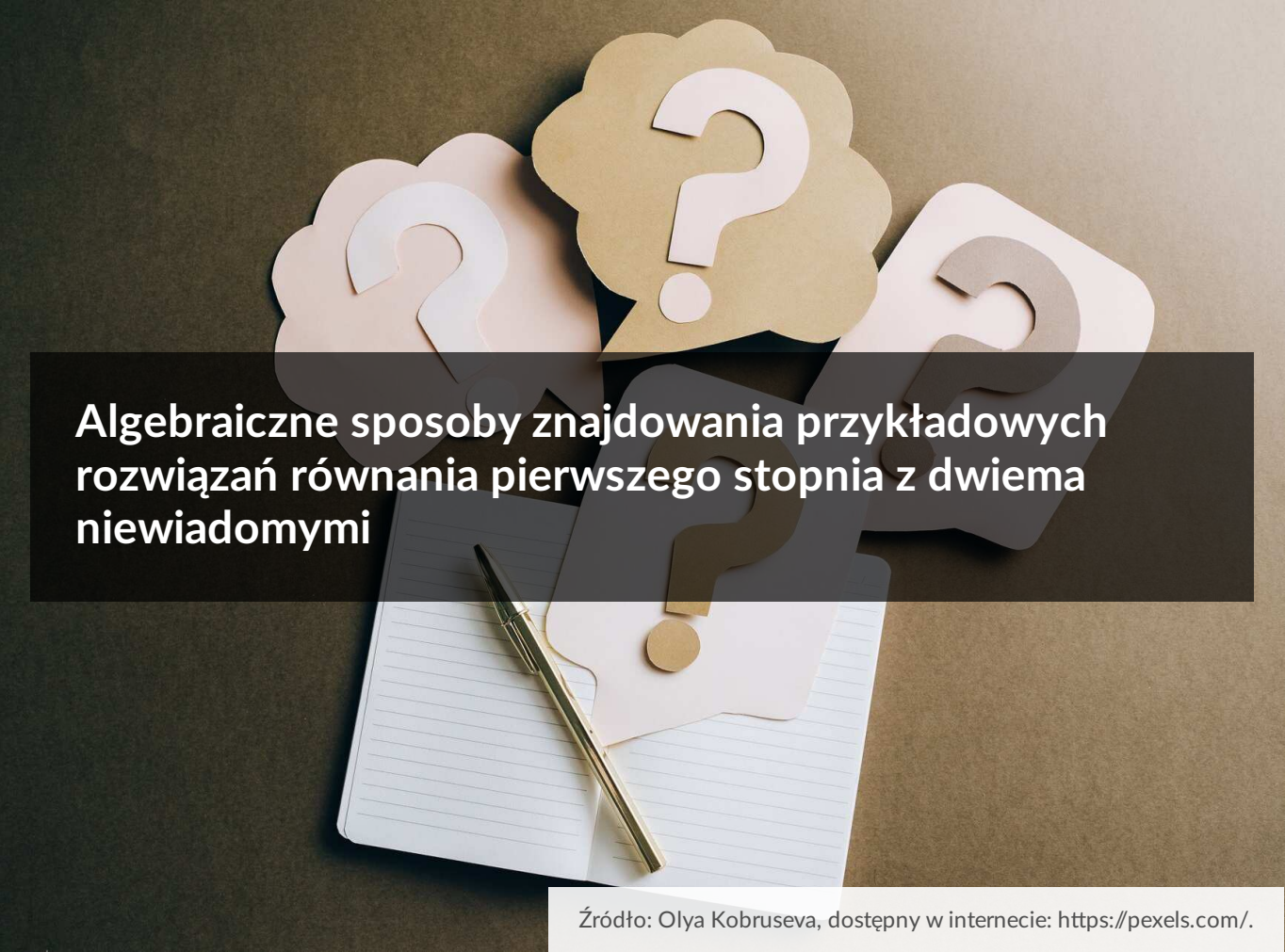




Algebraiczne sposoby znajdowania przykładowych rozwiązań równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Algebraiczne sposoby znajdowania przykładowych rozwiązań równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Źródło: Olya Kobruseva, dostępny w internecie: <https://pexels.com/>.

