



Wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Funkcje trygonometryczne służą do rozwiązywania wielu problemów matematycznych. Poprzez ich wykorzystanie możemy wyznaczać wartości wyrażeń, które zawierają funkcje trygonometryczne dowolnych kątów. W tym celu wykorzystamy znane już nam tożsamości trygonometryczne, czyli takie równości, które łączą ze sobą funkcje trygonometryczne. Opierając się na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Uprościsz wyrażenia, w których występują funkcje trygonometryczne.
- Wykorzystasz tożsamości trygonometryczne do przekształcania wyrażeń.
- Obliczysz wartości wyrażeń, w których występują funkcje trygonometryczne dowolnych kątów.
- Zastosujesz poznaną wiedzę do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Do obliczania wartości wyrażeń, w których występują **funkcje trygonometryczne** różnych kątów, zastosujemy:

- podstawowe **tożsamości trygonometryczne** takie jak: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna), $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (wzór na tangens dowolnego kąta),
- wzory redukcyjne np. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$,
- wzory skróconego mnożenia,
- działania na wyrażeniach wymiernych: skracanie i rozszerzanie ułamków, sprowadzanie do wspólnego mianownika,
- wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Przykład 1

Przedstawimy wyrażenie $\frac{\cos 22,5^\circ}{\sin 22,5^\circ} + \frac{\sin 22,5^\circ}{\cos 22,5^\circ}$ w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\frac{\cos 22,5^\circ}{\sin 22,5^\circ} + \frac{\sin 22,5^\circ}{\cos 22,5^\circ} &= \frac{\cos^2 22,5^\circ}{\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ} + \frac{\sin^2 22,5^\circ}{\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ} = \\ &= \frac{\sin^2 22,5^\circ + \cos^2 22,5^\circ}{\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ} = \frac{1}{\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ}\end{aligned}$$

Jeżeli zastosujemy wzór $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, to

$$\frac{1}{\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ} = \frac{2}{2 \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Niektóre wyrażenia po przedstawieniu w najprostszej postaci mają stałą wartość, która nie zależy od wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

Przykład 2

Wykażemy, że wartość wyrażenia $(2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2$ jest stała i nie zależy od wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

Rozwiązanie:

Użyjemy wzorów skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i sumy dwóch wyrażeń.

Zatem

$$(2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha = \\
&= 8 \sin^2 \alpha + 8 \cos^2 \alpha = 8 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 8 \cdot 1 = 8.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że do uproszczenia wyrażenia wykorzystaliśmy wzór na jedynkę trygonometryczną.

Wartość wyrażenia jest stała i nie zależy od wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

Przykład 3

Przedstawimy wyrażenie $\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha$ w najprostszej postaci oraz obliczymy jego wartość, gdy $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie:

Po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha &= \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha = \\
&= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika, w liczniku otrzymaliśmy wzór na jedynkę trygonometryczną.

Wartość wyrażenia dla $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ wynosi:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9.$$

Przykład 4

Przedstawimy wyrażenie $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $\alpha = 30^\circ$.

Rozwiązanie:

Po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} &= \frac{\cos \alpha \cdot (1 + \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)} + \frac{\cos \alpha \cdot (1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)} = \\
&= \frac{\cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}.
\end{aligned}$$

Zatem dla $\alpha = 30^\circ$ wartość wyrażenia wynosi

$$\frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Przykład 5

Przedstawimy wyrażenie $\frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha}$ w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość, gdy $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Rozwiązanie:

Po wyłączeniu wspólnego czynnika przed nawias, w liczniku i mianowniku ułamka otrzymujemy, że

$$\frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cdot 1}{\cos \alpha \cdot 1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Zatem wartość wyrażenia wynosi 3.

Przykład 6

Przedstawimy wyrażenie $\frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość, gdy $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ oraz α jest kątem ostrym.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} &= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Jeżeli $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, to korzystając ze wzoru na jedynkę trygonometryczną mamy:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{4}{9} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}, \text{ więc } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ lub } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ponieważ α jest kątem ostrym, to $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\text{Zatem } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Wartość wyrażenia } \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ wynosi } \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Słownik

funkcje trygonometryczne

funkcje matematyczne wyrażające stosunek między długościami boków trójkąta prostokątnego względem miar jego kątów wewnętrznych

tożsamości trygonometryczne

podstawowa zależność pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test samosprawdzający, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Test

Wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów

Sprawdzisz:

- swoje wiadomości i umiejętności w zakresie przedstawiania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne w najprostszej postaci;
- swoją wiedzę w zakresie obliczania wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów.

Liczba pytań:

8

Limit czasu:

8 min

Twój ostatni
wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos^4 \alpha$ wynosi 2.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyrażenie $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ można zapisać w postaci:

☐ $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$

☐ $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$

☐ $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary wyrażenie z odpowiadającą mu wartością dla $\alpha = 30^\circ$:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$1$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)$$

$$\frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 3



Dane jest wyrażenie zawierające funkcje trygonometryczne $\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha$. Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐ Wartość wyrażenia dla $\alpha = 60^\circ$ wynosi $\sqrt{3}$.

☐ Wyrażenie po uproszczeniu jest równe $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

☐ Wyrażenie po uproszczeniu jest równe $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

☐ Wartość wyrażenia dla $\alpha = 45^\circ$ wynosi (-1) .

Ćwiczenie 4



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Wartość wyrażenia wynosi 1 dla $\alpha = 60^\circ$:

$$-\frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot (\operatorname{tg} \alpha - 1)$$

$$-\frac{3}{16} \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)$$

Wartość wyrażenia wynosi (-1) dla $\alpha = 60^\circ$:

$$-2 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Uporządkuj wyrażenia tak, aby po podstawieniu $\alpha = 60^\circ$ ich wartości były ułożone rosnąco:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$



$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 1$$



$$-(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)$$



$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + 1$$



Ćwiczenie 7



Przedstaw wyrażenie $\frac{1}{\sin \alpha} - \cos \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ w najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $\alpha = 60^\circ$.

Ćwiczenie 8



Uprość wyrażenie $\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$, a następnie oblicz jego wartość dla $\alpha = 45^\circ$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- upraszcza wyrażenia, w których występują funkcje trygonometryczne;
- korzysta z tożsamości trygonometrycznych;
- oblicza wartości wyrażeń, w których występują funkcje trygonometryczne;
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Test samosprawdzający” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Ekspersi proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie w parach rozwiązują polecenia w sekcji „Test samosprawdzający”, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
3. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2 w sekcji „Sprawdź się”.
4. Uczniowie w 4-osobowych grupach rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów”).

Materiały pomocnicze:

- [Tożsamości trygonometryczne.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Test samosprawdzający” można wykorzystać jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu upraszczania i obliczania wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne dowolnych kątów.