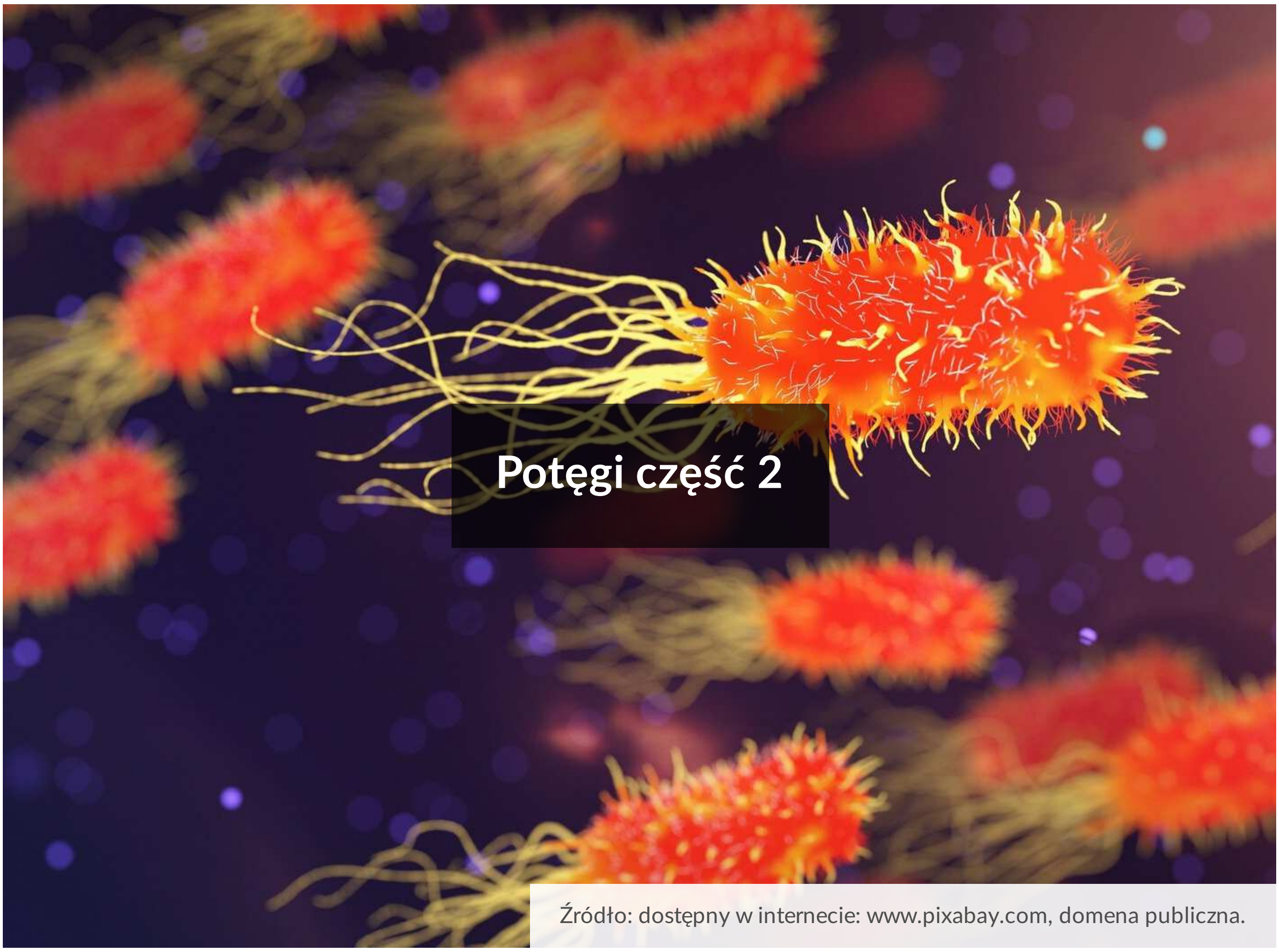
# Potęgi część 2

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film edukacyjny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

