma długość $\frac{1}{2} \cdot 297 \approx 148$ mm, a dłuższy bok A5 ma długość 210 mm.

Przykład 12

Wyznamy skalę podobieństwa arkusza A2 do A4.

Rozwiązanie

Ponieważ A2 jest podobny do A3 w skali $k = \sqrt{2}$ oraz A3 jest podobny do A4 w skali $k = \sqrt{2}$. To z własności relacji podobieństwa A2 jest podobny do A4 w skali $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Słownik

jednokładność

o środku O i skali $k \neq 0$ jest to przekształcenie płaszczyzny, które dowolnemu punktowi P przyporządkowuje taki punkt P' , że $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.

cechy podobieństwa trójkątów

warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne

trapez

czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych

równoległobok

czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych

prostokąt

czworokąt, który ma wszystkie kąty proste

kwadrat

czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste

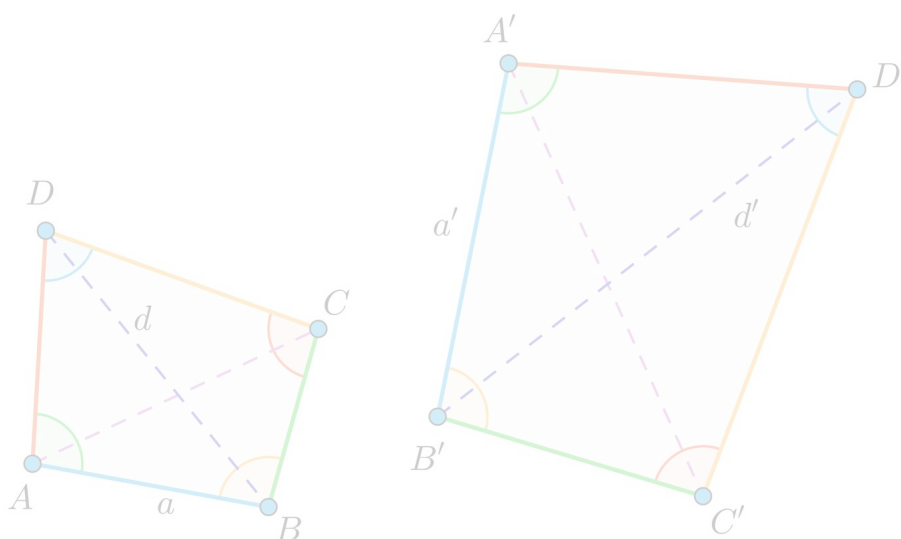
romb

czworokąt, który ma wszystkie boki równe

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Na ekranie widać dwa czworokąty podobne.
2. Poruszaj suwakiem w celu wybrania skali podobieństwa.
3. W jednym z czworokątów można zmieniać położenie wierzchołków. Drugi pojawia się automatycznie jako podobny do pierwszego w podanej skali.
4. Obserwuj zależność: skala k , długość boku, pole. Zwróć uwagę, że obliczenia wykonane są z pewnym przybliżeniem.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DWVnvJ9bn>