“ Życie to równanie z nieskończoną ilością niewiadomych.

Kazimierz Matan

Równanie, w którym występują dwie lub trzy niewiadome, nazywamy równaniem z dwiema lub trzema niewiadomymi. Równanie takie posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Możemy oczywiście odgadnąć niektóre liczby, które tworzą pary lub trójki liczb spełniających rozpatrywane równanie. Możemy też wyznaczyć je przekształcając równanie.

W tym materiale dowiesz się, jak wykorzystując znane Ci metody algebraicznie wyznaczyć przykładowe rozwiązania równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Twoje cele

- Przekształcisz równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Wyznaczysz jedną z niewiadomych w równaniu pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Znajdziesz algebraicznie przykładowe rozwiązania równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

- Znajdziesz metody rozwiązania problemów prowadzących do poszukiwania rozwiązania równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przeczytaj

PRZYPOMNIJ SOBIE

Definicja: Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Równanie, w którym występują dwie niewiadome i obie występują w pierwszej potęgde, nazywamy równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Równanie takie przyjmuje postać:

$$ax + by + c = 0,$$

gdzie:
 $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a^2 + b^2 \neq 0$.

Definicja: Para liczb (x, y) spełniająca równanie $ax + by + c = 0$

Para liczb (x, y) spełnia równanie $ax + by + c = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy po podstawieniu tych liczb w miejsca niewiadomych, otrzymamy zdanie prawdziwe.

Definicja: Rozwiązanie równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Każdą parę liczb, która spełnia równanie $ax + by + c = 0$ nazywamy rozwiązaniem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 1

Znajdziemy trzy pary liczb spełniających równanie $3x + y = 5$.

Łatwo jest odgadnąć, że jedną z takich par, jest para $(1, 2)$.

Żeby wyznaczyć inne pary, możemy przekształcić równanie, tak aby wyznaczyć z niego niewiadomą y .

$$y = -3x + 5$$

Wtedy przyjmując za x dowolną liczbę rzeczywistą, podstawiamy ją do wyznaczonego wzoru i obliczamy y .

Dowolnie wybrany x	$y = -3x + 5$	Para liczb spełniająca równanie $3x + y = 5$
$x = -3$	$y = -3 \cdot (-3) + 5 = 9 + 5 = 14$	$(x, y) = (-3, 14)$

Dowolnie wybrany x	$y = -3x + 5$	Para liczb spełniająca równanie $3x + y = 5$
$x = 3$	$y = -3 \cdot 3 + 5 = -9 + 5 = -4$	$(x, y) = (3, -4)$

Przykład 2

Znajdziemy cztery pary liczb, które są **rozwiązaniem równania**

$$5 \cdot (x + y) = 4 + \sqrt{3}x + 2y.$$

Przekształcamy równanie, tak aby wyznaczyć z równania y .

$$5 \cdot (x + y) = 4 + \sqrt{3}x + 2y$$

$$5x + 5y = 4 + \sqrt{3}x + 2y$$

$$5y - 2y = 4 + \sqrt{3}x - 5x$$

$$3y = 4 + (\sqrt{3} - 5)x$$

$$y = \frac{4 + (\sqrt{3} - 5)x}{3}$$

$x \in \mathbb{R}$	$y = \frac{4 + (\sqrt{3} - 5)x}{3}$	Para liczb (x, y) spełniająca równanie $5 \cdot (x + y) = 4 + \sqrt{3}x + 2y$
$x = -2$	$y = \frac{4 + (\sqrt{3} - 5) \cdot (-2)}{3} = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 10}{3} = \frac{14 - 2\sqrt{3}}{3}$	$(x, y) = \left(-2, \frac{14 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$
$x = 1$	$y = \frac{4 + (\sqrt{3} - 5) \cdot 1}{3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$	$(x, y) = \left(1, \frac{\sqrt{3} - 1}{3}\right)$
$x = \sqrt{3}$	$y = \frac{4 + (\sqrt{3} - 5) \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{4 + 3 - 5\sqrt{3}}{3} = \frac{7 - 5\sqrt{3}}{3}$	$(x, y) = \left(\sqrt{3}, \frac{7 - 5\sqrt{3}}{3}\right)$
$x = 2 + 3\sqrt{3}$	$y = \frac{4 + (\sqrt{3} - 5)(2 + 3\sqrt{3})}{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3} + 9 - 10 - 15\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - 13\sqrt{3}}{3}$	$(x, y) = \left(2 + 3\sqrt{3}, \frac{3 - 13\sqrt{3}}{3}\right)$