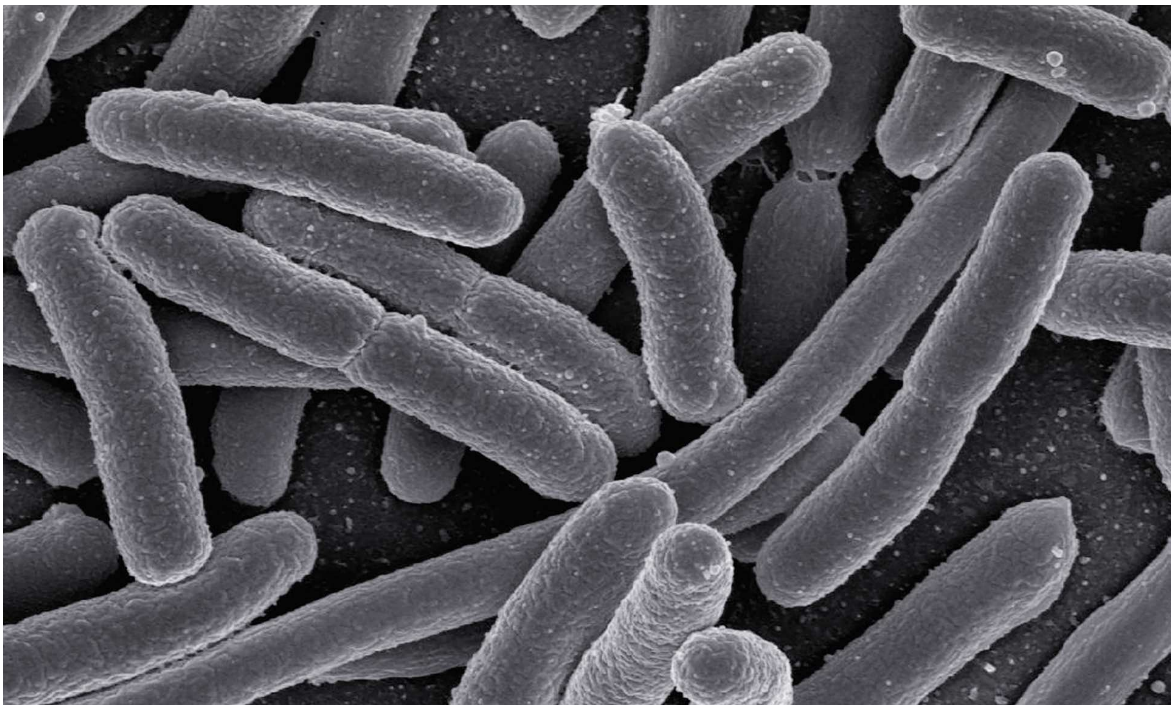


Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale spojrzymy na świat rzeczy bardzo małej wielkości. W życiu codziennym spotykamy się z nimi niezwykle często, choć nierzadko musimy wytężyć wzrok, aby je dostrzec.

Swego rodzaju symbolem tego, co maleńkie, jest ziarenko maku. Ziarenko ma średnicę około $0,0005$ m. Ziarenko tej wielkości potrafimy jeszcze dostrzec, bez przyrządów optycznych, ale bakterii już nie możemy w ten sposób zobaczyć (choć są wyjątki).

Jedna z najbardziej znanych bakterii – Escherichia Coli – ma rozmiary rzędu mikrometra ($\mu$m), czyli $0,000001$ m, co już niewątpliwie jest poza zasięgiem naszego nieuzbrojonego w mikroskop oka.



Escherichia Coli

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W świecie istot żywych są jednak jeszcze mniejsze organizmy. Wielkość wirusów mierzy się na przykład już w nanometrach, czyli w jednostce długości równej $0,000000001$ m.

Przykładów jeszcze mniejszych obiektów dostarcza fizyka.

Atomy mają rozmiary około $0,0000000001$ m. Jądro atomowe, choć zawiera $99,9\%$ masy atomu, to jest jednak od niego około $100000$ razy mniejsze, a jego wielkość mierzona w metrach wyraża się w przybliżeniu liczbą $0,000000000000001$.

Jak widzimy, tradycyjny zapis małych liczb jest bardzo niewygodny w użyciu, ze względu na dużą liczbę zer potrzebnych do ich zapisu. Dlatego znacznie prościej jest zapisywać je z użyciem potęgi o wykładniku ujemnym.

**Twoje cele**

- Powtórzysz pojęcie potęgi o ujemnym wykładniku całkowitym.
- Udoskonalisz umiejętności dotyczące wykonywania działań na potęgach o wykładniku ujemnym.
- Utrwalisz wzory odnoszące się do wykonywania działań na potęgach o tej samej podstawie, w których występować będą potęgi o wykładniku ujemnym.
- Porównasz wielkości występujące w przyrodzie, do czego użyjesz m.in. notacji wykładniczej z potęgą liczby 10 o wykładniku ujemnym.