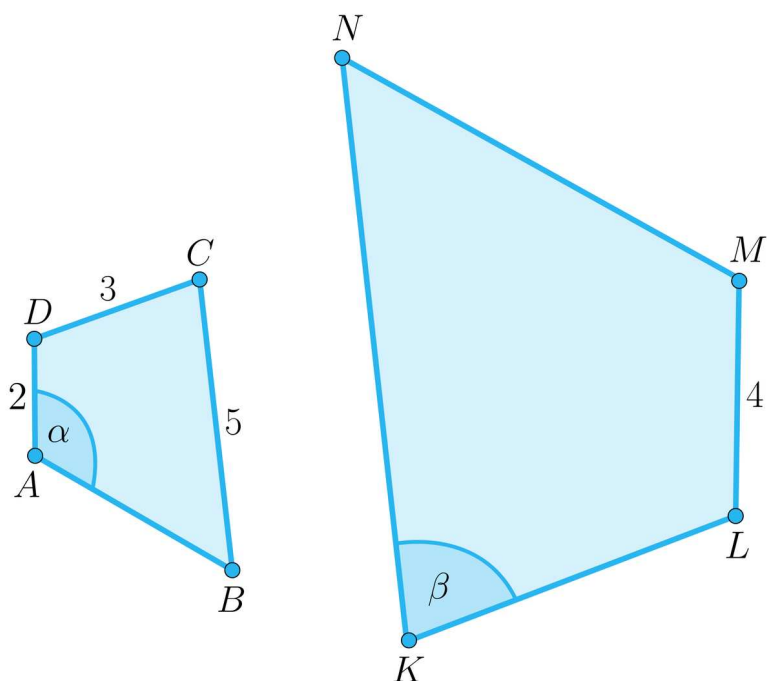
Polecenie 2

Czworokąty $F1$ i $F2$ są podobne. Oceń prawdziwość zdań, zaznaczając przy każdym odpowiednio prawdę lub fałsz.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Jeżeli $F1$ jest równoległobokiem to $F2$ też jest równoległobokiem.	☐	☐
Jeżeli $F1$ nie jest rombem to $F2$ też nie jest rombem.	☐	☐
Jeżeli $F1$ ma bok długości 7 to $F2$ też ma bok długości 7.	☐	☐
Jeżeli $F1$ nie ma boku długości 7 to $F2$ też nie ma boku długości 7.	☐	☐
Jeżeli $F1$ ma kąt o mierze 55° to $F2$ też ma kąt o tej mierze.	☐	☐

Polecenie 3

Na rysunku dane są czworokąty podobne.



Wskaż poprawną odpowiedź.

Skala podobieństwa czworokąta $ABCD$ do czworokąta $KLMN$ wynosi:

☐ 2.

☐ 3.

☐ 5.

☐ 4.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

Dany jest trapez i jego dwa kąty mają miary 80° i 110° . Nie może być podobny do tego trapezu trapez z kątami:

☐ 80° i 90° .

☐ 80° i 70° .

☐ 80° i 100° .

☐ 80° i 80° .

Ćwiczenie 2



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Na mapie pewnego obszaru wykonanej w skali 1 : 100 000 odległość między dwoma miastami wynosi 14,1 cm. Rzeczywista odległość między tymi miastami wynosi:

☐ 141 km.

☐ 1410 m.

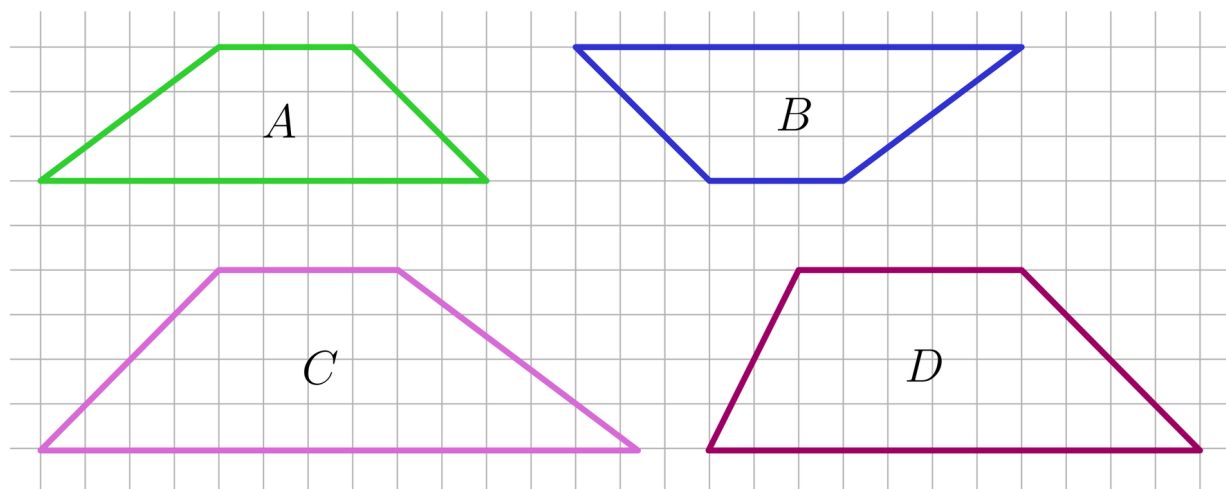
☐ 14,1 km.

