

Wycinek koła. Odcinek koła

Definicja wycinka koła, rysunki wycinka, wzór na obliczanie. Kąt środkowy. Długość łuku – przykłady, wzór, przykłady zadań. Ciekawostki o wycinku koła. Prezentacja multimedialna podziału koła na równe części. Animacja – pizza jako przykład na wycinki koła.

Ćwiczenia na obliczanie pola wycinka i długości łuku o niskim stopniu trudności.

Ćwiczenia na obliczanie pola wycinka i długość łuku o większym stopniu trudności. Zadania na obliczanie powierzchni odcinka kołowego, kąta środkowego, promienia i średnicy koła. Przykłady rozwiązań do zadań.

Definicja wycinka koła. Definicja odcinka koła. Odcinek koła – animacja. Kąt środkowy i cięciwa. Metoda obliczania pola odcinka koła. Ilustracja interaktywna: pole figury sercowej. Ilustracja interaktywna: powstawanie i pole powierzchni lunuli kwadratowej. Ilustracja interaktywna: pole powierzchni lunuli trójkątnej.

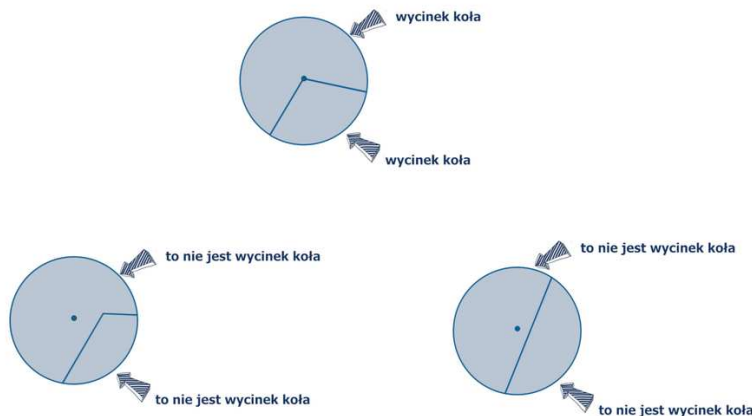
Obliczanie pola powierzchni wycinka koła. Obliczanie pola powierzchni odcinka koła. Obliczanie długości łuku.

Obliczanie pola powierzchni wycinka i odcinka koła. Obliczanie pola powierzchni lunuli. Zaznaczanie na rysunku koła wycinka o wskazanej powierzchni lub długości łuku. Zadania na dowodzenie.

Wycinek koła. Odcinek koła

W tym materiale zawarte są informacje na temat wycinka i odcinka koła. Poznasz definicję, podstawowe pojęcia z nimi związane oraz zależności zachodzące pomiędzy wycinkiem i odcinkiem koła.

Wycinek koła



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RN0ZFtSJaGWli>

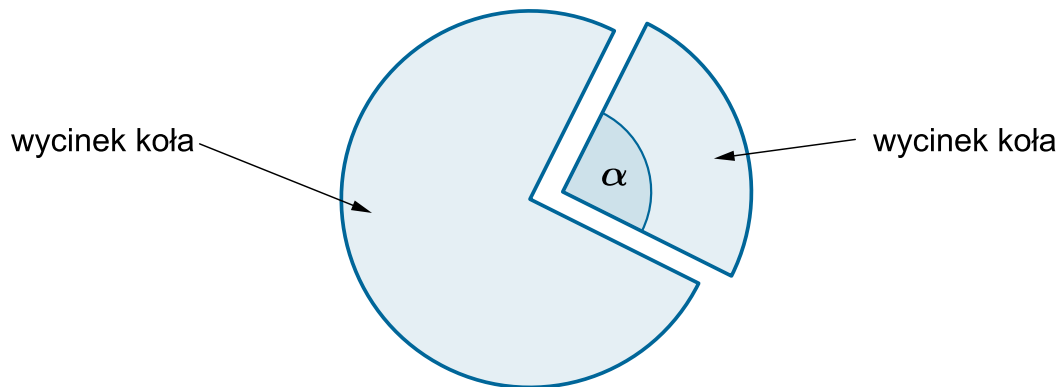
Wycinek koła. Odcinek koła_3077

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia które figury możemy nazywać wycinkami koła.