# Przeczytaj

Dzieląc liczbę $2^4$ przez liczbę $2^7$ możemy zapisać kolejno
$\frac{2^4}{2^7} = \frac{2^4}{2^{4+3}} = \frac{2^4}{2^4 \cdot 2^3}$,
co po uproszczeniu licznika i mianownika przez $2^4$ pozwala zapisać wynik w postaci $\frac{1}{2^3}$.

Z drugiej strony, stosując wzór na dzielenie potęg o tych samych podstawach moglibyśmy zapisać
$\frac{2^4}{2^7} = 2^{4-7} = 2^{-3}$.

W ten sposób otrzymaliśmy więc równość
$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Ten wstępny przykład jest ilustracją umowy, którą przyjmujemy określając potęgę niezerowej liczby rzeczywistej o wykładniku ujemnym.

**Definicja: potęga o wykładniku ujemnym**

Niech $n$ będzie liczbą naturalną dodatnią. Potęgą liczby rzeczywistej $a \neq 0$ o wykładniku $(-n)$ nazywamy liczbę:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

**Ważne!**

**Zachodzi równość:**

$$\frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

**więc liczbę $a^{-n}$ można również zdefiniować za pomocą równości:**

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

**Zatem dla dowolnych i różnych od zera liczb $a$ oraz $b$ prawdziwa jest równość:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Zauważmy, że dla liczby $a \neq 0$ i dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$ zachodzi równość:

$$a^n \cdot a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Jednocześnie

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0,$$

co tłumaczy, dlaczego przyjmujemy $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

**Przykład 1**

Bezpośrednio z definicji potęgi o wykładniku ujemnym oraz na podstawie podanych wyżej własności wynikają następujące równości:

- $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = (-3)^3 = -3^3 = -27$
- $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
- $(-0,625)^{-100} \cdot \left(-2\frac{14}{25}\right)^{-50} = \left(-\frac{5}{8}\right)^{-100} \cdot \left(-\frac{64}{25}\right)^{-50} =$
  $= \left(-\frac{8}{5}\right)^{100} \cdot \left(-\frac{25}{64}\right)^{50} = \left(\left(\frac{8}{5}\right)^2\right)^{50} \cdot \left(\frac{25}{64}\right)^{50} = \left(\frac{64}{25} \cdot \frac{25}{64}\right)^{50} = 1^{50} = 1.$

Jak widzimy z powyższych przykładów, działania na potęgach o wykładniku całkowitym dają się sprowadzić do operowania potęgami o wykładnikach naturalnych.
Tym sposobem można sprawdzić, że dla potęg o wykładnikach całkowitych prawdziwe są poniższe tożsamości.

**Ważne!**

**Dla dowolnych i różnych od zera liczb rzeczywistych $a$ i $b$ oraz dowolnych liczb całkowitych $m$ i $n$ prawdziwe są wzory:**

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Posługując się potęgami o wykładniku ujemnym, możemy w wygodny sposób zapisywać bardzo małe liczby.

**Przykład 2**

Zapiszemy podane wielkości z użyciem o potęg podstawie 10, pamiętając o zależnościach między jednostkami długości:

a. 1 milimetr zapiszemy w decymetrach,
b. 10 centymetrów zapiszemy w kilometrach,
c. 10 mikrometrów zapiszemy w metrach,

d. 1 nanometr zapiszemy w milimetrach.

Ponieważ:

- $1\ \mathrm{km} = 10^3\ \mathrm{m}$, tzn. 1 kilometr to $10^3$ metrów,
- $1\ \mathrm{m} = 10^9\ \mathrm{nm}$, tzn. 1 metr to $10^9$ nanometrów,
- $1\ \mathrm{m} = 10^6\ \mu\mathrm{m}$, tzn. 1 metr to $10^6$ mikrometrów,
- $1\ \mathrm{m} = 10^3\ \mathrm{mm}$, tzn. 1 metr to $10^3$ milimetrów,
- $1\ \mathrm{m} = 10^2\ \mathrm{cm}$, tzn. 1 metr to $10^2$ centymetrów,
- $1\ \mathrm{m} = 10^1\ \mathrm{dm}$, tzn. 1 metr to $10^1$ decymetrów,

więc:

a. $1\ \mathrm{mm} = 10^{-2}\ \mathrm{dm}$,
b. $10\ \mathrm{cm} = 10^{-4}\ \mathrm{km}$,
c. $10\ \mathrm{µm} = 10^{-5}\ \mathrm{m}$,
d. $1\ \mathrm{nm} = 10^{-6}\ \mathrm{mm}$.