☐ 1410 km.

Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź.



Który z trapezów nie jest podobny do pozostałych?

☐ B

☐ C

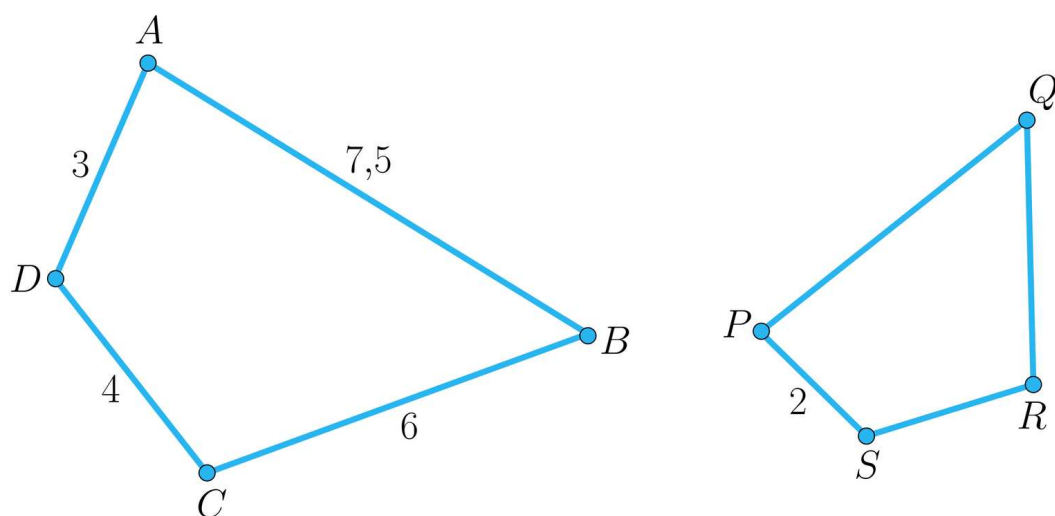
☐ D

☐ A

Ćwiczenie 4



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Czworokąty na rysunku są podobne.



Czworokąty na rysunku są podobne. Ile wynosi długość PQ ?

☐ 3,75

☐ 2,67

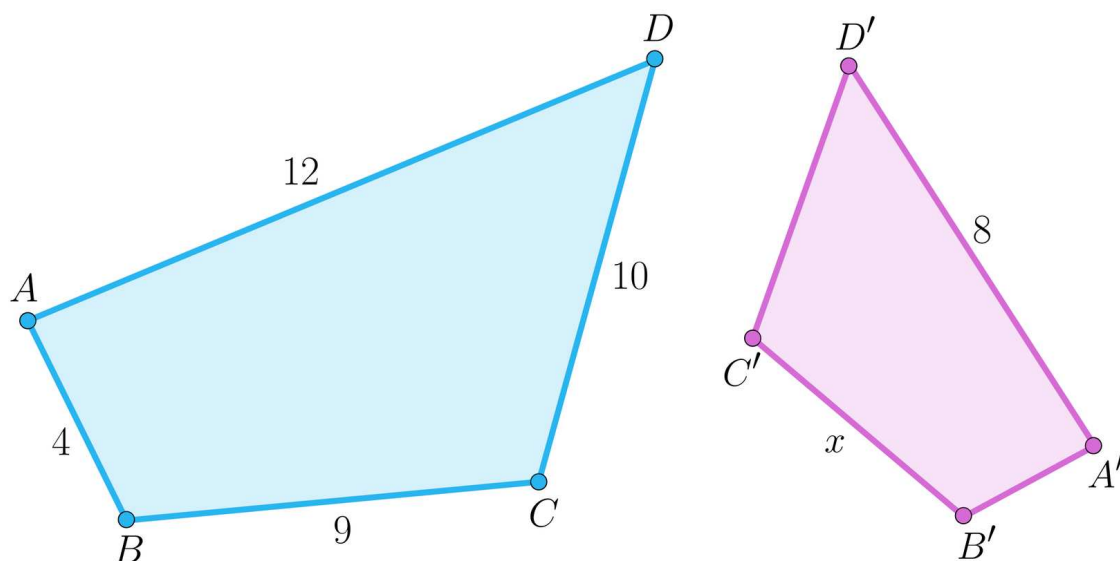
☐ 4

☐ 5

Ćwiczenie 5



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Czworokąty na rysunku są podobne.