Definicja: Wycinek koła

Wycinkiem koła (wycinkiem kołowym) nazywamy część tego koła ograniczoną łukiem i ramionami kąta środkowego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Kąt środkowy α wyznacza w kole dwa wycinki kołowe.

Przykład 1

W kole o promieniu 10 wyznaczony jest wycinek koła przez kąt środkowy o mierze 60° . Obliczymy pole tego wycinka.

Kąt o mierze 60° stanowi $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ kąta pełnego. Pole wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt jest taką samą częścią pola całego koła. Stanowi więc $\frac{1}{6}$ pola całego koła:

$$P = \frac{1}{6} \pi r^2$$

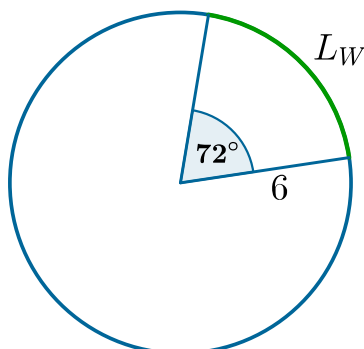
$$P = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 10^2$$

$$P = 16\frac{2}{3}\pi.$$

Pole wycinka koła jest równe $16\frac{2}{3}\pi$.

Przykład 2

Kąt środkowy w okręgu o promieniu 6 ma miarę 72° . Oblicz długość łuku wyznaczonego przez ten kąt.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy, że kąt 72° stanowi $\frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5}$ część kąta pełnego. Szukana długość łuku L_W jest więc równa $\frac{1}{5}$ długości okręgu:

$$L_W = \frac{1}{5} \cdot 2\pi r$$

$$L_W = 2,4\pi.$$

Długość łuku wyznaczonego przez wycinek koła jest równa $2,4\pi$.

Zauważmy, że wycinek koła stanowi taką samą część koła, jaką częścią kąta pełnego jest kąt środkowy wyznaczający ten wycinek. Podobnie długość łuku wyznaczonego przez ten wycinek jest taką samą częścią długości okręgu, jaką częścią kąta pełnego jest kąt środkowy wyznaczający ten wycinek.

Ważne!

Pole P_W wycinka koła wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy o mierze α jest równe

$$P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2.$$

Ważne!

Długość łuku L_W , wyznaczonego na okręgu o promieniu r przez kąt środkowy o mierze α , jest równa

$$L_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

Przykład 3

Kąt środkowy w kole o promieniu 18 cm ma miarę 240° . Oblicz długość łuku wyznaczonego przez ten kąt. Wynik zaokrąglaj do części dziesiętych.

Korzystamy ze wzoru na długość łuku wyznaczonego przez wycinek koła. Do wzoru podstawiamy:

$$\alpha = 240^\circ$$

$$r = 18 \text{ cm}$$

$$L_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$L_W = \frac{240^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 18$$

$$L_W = 24\pi$$

$$L_W \approx 75,4 \text{ cm.}$$

Długość łuku wyznaczonego przez ten wycinek wynosi około 75,4 cm.

Przykład 4

W kole o promieniu 27 dm kąt środkowy ma miarę 160° . Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt.

Korzystamy ze wzoru na pole wycinka koła. Do wzoru podstawiamy $\alpha = 160^\circ$ i $r = 27$ dm:

$$P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$P_W = \frac{160^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 27^2$$

$$P_W = 324 \cdot \pi$$

$$P_W \approx 1017,36 \text{ dm}^2.$$

Pole wycinka koła jest równe około 1017,36 dm².

Ćwiczenie 1

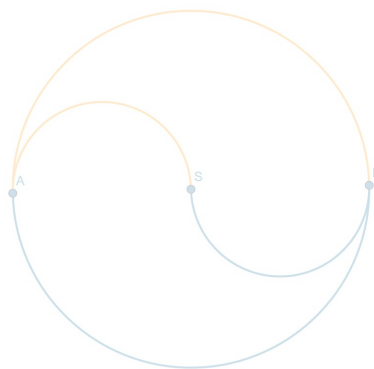
Podziel koło na równe części, przypominające Yin – Yang.

Wykaż, że w każdym przypadku otrzymane części mają równe pola.