**Już wiesz**

Jeśli liczba $x$ jest zapisana w postaci:

$$x = m \cdot 10^k,$$

gdzie $m$ jest liczbą spełniającą nierówność $1 \leq m < 10$, natomiast $k$ jest liczbą całkowitą, to mówimy, że liczba $x$ jest zapisana w **notacji wykładniczej**. Mówimy też wtedy, że liczba $x$ jest **rzędu** $10^k$.

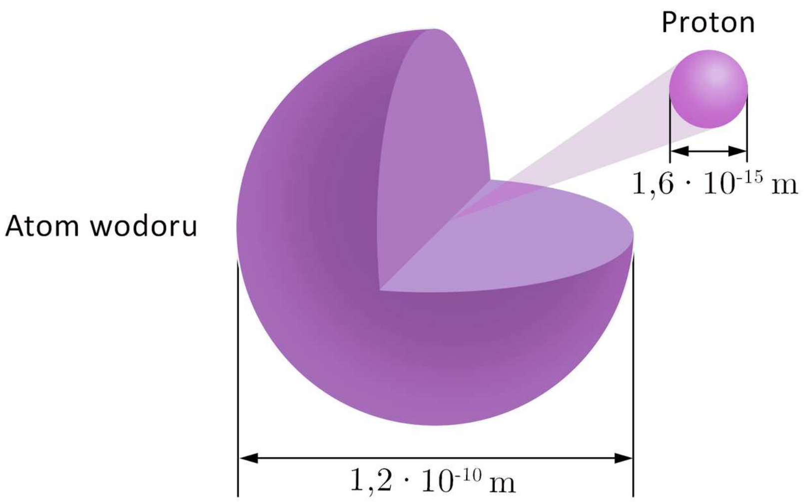
**Przykład 3**

Ułamek $0,00000000000046$ zapisujemy w notacji wykładniczej:

$0,00000000000046 = 4,6 \cdot 0,0000000000001 = 4,6 \cdot 10^{-13}$.

A zatem rozważany ułamek jest rzędu $10^{-13}$.

**Przykład 4**




Średnica protonu mierzona w metrach wynosi około $1,6 \cdot 10^{-15}$.

Skoro potęgi o ujemnym wykładniku całkowitym są wygodną formą zapisu bardzo małych liczb, więc również opisując świat w mikroskali korzystamy z notacji wykładniczej.

**Przykład 5**

Atom ma rozmiary rzędu $10^{-10}$ m, zaś jądro atomowe jest od niego $100000 = 10^5$ razy mniejsze. A zatem jądro atomowe ma rozmiary około:

$\frac{10^{-10}}{10^5} = \frac{1}{10^{10}} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{10^{15}} = 10^{-15}$ m.

**Przykład 6**

Obliczymy, ile razy większa jest rozwielitka o długości $3 \cdot 10^{-3}$ m od bakterii wielkości $2 \cdot 10^{-6}$ m.

Mamy:

$\frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^6}{10^3} = 1500.$

A zatem rozwielitka jest większa od bakterii 1500 razy.

**Przykład 7**

Magda tworzy model Układu Słonecznego, z modelem Ziemi wielkości grejpfruta o średnicy 15 cm.
Jak duża powinna być w modelu Magdy kulka przedstawiająca Księżyc?

Zauważmy, że ponieważ w zaproponowanym przez Magdę modelu Układu Słonecznego Ziemia ma średnicę $0,15$ m, a w rzeczywistości jej średnica jest równa około $1,3 \cdot 10^7$ m,

więc Magda wykonuje model Układu Słonecznego w skali
$s = \frac{0,15}{1,3 \cdot 10^7} \approx 0,0000000115384615 4 \approx 1,15 \cdot 10^{-8}$.

Posługując się zapisaną w notacji wykładniczej skalą $s$ obliczymy drugim sposobem, że w modelu Magdy:

- średnica Księżyca powinna być równa (w metrach) w przybliżeniu
$1,15 \cdot 10^{-8} \cdot 3,5 \cdot 10^6 = (1,15 \cdot 3,5) \cdot 10^{-8+6} =$
$= 4,025 \cdot 10^{-2} = 0,04025$,
czyli około 4 cm,

- odległość Księżyca od Ziemi powinna być równa w przybliżeniu
$1,15 \cdot 10^{-8} \cdot 3,8 \cdot 10^8 = (1,15 \cdot 3,8) \cdot 10^{-8+8} = 4,37$,
czyli około $4,5$ m.

Korzystając ze spostrzeżeń poczynionych powyżej obliczymy ponadto:

- jaką wielkość powinna mieć kula przedstawiająca Słońce w modelu Magdy,
- w jakiej odległości od grejpfruta przedstawiającego Ziemię powinna się ona znajdować.

Ponieważ Słońce ma średnicę około $1,4 \cdot 10^9$ m i znajduje się 150 milionów km od Ziemi, więc w modelu Magdy:

- kula przedstawiająca Słońce powinna mieć wielkość
$1,15 \cdot 10^{-8} \cdot 1,4 \cdot 10^9 \approx 16,10$ (m)
- i powinna się ona znajdować w odległości od modelu Ziemi o
$1,15 \cdot 10^{-8} \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 1730$ (m), czyli w odległości prawie dwóch kilometrów!

Na zakończenie pokażemy kilka przykładów ilustrujących poznane już wcześniej prawa działań na potęgach, tym razem stosowane z użyciem potęg o wykładniku ujemnym.

**Przykład 8**

Wykażemy, że 25% liczby $8^{-7}$ to $2^{-23}$.

Obliczamy:
$25\% \cdot 8^{-7} = \frac{1}{4} \cdot (2^3)^{-7} = \frac{2^{-21}}{2^2} = 2^{-21-2} = 2^{-23}$. Koniec dowodu

**Przykład 9**

Iloraz $\frac{(27^{-4}+81^{-3}+9^{-6})^5}{9^{22}+18 \cdot 9^{20}-10 \cdot 9^{21}}$ zapiszemy w postaci potęgi o podstawie 3.

Przekształcamy, korzystając z własności działań na potęgach:

$\frac{(27^{-4}+81^{-3}+9^{-6})^5}{9^{22}+18\cdot 9^{20}-10\cdot 9^{21}} = \frac{\left((3^3)^{-4}+(3^4)^{-3}+(3^2)^{-6}\right)^5}{9^{20}\cdot(9^2+18-10\cdot 9^1)} =$
$= \frac{\left(3^{3\cdot(-4)}+3^{4\cdot(-3)}+3^{2\cdot(-6)}\right)^5}{9^{20}\cdot(81+18-90)} = \frac{(3^{-12}+3^{-12}+3^{-12})^5}{9^{20}\cdot 9} =$
$= \frac{(3\cdot 3^{-12})^5}{9^{20+1}} = \frac{\left(3^{1+(-12)}\right)^5}{9^{21}} = \frac{(3^{-11})^5}{(3^2)^{21}} = \frac{3^{-11\cdot 5}}{3^{2\cdot 21}} = \frac{3^{-55}}{3^{42}} =$
$= 3^{-55-42} = 3^{-97}$.

**Przykład 10**

Rozpatrzmy liczbę $n = 32^{-4}$. Obliczymy ile składników równych $n$ musi mieć suma, która jest równa $4^{-5}$.

Przyjmijmy, że $4^{-5}$ jest sumą $k$ liczb równych $n$, to znaczy że zachodzi równość
$k \cdot n = 4^{-5}$.
Wtedy:
$k \cdot 32^{-4} = 4^{-5}$,
skąd
$k = \frac{4^{-5}}{32^{-4}} = \frac{(2^2)^{-5}}{(2^5)^{-4}} = \frac{2^{-10}}{2^{-20}} = 2^{-10-(-20)} = 2^{-10+20} = 2^{10} = 1024$.

Zatem rozpatrywana suma musi mieć $2^{10} = 1024$ składniki równe $n$.