Ile wynosi długość x ?

☐ $\frac{8}{3}$

☐ 5

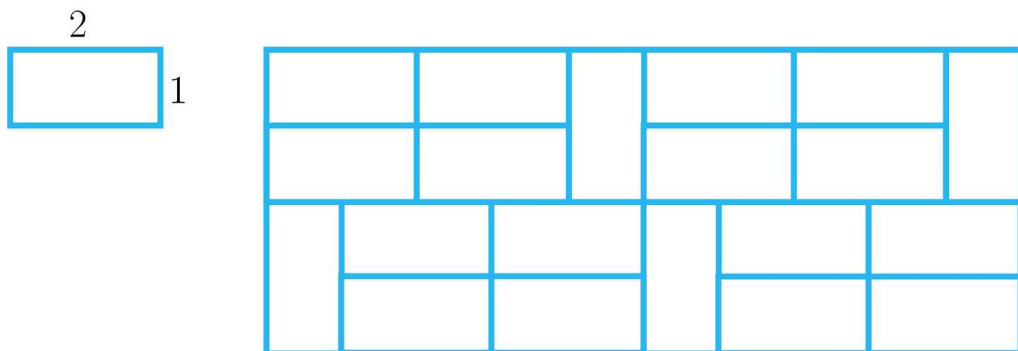
☐ $\frac{20}{3}$

☐ 6

Ćwiczenie 6



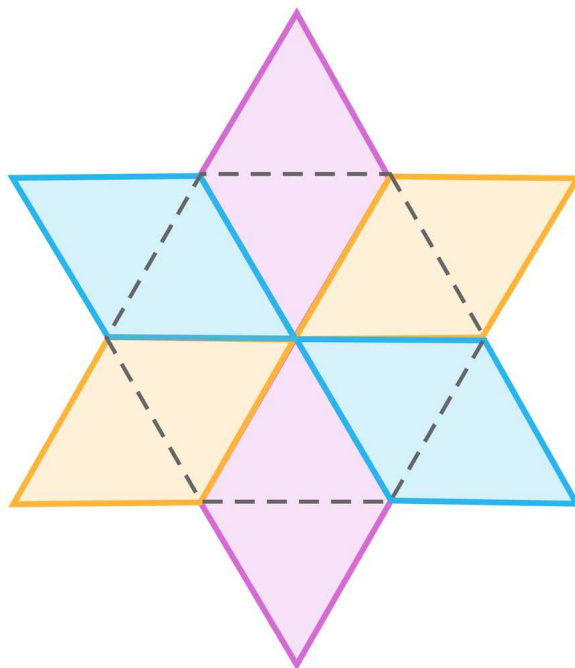
Ile na rysunku jest prostokątów podobnych do podanego prostokąta o bokach 2 i 1?



Ćwiczenie 7



Ile jest rombów podobnych do rombu niebieskiego na rysunku?



Dla dociekliwych: Poszukaj innych czworokątów podobnych.

Ćwiczenie 8

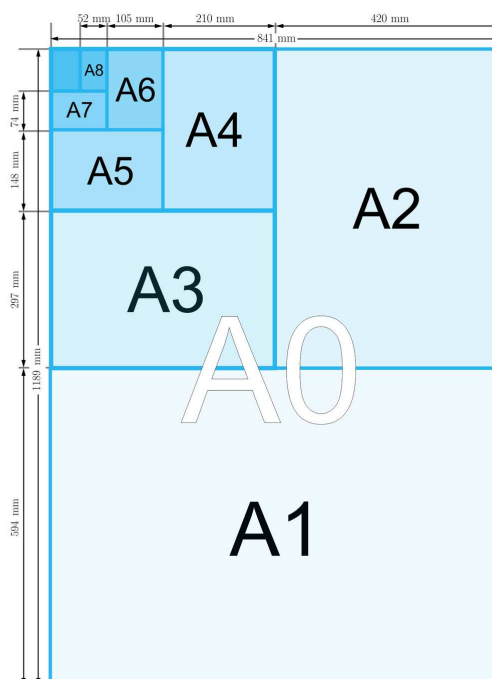


Czworokąt $F1$ jest podobny do czworokąta $F2$ w skali 3. Różnica pól tych czworokątów wynosi 120. Oblicz pole każdego z tych czworokątów.