Yin-Yang
etap 1 z 3



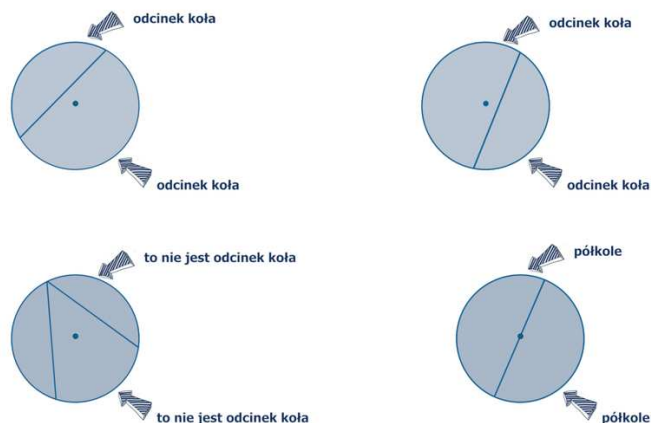
W antycznej filozofii chińskiej yin i yang to dwie uzupełniające się siły, dwie przeciwności. Yang oznacza światło słoneczne, biel, lato; yin to zachmurzenie, czerni, zima. Siły yang i yin, będące w ciągłym ruchu, powodują powstawanie wszystkiego, co nas otacza. Korea przyjęła yin-yang za symbol flagowy swoich linii lotniczych Korean Airlines.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PRFndazsT>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odcinek koła



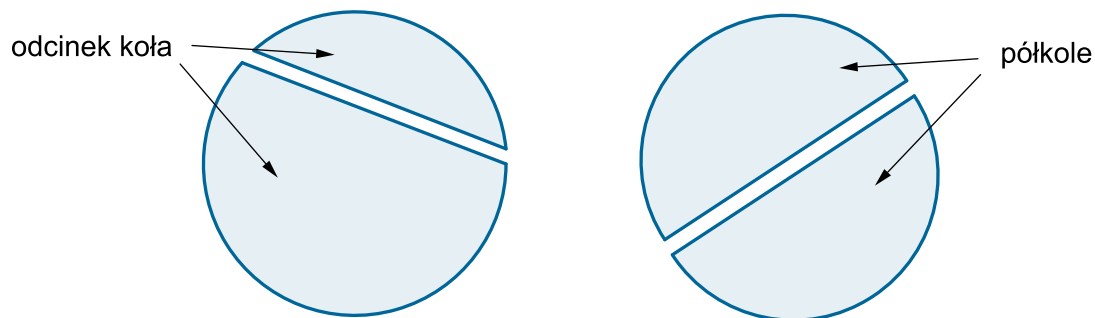
Film dostępny pod adresem </preview/resource/Rf5tTdUai8qS1>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia które figury możemy nazywać odcinkami koła.

Definicja: Odcinek koła

Odcinkiem koła (odcinkiem kołowym) nazywamy część koła odciętą przez cięciwę wraz z tą cięciwą.

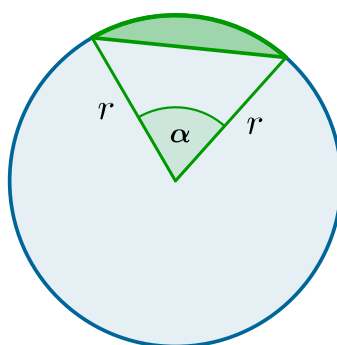


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każda cięciwa wyznacza dwa odcinki koła. Średnica dzieli koło na dwa półkola.

Ważne!

Cięciwa ograniczająca odcinek koła wyznacza kąt środkowy α . Ramiona tego kąta ograniczają łuk okręgu.



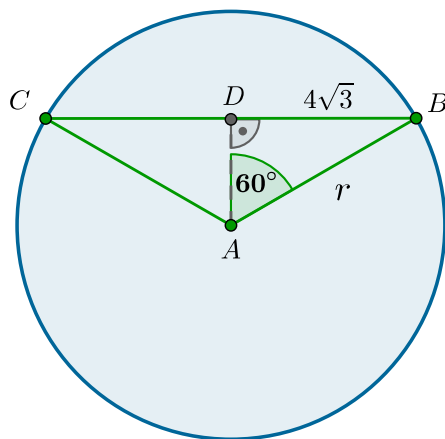
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Pole odcinka koła jest różnicą pola wycinka koła wyznaczonego przez kąt α i pola trójkąta, którego bokami są promienie okręgu i cięciwa.