Przykład 3

Tomek ma w portfelu 37 zł drobnych w monetach 2 zł i 5 zł. Ile ma monet każdego rodzaju?

Istnieje oczywiście kilka rozwiązań tego zadania. Jest ich jednak skończona liczba, ponieważ uwzględniając warunki zadania, x oraz y muszą być liczbami naturalnymi różnymi od zera.

Zapiszemy równanie, które przedstawia problem zapisany w zadaniu.

$$2x + 5y = 37$$

gdzie:

x – oznacza liczbę monet dwuzłotowych,

y – liczbę monet pięciozłotowych.

Wyznaczamy z równania jedną z niewiadomych, np. x .

$$2x = 37 - 5y \quad |: 2$$

$$x = 18,5 - 2,5y$$

Widzimy, że aby zmienna x była liczbą naturalną, zmienna y musi być liczbą nieparzystą (dlaczego?).

Wybieramy więc nieparzyste liczby y i obliczamy zmienną x spełniającą zapisany warunek.

Liczba monet pięciozłotowych – y	Liczba monet dwuzłotowych – x	
	$x = 18,5 - 2,5y$	
$y = 1$	$x = 18,5 - 2,5 = 16$	$\begin{cases} x = 16 \\ y = 1 \end{cases}$
$y = 3$	$x = 18,5 - 2,5 \cdot 3 = 11$	$\begin{cases} x = 11 \\ y = 3 \end{cases}$
$y = 5$	$x = 18,5 - 2,5 \cdot 5 = 6$	$\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$
$y = 7$	$x = 18,5 - 2,5 \cdot 7 = 1$	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$

A zatem istnieją cztery możliwe rozwiązania problemu przedstawionego w zadaniu.

Tomasz może mieć:

- 16 monet dwuzłotowych i 1 monetę pięciozłotową
lub
- 11 monet dwuzłotowych i 3 monety pięciozłotowe
lub
- 6 monet dwuzłotowych i 5 monet pięciozłotowych
lub
- 1 monetę dwuzłotową i 7 monet pięciozłotowych.

Przykład 4

Wyznamy regułę, która określa **wszystkie** rozwiązania równania

$$2 \cdot (x + 2y) + 1 = 4x - 5.$$

Wyznamy z równania zmienną y .

$$2x + 4y + 1 = 4x - 5$$

$$4y = 2x - 6 \quad |:4$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad ()$$

Zmienna x może być dowolną liczbą rzeczywistą, zmienna y – liczbą rzeczywistą spełniającą warunek $()$.

A zatem rozwiązaniami równania

$$2 \cdot (x + 2y) + 1 = 4x - 5$$

są pary liczb postaci $(x, \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Słownik

równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

równanie, w którym występują dwie niewiadome i obie występują w pierwszej potęgze

para liczb spełniająca równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

para liczb, po podstawieniu której do równania w miejsce niewiadomych, otrzymamy równość prawdziwą

rozwiązanie równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

każda para liczb (x, y) , spełniająca to równanie

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i przeanalizuj przedstawioną w niej metodę rozwiązywania równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Następnie, za jej pomocą, wykonaj polecenie 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DibRw0FH0>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej algebraicznych sposobów znajdowania rozwiązań.

Polecenie 2

Kajak kosztuje 2000 zł, a rower wodny 3000 zł. Ile takiego sprzętu mogą kupić właściciele wypożyczalni, jeśli na ten cel przeznaczyli 38000 zł? Podaj wszystkie możliwości, korzystając z podanej w animacji metody.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Wskaż prawidłowo wyznaczoną zmienną, jeśli $5x + 3y = 5 + 2 \cdot (x - 1)$.

