# Zadania tekstowe geometryczne prowadzące do rozwiązywania równań wielomianowych

# Zadania tekstowe geometryczne prowadzące do rozwiązywania równań wielomianowych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Równania wielomianowe bardzo często wykorzystuje się jako narzędzie do rozwiązywania problemów z innych dziedzin wiedzy, na przykład z geometrii.

W tym materiale będziesz rozwiązywać zadania ze stereometrii, których rozwiązanie sprowadza się do obliczenia pierwiastków równania wielomianowego i wybraniu takiego rozwiązania, które spełnia warunki zadania.

**Twoje cele**

- Zapiszesz i rozwiążesz równanie wielomianowe opisujące zależności między danymi.
- Ustalisz współczynniki równania wielomianowego tak, aby równanie opisywało sytuację przedstawioną w zadaniu.
- Dobierzesz równanie do treści zadania.

# Przeczytaj

**Przykład 1**

Wyznaczymy wymiary prostopadłościennego pudełka o podstawie kwadratu, jeżeli krawędź boczna jest o $4 \ \text{cm}$ dłuższa od krawędzi podstawy, a objętość prostopadłościanu jest równa $128 \ \text{cm}^3$.

Niech:
$x$ – długość krawędzi podstawy (cm),
$x+4$ – długość wysokości prostopadłościanu (cm).

$x \cdot x \cdot (x+4) = 128$

$x^2(x+4) = 128, \quad x > 0$

$x^3 + 4x^2 - 128 = 0$

Aby zastosować metodę grupowania wyrazów, zapiszemy równanie w postaci równoważnej.

$x^3 - 4x^2 + 8x^2 - 128 = 0$

$x^2(x-4) + 8\left(x^2 - 16\right) = 0$

$x^2(x-4) + 8(x-4)(x+4) = 0$

$(x-4)\left[x^2 + 8(x+4)\right] = 0$

$(x-4)\left(x^2 + 8x + 32\right) = 0$

$x - 4 = 0$ lub $x^2 + 8x + 32 = 0$

$x = 4$ i $\Delta = 64 - 4 \cdot 32 = 64 - 128 = -64 < 0$

Brak rozwiązań.

Pudełko prostopadłościenne ma wymiary $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 8 \ \text{cm}$.

**Przykład 2**

Mały prostopadłościenny karton na mleko ma pojemność $0,48$ l. Krawędzie podstawy różnią się o $3 \ \text{cm}$, a wysokość kartonu jest o $7 \ \text{cm}$ dłuższa od krótszego boku podstawy. Obliczymy, jakie wymiary ma to prostopadłościenne opakowanie.

Niech:
$x$ – długość krótszej podstawy prostopadłościanu (cm),
$x + 3$ – długość dłuższej podstawy prostopadłościanu (cm),
$x + 7$ – wysokość prostopadłościanu (cm),
$0,48$ l – objętość prostopadłościanu.

Aby w równaniu były takie same jednostki zamienimy objętość bryły na $\mathrm{cm}^3$.

$0,48\ \mathrm{l} = 0,48\ \mathrm{dm}^3 = 480\ \mathrm{cm}^3$

Zapiszemy i rozwiążemy równanie.

$x(x+3)(x+7) = 480$

$x\left(x^2 + 10x + 21\right) = 480$

$x^3 + 10x^2 + 21x - 480 = 0$

Poszukamy dodatniego pierwiastka wielomianu $W(x) = x^3 + 10x^2 + 21x - 480$.

Mogą to być liczby, które są dzielnikami wyrazu wolnego $(-480)$. Jest wiele takich liczb. Zacznijmy od liczby $2$.

$W(2) = 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 - 480 = 8 + 40 + 42 - 480 = -390 < 0$

$W(5) = 5^3 + 10 \cdot 5^2 + 21 \cdot 5 - 480 = 125 + 250 + 105 - 480 = 0$

Liczba 5 jest pierwiastkiem wielomianu. Zatem korzystając z twierdzenia Bezoute'a wielomian ten jest podzielny przez dwumian $(x - 5)$. W wyniku dzielenia otrzymujemy wielomian $x^2 + 15x + 96$.

Równanie możemy zapisać w postaci:

$(x-5)\left(x^2 + 15x + 96\right) = 0$

$x - 5 = 0$ lub $x^2 + 15x + 96 = 0$

$x = 5$ i $\Delta = (15)^2 - 4 \cdot 96 = 225 - 384 = -159 < 0$

Brak rozwiązań.

$x + 3 = 8$

$x + 7 = 12$

Prostopadłościenny karton o objętości $0,48$ l ma wymiary $5\ \mathrm{cm} \times 8\ \mathrm{cm} \times 12\ \mathrm{cm}$.

**Przykład 3**

Suma wszystkich  krawędzi akwarium w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $32$ dm. Obliczymy wymiary akwarium, jeśli jego  pojemność jest równa 16 l, a długości krawędzi wyrażaja się liczbami naturalnymi.

Niech:
$x$, gdzie $x > 0$ – długość krawędzi podstawy akwarium (dm),
$h$, gdzie $h > 0$ – wysokość akwarium (dm),
16 l – objętość akwarium.