Przykład 5

Odcinek koła wyznaczony jest przez kąt środkowy o mierze 120° i cięciwę długości $8\sqrt{3}$. Oblicz pole odcinka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku. Wtedy trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym, w którym kąt DAB ma miarę 60° (jako połowa kąta 120°).

Naprzeciw kąta o mierze 60° leży przyprostokątna długości $4\sqrt{3}$ (jako połowa cięciwy). Korzystając z własności trójkąta prostokątnego o kątach 90° , 60° , 30° , stwierdzamy, że $|AD| = 4$ i $|AB| = 8$.

Obliczamy pole wycinka koła o promieniu $r = |AB| = 8$ wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 120°

$$P_W = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 8^2$$

$$P_W = \frac{64}{3} \pi.$$

Obliczamy pole trójkąta ABC

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AD|$$

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4$$

$$P_\Delta = 16\sqrt{3}.$$

Pole odcinka koła jest równe różnicy pola wycinka i pola trójkąta ABC .

$$P = P_W - P_\Delta$$

$$P = \frac{64}{3} \pi - 16\sqrt{3}.$$

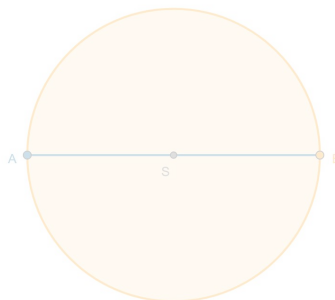
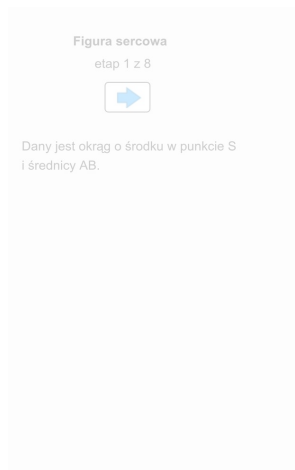
Pole odcinka koła jest równe $21\frac{1}{3}\pi - 16\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2

Nazwijmy niebieską figurę na rysunku „figurą sercową”.

Zastanów się, w jaki sposób powstała ta figura.

Sprawdź, że pole figury sercowej jest równe πr^2 .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PRFndazsT>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

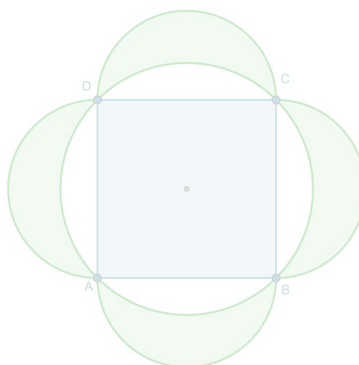
Długość boku kwadratu jest równa 16.

Na bokach kwadratu rysujemy księżyce Hipokratesa. Zapoznaj się z poniższym apilem przedstawiającym wspomniane księżyce.

Lunula kwadratowa

Na bokach kwadratu zbudowano cztery półokręgi oraz okrąg opisany na kwadracie. Obszar ograniczony łukami tych okręgów tworzy cztery księżyce, zwane lunulą kwadratową. Odczytaj pole jednego z jej księżyców i pole kwadratu. Co dostrzegasz? Postaw odpowiednią hipotezę.

☐ pokaż miary pól figur



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PRFndazsT>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Figurę utworzoną z tych księżyców nazwiemy lunulą (Luna po łacinie to Księżyc).

Oblicz pole jednej z części lunuli oraz pole lunuli, jeżeli bok kwadratu jest równy a .