Ćwiczenie 9



Na rysunku przedstawiono standardowe nazewnictwo arkuszy papieru.

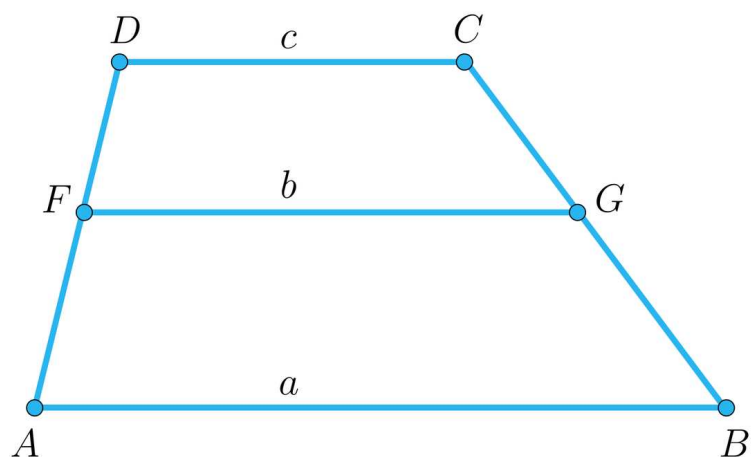


1. Wyznacz skalę podobieństwa $A0$ do $A5$.
2. Wyznacz pole arkusza $A3$ w metrach kwadratowych, jeśli wiadomo, że $A0$ ma wymiary $841 \text{ mm} \times 1189 \text{ mm}$.

Ćwiczenie 10



Na rysunku przedstawione są 3 trapezy.



Wykaż, że jeśli trapez $ABGF$ jest podobny do trapezu $FGCD$, to podstawa b jest średnią geometryczną podstaw a i c .

Dla nauczyciela

Autor: Bożena Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Podobieństwo czworokątów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje podobieństwo figur w oparciu o przekształcenie w jednokładności w danej skali,
- zna twierdzenie o czworokątach podobnych
- zna i stosuje własności relacji podobieństwa,

- rozpoznaje czworokąty podobne i uzasadnia dlaczego dane czworokąty nie są podobne
- poznaje zastosowanie podobieństwa trapezów w perspektywie malarskiej
- stosuje własności podobieństwa w danej skali do obliczania stosunku pól figur podobnych
- wykorzystuje podobieństwo czworokątów w rozwiązywaniu zadań i w problemach praktycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm
- kognitywizm

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka
- interaktywna aplikacja
- analiza pomysłów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg zajęć:

Faza wstępna:

- Nauczyciel inicjuje dyskusję na temat definicji figur podobnych – związek z jednokładnością i przystawaniem.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przypomina przekształcenie w jednokładności w danej skali i jego związek z podobieństwem w danej skali.
2. Nauczyciel omawia własności relacji podobieństwa.
3. Uczniowie wspólnie formułują cechy podobieństwa czworokątów w wersji ogólnej i w odniesieniu do szczególnych rodzajów czworokątów.
4. Nauczyciel przedstawia własności perspektywy malarskiej i jej związek z podobieństwem trapezów.

5. Nauczyciel pokazuje zastosowanie skali planu i mapy oraz ich związków z wymiarami i polem czworokątów.
6. Uczniowie wykorzystując symulację interaktywną rozpoznają odpowiednie boki i odpowiednie kąty w czworokątach podobnych.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie sprawdzają nabyte umiejętności i wiedzę wykonując ćwiczenia w sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa

Uczniowie znajdują w internecie obraz lub zdjęcie z widoczną perspektywą malarską. Na podstawie tego obrazu wskazują 3 obiekty, które w rzeczywistości mają tę samą wysokość i równe odległości dwóch skrajnych od środkowego.

Materiały pomocnicze:

[Kąty wewnętrzne w czworokątach podobnych](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać symulację na lekcji o figurach podobnych.