Graniastosłup prawidłowy czworokątny ma łącznie 8 krawędzi podstawy oraz 4 krawędzie boczne (wysokości). Zatem możemy zapisać równanie:

$8x + 4h = 32 \ \ |:4$

$2x + h = 8$

$h = 8 - 2x$  i $h > 0$

$8 - 2x > 0$

$x < 4$, czyli $x \in (0, 4)$

$V = P_p \cdot h$

$x^2 \cdot (8 - 2x) = 16$

$8x^2 - 2x^3 = 16$

$-2x^3 + 8x^2 - 16 = 0$

$x^3 - 4x^2 + 8 = 0$

Niech $W(x) = x^3 - 4x^2 + 8$. Aby znaleźć dodatnie pierwiastki wielomianu zastosujemy twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

$p \in \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$

Ponieważ z treści zadania wynika, że pierwiastek musi być liczbą dodatnią, wiec sprawdzimy:

$W(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 8 = 1 - 4 + 8 = 5 \neq 0$

$W(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 8 = 8 - 16 + 8 = 0$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $V(x)$. Po podzieleniu wielomianu przez $(x - 2)$ otrzymujemy równanie:

$(x - 2)\left(x^2 - 2x - 4\right) = 0$

$x-2=0$ lub $x^2-2x-4=0$

$x=2$ lub $\Delta=4+16=20$

$x_1=\frac{2-2\sqrt{5}}{2}=1-\sqrt{5}\neq Z$

$x_2=\frac{2+2\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}\neq Z$

$h=8-2x$

$h=8-4$

$h=4$

Krawędź podstawy akwarium ma $2\ \text{dm}$, a wysokość $4\ \text{dm}$.

**Przykład 4**

Wyznaczymy wymiary świecy w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości $50\ \text{cm}^3$ jeżeli wiadomo, że krawędź podstawy jest o $1\ \text{cm}$ krótsza od wysokości świecy.

Niech:
$x$, gdzie $x>0$ – krawędź podstawy ostrosłupa (cm),
$x+1$ – wysokość ostrosłupa (cm).

Korzystając ze wzoru na objętość ostrosłupa otrzymujemy:

$\frac{1}{3}x^2\cdot(x+1)=50$

$x^3+x^2=150$

$x^3+x^2-150=0$

$x^3-5x^2+6x^2-150=0$

$x^2(x-5)+6\left(x^2-25\right)=0$

$x^2(x-5)+6(x-5)(x+5)=0$

$(x-5)\left(x^2+6x+30\right)=0$

$x-5=0$ lub $x^2+6x+30=0$

$x=5$

$\Delta=36-4\cdot30=-84<0$

Brak rozwiązań.

Podstawa świecy jest kwadratem o boku $5 \text{ cm}$, zaś jej wysokość jest równa $6 \text{ cm}$.

**Przykład 5**

Z kwadratowego arkusza kartonu o boku $8 \text{ cm}$ wycięto w narożnikach jednakowe kwadraty o boku, którego długość wyraża się liczbą całkowitą $x \text{ cm}$, a następnie sklejono i otrzymano prostopadłościenne, otwarte pudełko o objętości $36 \text{ cm}^3$. Obliczymy wymiary pudełka.

Niech:
$x$ – bok wyciętego kwadratu (cm), gdzie $x$ - liczba całkowita,
$(8-2x)^2 \cdot x$ – objętość pudełka.

Zatem:

$(8-2x)^2 \cdot x = 36$

$\left(64-32x+4x^2\right)x = 36$

$64x-32x^2+4x^3 = 36$

$4x^3-32x^2+64x-36 = 0$

$x^3-8x^2+16x-9 = 0$

$x^3-x^2-7x^2+7x+9x-9 = 0$

$x^2(x-1)-7x(x-1)+9(x-1) = 0$

$(x-1)\left(x^2-7x+9\right) = 0$

$x = 1$ lub $x^2-7x+9 = 0$

$\Delta = 49-36 = 13$

Pierwiastki będą liczbami niewymiernymi.

Pudełko ma wymiary $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$.

# Słownik

**graniastosłup prawidłowy czworokątny**

graniastosłup prosty, którego podstawą jest kwadrat

## Animacja

**Polecenie 1**

Zapoznaj się z animacją i przeanalizuj sposoby rozwiązywania zadania geometrycznego, prowadzące do rozwiązania równania wielomianowego.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/De25PrLdH

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący równań wielomianowych w stereometrii.

**Polecenie 2**

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

# Dla nauczyciela

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Zadania tekstowe geometryczne prowadzące do rozwiązywania równań wielomianowych**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności.
Zakres podstawowy. Uczeń:

1. przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zapisuje i rozwiązuje równanie wielomianowe opisujące zależności między danymi,
- ustala współczynniki równania wielomianowego tak, aby równanie opisywało sytuację przedstawioną w zadaniu,
- dobiera równanie do treści zadania,
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie odpowiednie równanie.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- analiza przypadku,

- dyskusja,
- burza mózgów.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca całego zespołu.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
- Wybrany przez nauczyciela uczeń przypomina definicję równania wielomianowego i podaje przykłady opisu równania za pomocą metody słownej, a uczniowie dopowiadają zapis za pomocą konkretnego wzoru.

**Faza realizacyjna:**

- Nauczyciel prosi uczniów o samodzielną analizę przykładów z sekcji Przeczytaj.
- Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący sposoby rozwiązania zadań.
- Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
- Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

**Faza podsumowująca:**

- Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące metod i analizy zadań geometrycznych, prowadzących do rozwiązywania równań wielomianowych.
- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Omawia ewentualne problemy, które powstały podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

**Praca domowa:**

- Uczniowie tworzą zadania analogiczne do zadań 6 i 7 z części „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Pierwiastki równań

**Wskazówki metodyczne:**

Przykłady zawarte w animacji można wykorzystać jako samodzielną pracę w domu lub na zajęciach z geometrii.