Porównaj to pole z polem kwadratu. Co zauważasz?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

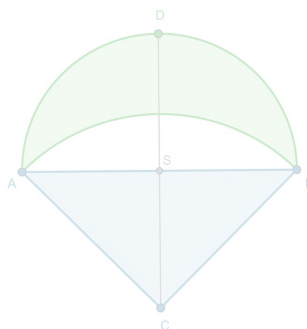
Lunula trójkątna powstaje na bazie trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Lunula trójkątna

Jeśli na bazie trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC wykreślimy łuki:
o środku C i promieniu $CA=CB$
oraz o środku A i promieniu $SA=SB$,
wówczas pomiędzy tymi łukami
utworzy się obszar w kształcie księżycy,
zwany lunulą trójkątną.

Porównaj ze sobą pole księżycy i pole trójkąta.
Jaką hipotezę możesz postawić?
Spróbuj ją udowodnić.

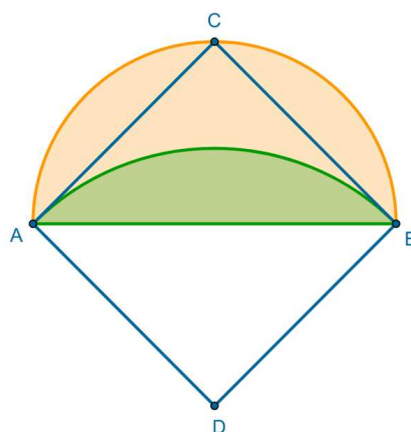
☐ pokaż miary pól figur



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PRFndazsT>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przyjrzyj się, jak powstaje lunula trójkątna i wykonaj podobną konstrukcję.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Oblicz pole połowy kwadratu (czyli pole trójkąta prostokątnego równoramiennego).
- Oblicz pole lunuli.
- Porównaj te pola. Co zauważasz?

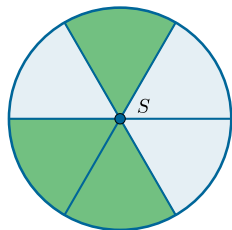
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

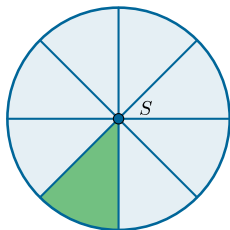


Koło o środku w punkcie S i promieniu równym 6 podzielono na jednakowe części. Następnie zamalowano na zielono niektóre z części – jak na rysunku. Oblicz pole zaznaczonych na zielono części tego koła, a następnie dopasuj prawidłowe wyniki.

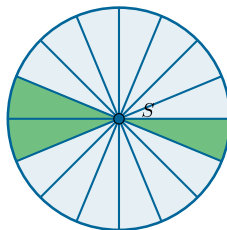
a)



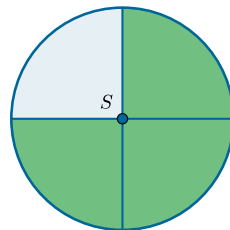
b)



c)



d)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

a) Pole zaznaczonej na zielono części pierwszej figury wynosi

b) Pole zaznaczonej na zielono części drugiej figury wynosi

c) Pole zaznaczonej na zielono części trzeciej figury wynosi

d) Pole zaznaczonej na zielono części czwartej figury wynosi

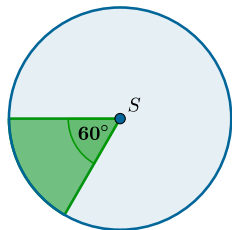
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

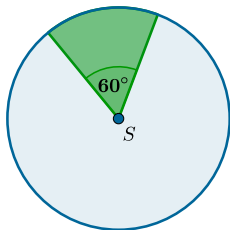


Koło o środku w punkcie S ma promień równy 4. Oblicz pole pomalowanego na zielono wycinka tego koła.

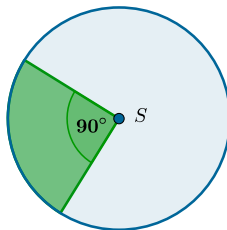
a)



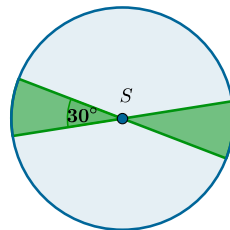
b)



c)



d)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

a) Pole pomalowanego na zielono wycinka pierwszej figury wynosi

b) Pole pomalowanego na zielono wycinka drugiej figury wynosi

c) Pole pomalowanego na zielono wycinka trzeciej figury wynosi

d) Pole pomalowanego na zielono wycinka czwartej figury wynosi

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Oblicz pole koła, a następnie uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 120° ma pole równe 3π , więc pole tego koła wynosi .
- Wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 72° ma pole równe π , więc pole tego koła wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