☐ $x = y - 1$

☐ $x = 1 - y$

☐ $y = 1 - x$

☐ $y = x - 1$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równania równoważne.

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$

$$x = \frac{2}{3} + \frac{5}{9}y$$

$$2 \cdot (x + y) - 3 \cdot (y - x) = 9$$

$$y = 5x - 9$$

$$\frac{x-y}{2} + \frac{3x-y}{3} = 1$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$4 \cdot (y - 1) + 3 \cdot (x + 2) = 5$$

$$x = -\frac{3}{2}y + 6$$

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Do każdego równania przyciągnij odpowiedni opis.

$$2 \cdot (x + y) + 3 \cdot (x - y) = 2, 3 \cdot (x + y) - (x - y) = 2x, x + y = 3 \cdot (x - y)$$

Równanie	Opis
$2 \cdot (x + y) + 3 \cdot (x - y) = 2$	
$3 \cdot (x + y) - (x - y) = 2x$	
$x + y = 3 \cdot (x - y)$	

Ćwiczenie 5



Łódka płynąc z prądem rzeki pokonała trasę 15 km w czasie jednej godziny. Wskaż równanie opisujące tę sytuację, wiedząc, że prędkość własną łódki oznaczono przez $v_1 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$, a prędkość prądu $v_2 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $v_2 - v_1 = 15$

☐ $v_1 + v_2 = 15$

☐ $v_1 = 15v_2$

☐ $v_2 = 15v_1$

☐ $v_1 - v_2 = 15$

Ćwiczenie 6



Wyznacz x oraz y z równania $4 \cdot (x - 2y) = 3x - 7y + 5$, a następnie uzupełnij brakujące miejsca w tabeli.

Przeciągnij poprawną wartość.

Wyznaczone x :

Wyznaczone y :

$y = x - 5$

$x = -y - 5$

$x = y + 5$

$y = x + 5$

$y = -x + 5$

$x = y - 5$

$x = -y + 5$

$y = -x - 5$

Uzupełnij tabelę. Wpisz poprawne liczby.

x	y
7	
	112
1005	
	3

Ćwiczenie 7



Połącz w pary równania i pary liczb, opisujące jego rozwiązania.

$\frac{x+y}{5} - 2 \cdot (x - y) = 2,2$

$(x, -x + \frac{3}{2})$

$\frac{x+y}{3} + \frac{x+y}{5} = 8$

$(x, \frac{9}{11}x + 1)$

$3 \cdot (x + y) + \frac{x+y}{3} = 5$

$(x, -x + 15)$

Ćwiczenie 8



Wyznacz wszystkie pary liczb (x, y) spełniające równanie $\frac{1}{3}x + y = 5$, takie, że $x \in \mathbb{N}$ i $y \in \mathbb{N}$.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Algebraiczne sposoby znajdowania przykładowych rozwiązań równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- wyznacza jedną z niewiadomych w równaniu pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- znajduje przykładowe rozwiązania równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- znajduje metody rozwiązywania problemów prowadzących do poszukiwania rozwiązania równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja
- dyskusja
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego
- praca indywidualna

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie będą pracować metodą odwróconej klasy. W domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” oraz z animacją.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
3. Uczniowie w grupach ustalonych przez nauczyciela omawiają przygotowane w domu informacje, dyskutują nad problemami, które się pojawiały, np.: czy możemy wypisać wszystkie rozwiązania równania liniowego.

Faza realizacyjna:

1. Przedstawiciele grup omawiają poszczególne problemy na forum klasy. Uczniowie wspólnie wyjaśniają wątpliwości, konsultując je w razie potrzeby z nauczycielem.
2. Uczniowie pracują indywidualnie metodą konkursu zadaniowego. Rozwiązują ćwiczenia interaktywne. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność. Osoby, które rozwiążą zadania bezbłędnie, otrzymują oceny z aktywności.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały omówione na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Układ równań z dwiema niewiadomymi – opisywanie związków między wielkościami za pomocą równań
- Definicja funkcji liniowej

Wskazówki metodyczne:

Animacja może zostać wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji.