



Równania związane z proporcjonalnością odwrotną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równania związane z proporcjonalnością odwrotną

Źródło: Austris Augusts, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>, domena publiczna.

„Dajcie mi punkt podparcia, a poruszę Ziemię”. Czy wiesz kto i kiedy wypowiedział te słowa? To grecki filozof, matematyk i wynalazca – Archimedes. Urodził się, żył i zginął w Syrakuzach na Sycylii. Wykształcenie zdobył w Aleksandrii. Ten słynny cytat dotyczy odkrycia Archimedesesa w zakresie wykorzystania tzw. dźwigni dwuramiennej. Uczonego Greka fascynowały proporcje – nie tylko w geometrii, ale również w praktyce. Zauważył mianowicie, że siła przyłożona do dźwigni jest odwrotnie proporcjonalna do długości jej ramienia, tzn. im dłuższe ramię, tym mniejszą siłę możemy zastosować, aby unieść ciężar znajdujący się na drugim ramieniu dźwigni. Dźwignie są powszechnie stosowane jako elementy bardziej skomplikowanych mechanizmów lub jako samodzielne urządzenia. Jednym z najprostszych przykładów jest łom. Często urządzenia wykorzystujące zasadę dźwigni nazywane są potocznie lewarkiem od angielskiego terminu lever oznaczającego dźwignię właśnie.

W sztukach walki znany jest chwyt o nazwie dźwignia wykorzystujący tę samą zasadę.

Archimedes pragnął użyć dźwigni, na której jednym końcu umieściłby naszą planetę, zaś na drugim, odpowiednio długim ramieniu, mógłby przyłożyć niewielką siłę. Pomijając fakt, że dźwignia taka musiałaby być niezwykle długa (około biliarda lat świetlnych!), to brakowało mu właśnie punktu podparcia.

Sam Archimedes uważał podobno za najważniejsze swoje odkrycie dowód, że stosunek objętości kuli do objętości opisanego na niej walca wyraża się stosunkiem liczb 2 : 3. Blisko sto lat po śmierci Archimedesa w 212 r. p.n.e. zadanej przez rzymskiego żołnierza, Cynceron odnalazł jego grób, który poznał po wyrytej na nagrobku kuli z opisanym na niej walcem.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania wymierne.
- Zastosujesz własności wielkości odwrotnie proporcjonalnych w zadaniach z kontekstem realistycznym.
- Wykorzystasz wykres proporcjonalności odwrotnej do rozwiązywania zadań.
- Dobierzesz i zaplanujesz strategię rozwiązania zadania.

Przeczytaj

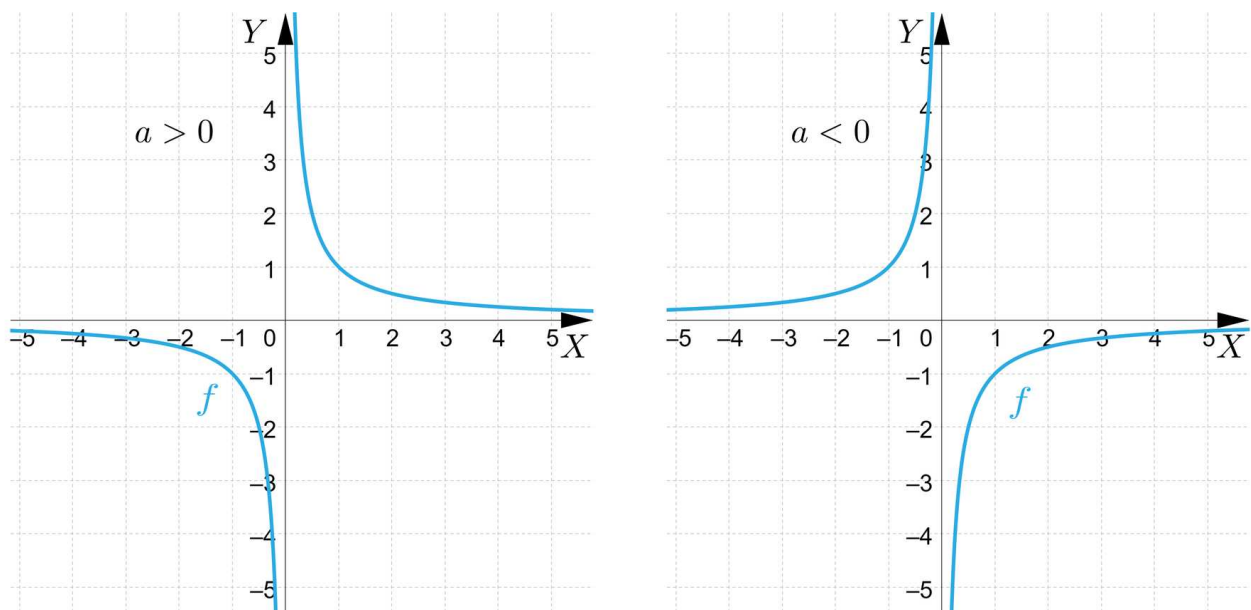
Proporcjonalnością odwrotną nazywamy zależność między wielkościami x i y postaci

$$y = \frac{a}{x}$$

gdzie:

$x \neq 0$ i $a \neq 0$. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej**.