W okręgu o promieniu 12 cm zaznaczono łuk wyznaczony przez kąt środkowy o mierze α . Wyznacz długość tego łuku, a następnie uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

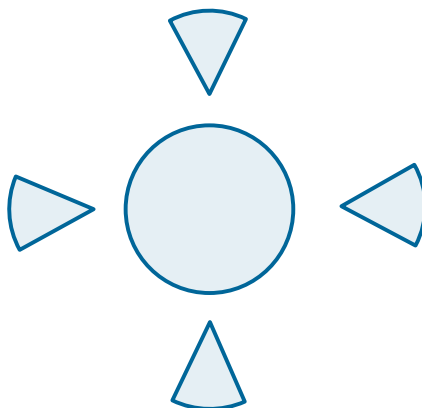
- Jeżeli łuk jest wyznaczony przez kąt $\alpha = 40^\circ$, to długość tego łuku wynosi cm.
- Jeżeli łuk jest wyznaczony przez kąt $\alpha = 20^\circ$, to długość tego łuku wynosi cm.
- Jeżeli łuk jest wyznaczony przez kąt $\alpha = 240^\circ$, to długość tego łuku wynosi cm.
- Jeżeli łuk jest wyznaczony przez kąt $\alpha = 100^\circ$, to długość tego łuku wynosi cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Kwiatek składa się z czterech jednakowych płatków i środka w kształcie koła. Płatek ma kształt wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 45° w kole o promieniu 9. Środkowe koło ma promień równy 9. Oblicz pole powierzchni kwiatka. Wynik podaj z dokładnością do 0,1.



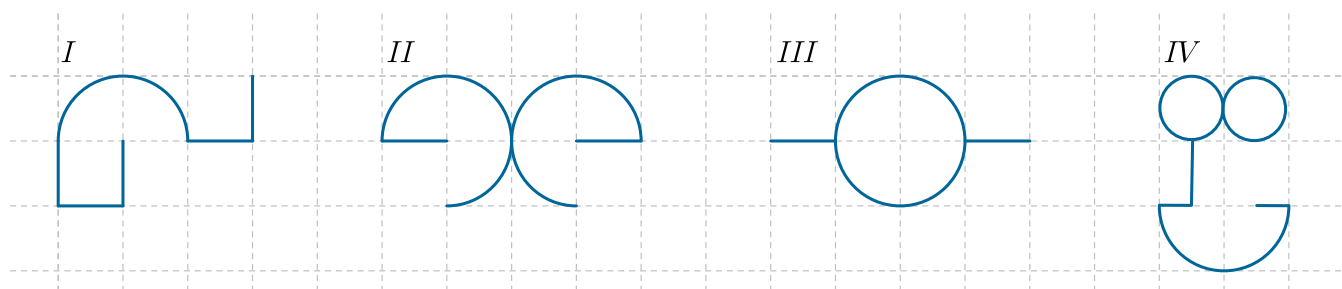
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Które z linii mają tę samą długość? Zaznacz prawidłową odpowiedź.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

☐ II i III

☐ I i III

☐ I i IV

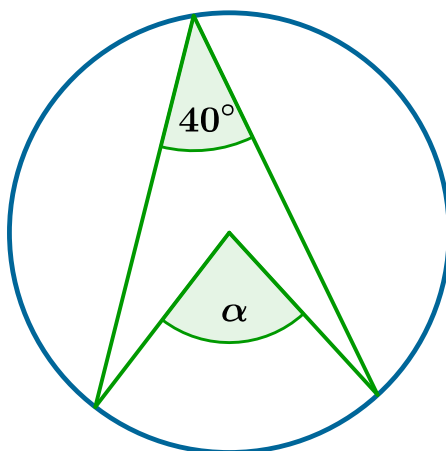
☐ II i IV

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Oblicz długość łuku w okręgu o promieniu 4, wyznaczonego przez kąt środkowy α .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz, ile wynosi długość łuku.