# Słownik

**potęga liczby rzeczywistej o wykładniku naturalnym**

potęgą liczby rzeczywistej $a$ o wykładniku naturalnym $n \geq 2$ nazywamy liczbę
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$.
Liczbę $a$ nazywamy podstawą potęgi. Ponadto przyjmujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej $a^1 = a$ oraz dla $a \neq 0$ , $a^0 = 1$

**notacja wykładnicza**

jeśli liczba $x$ jest zapisana w postaci $x = m \cdot 10^k$, gdzie $m$ jest liczbą spełniającą nierówność $1 \leq m < 10$, natomiast $k$ jest liczbą całkowitą, to mówimy, że liczba $x$ jest zapisana w notacji wykładniczej.
Mówimy też wtedy, że liczba $x$ jest rzędu $10^k$

# Film edukacyjny

**Polecenie 1**

Zapoznaj się z poniższym filmem, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DMYacBkau

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej potęg.

---

**Polecenie 2**

Atomowa jednostka masy (oznaczana jako $\mathrm{u}$ od *unit*) to wielkość, za pomocą której wyraża się masę atomową związków chemicznych:
$1 \mathrm{~u} \approx 1,66 \cdot 10^{-24} \mathrm{~g}$.

Zapisz w kilogramach, używając notacji wykładniczej:

a. masą atomową tlenu, równą $16 \mathrm{~u}$,

b. masą atomową azotanu magnezu, równą $148 \mathrm{~u}$.

**Polecenie 3**

Porównaj wagę:
$3$ miliardów $500$ milionów mrówek, jeśli przyjmiemy, że masa każdej z nich to $0,3 \cdot 10^{-3} \mathrm{~g}$,
oraz $4$ tygrysów, jeśli przyjmiemy, że każdy z nich ma masę $2,7 \cdot 10^{2} \mathrm{~kg}$.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

### Ćwiczenie 1

### Ćwiczenie 2

### Ćwiczenie 3

### Ćwiczenie 4

### Ćwiczenie 5

### Ćwiczenie 6

### Ćwiczenie 7

### Ćwiczenie 8

### Ćwiczenie 9

Ile razy trzeba dodać do siebie liczbę $27^{-5}$ aby otrzymać $9^{-2}$?

### Ćwiczenie 10

Masa elektronu to $9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$, a masa protonu to $1,67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$.
Słoń waży $5,7\ \mathrm{t}$, a gęś kanadyjska waży $3,5\ \mathrm{kg}$.
Oznaczmy stosunek masy protonu do masy elektronu przez $k$, a stosunek masy słonia do masy gęsi kanadyjskiej przez $n$. Która liczba jest większa: $k$ czy $n$?

### Ćwiczenie 11

Wykaż, że liczba

$x = \frac{31^{-11}+31^{-10}+31^{-9}+31^{-8}+31^{-7}+31^{-6}+31^{-5}+31^{-4}}{(31^{-2}+31^{-4})\cdot(31^{-4}+31^{-8})}$

jest całkowita.

### Ćwiczenie 12

Rozpatrzmy liczbę $t = \frac{5^{-16}+11^{-16}}{5^{-17}+11^{-17}}$. Wykaż, że $t \in (5,\ 6)$.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Paweł Kwiatkowski

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Potęgi część 2**

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne (językiem ucznia):**

- wykonuje działania na potęgach o wykładniku ujemnym,
- wykonuje działania na potęgach o tej samej podstawie, w których występują potęgi o wykładniku ujemnym,
- porównuje wielkości występujące w przyrodzie wykorzystując m.in. notację wykładniczą z potęgą liczby o wykładniku ujemnym

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- praca z ekspertem
- liga zadaniowa

**Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

- Nauczyciel przedstawia uczniom temat lekcji, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
- Uczniowie przypominają prawa działań na potęgach.

**Faza realizacyjna:**

- Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów czterech ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach, każda pod kierunkiem eksperta. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
- Uczniowie zapoznają się z treścią materiału w sekcji „Film edukacyjny”. Następnie eksperci na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
- Uczniowie w grupach rozwiązują ćwiczenia 1-8 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

**Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do ustalonych na początku lekcji kryteriów sukcesu.

**Praca domowa:**

Uczniowie wykonują cwiczenia 9-12 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Działania na potęgach
- Działania na potęgach. Część II
- Potęgowanie potęgi

**Wskazówki metodyczne:**

Uczeń może wykorzystać film edukacyjny

- podczas przygotowywania się do zajęć;
- do utrwalania wiedzy;
- jako inspirację do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.