☐ $2\frac{1}{9}\pi$

☐ $1\frac{7}{9}\pi$

☐ $2\frac{5}{9}\pi$

☐ $1\frac{3}{9}\pi$

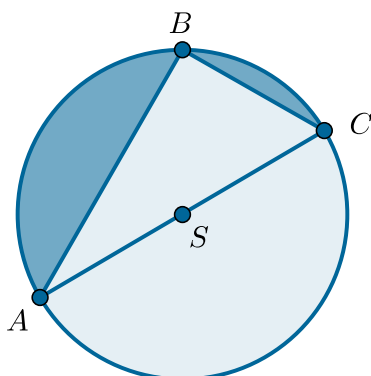
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



W kole o środku w punkcie S i promieniu $7,25$ poprowadzono cięciwy AB i CB . Cięciwa AB ma długość $10,5$.

Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez te cięciwy. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Kąt środkowy w kole ma miarę 144° . Długość łuku wyznaczonego przez ten kąt jest równa $1,2\pi$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

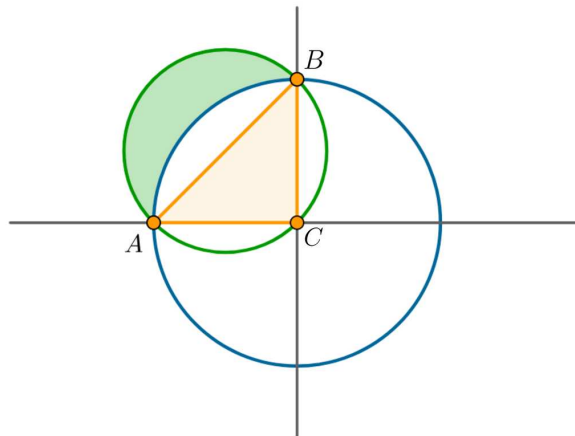
- ☐ Pole koła jest równe 9π .
- ☐ Średnica tego koła jest równa 3 .
- ☐ Pole tego wycinka jest równe $0,9\pi$.
- ☐ Długość okręgu ograniczającego to koło jest równa 3 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Wykaż, że pole zaznaczonej na zielono lunuli jest równe polu trójkąta ABC .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu 6π odpowiada kąt o mierze 60° ? Uzupełnij odpowiedź, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Odpowiedź: Koło ma promień .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Jaki promień ma okrąg, w którym kąt środkowy o mierze 12° jest oparty na łuku o długości 2π ? Uzupełnij odpowiedź, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

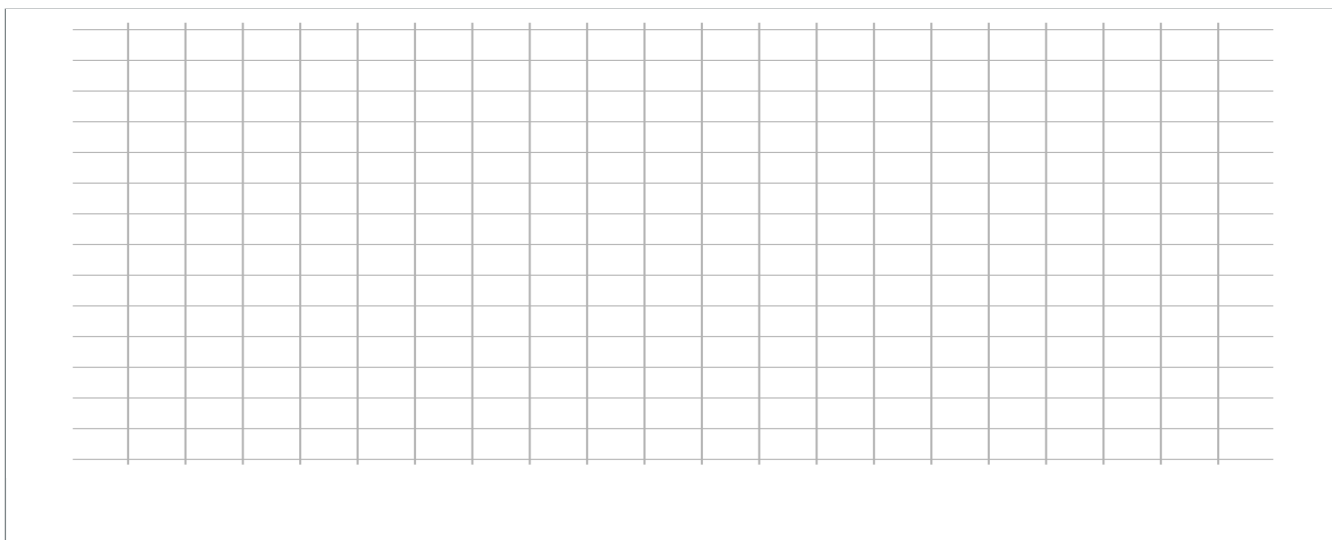
Odpowiedź: Promień okręgu wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Narysuj koło o promieniu 6. Zamaluj część tego koła o polu 30π .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego w kole o promieniu 5 przez cięciwę łączącą końce dwóch prostopadłych do siebie promieni.

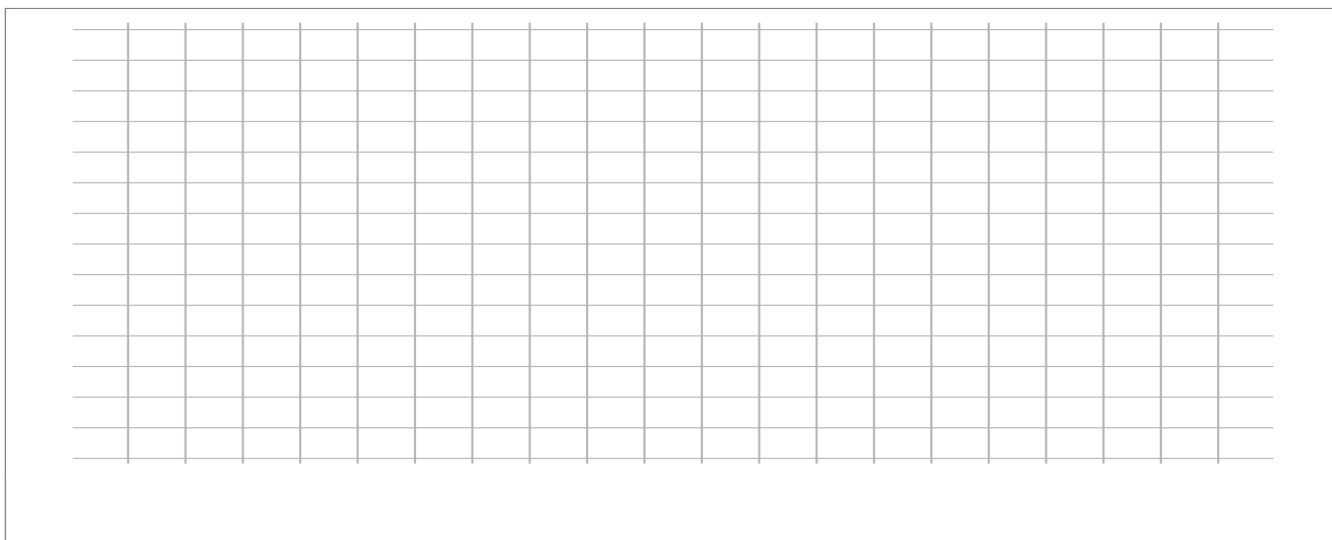
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Narysuj dowolny okrąg. Na okręgu zamaluj łuk stanowiący:

- a. $\frac{3}{4}$ długości okręgu,
- b. $\frac{1}{6}$ długości okręgu,
- c. $\frac{11}{12}$ długości okręgu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie wyrazy lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Średnica koła wyznacza dwa odcinki kołowe.
- Kąt środkowy α wyznacza w kole wycinki kołowe.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Udowodnij, że średnica dzieli koło na dwa przystające odcinki kołowe.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Zaznacz, jaką miarę ma kąt środkowy oparty na łuku stanowiącym $\frac{1}{8}$ długości okręgu.

☐ 90°

☐ 120°

☐ 45°

☐ 60°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



W kole zaznaczono dwa wycinki kołowe o równych polach. Wykaż, że wycinki te wyznaczone są przez kąty środkowe o jednakowych miarach.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.