Wykresem proporcjonalności odwrotnej jest krzywa zwana **hiperbolą**. Położenie hiperboli w układzie współrzędnych uzależnione jest od znaku współczynnika proporcjonalności a :



Jak pokazują wykresy, proporcjonalność odwrotna jest funkcją, która nie posiada miejsc zerowych; jej dziedziną, a także zbiorem wartości, jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dla $a > 0$ proporcjonalność odwrotna jest funkcją **malejącą**, natomiast dla $a < 0$ funkcją **rosnącą**.

Jeżeli hiperbolę przesuniemy wzdłuż osi X o p jednostek ($p > 0$ w prawo, $p < 0$ w lewo), otrzymamy funkcję o wzorze:

$$f(x) = \frac{a}{x-p}$$

Jeżeli hiperbolę przesuniemy wzdłuż osi Y o q jednostek ($q > 0$ w górę, $q < 0$ w dół), otrzymamy funkcję o wzorze:

$$f(x) = \frac{a}{x} + q$$

Po przesunięciu wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi X lub/i Y otrzymamy funkcję **homograficzną**, której postać kanoniczna wyraża się wzorem:

$$f(x) = \frac{a}{x-p} + q$$

Proste o równaniach $x = p$ oraz $y = q$ są wówczas **asymptotami** wykresu funkcji homograficznej.

Inną postacią funkcji homograficznej jest:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Przykład 1

Rozwiążemy algebraicznie równanie: $\frac{6}{x} - 1 = \frac{2}{x-1}$ oraz przedstawimy jego ilustrację graficzną.

Rozwiązanie:

$$\frac{6}{x} - 1 = \frac{2}{x-1}$$

Określimy dziedzinę równania: $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Pomnożymy obustronnie dane równanie przez iloczyn $x(x-1)$.

Otrzymamy wówczas równanie równoważne: $6(x-1) - x(x-1) = 2x$

$$6x - 6 - x^2 + x - 2x = 0$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{-5-1}{-2} = 3 \text{ oraz } x_2 = \frac{-5+1}{-2} = 2.$$

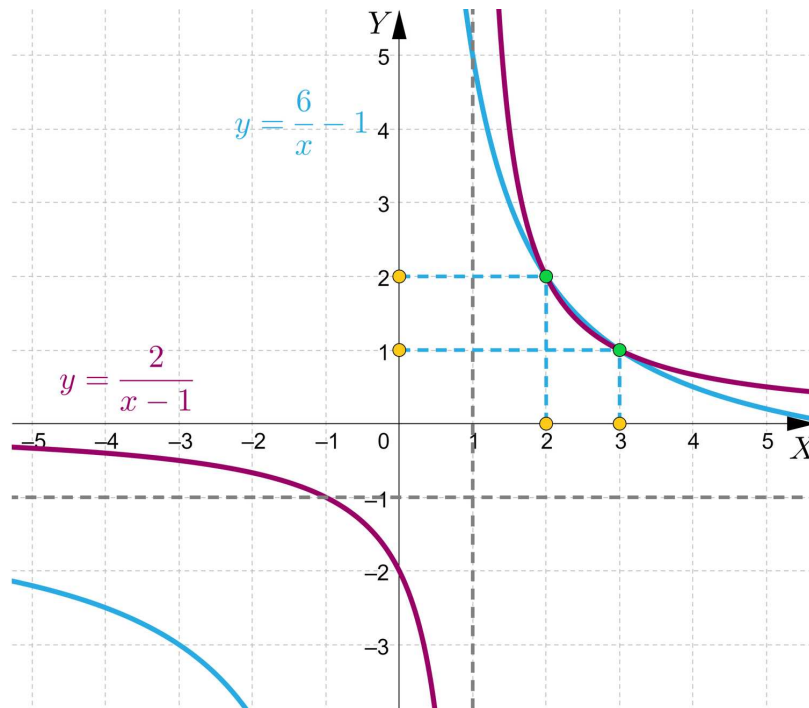
Sprawdzamy, czy uzyskane rozwiązania należą do dziedziny równania, tj. do zbioru $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Odpowiedź:

Równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 3$ oraz $x_2 = 2$.

Ilustracja graficzna równania sprowadza się do pokazania punktów wspólnych wykresów funkcji, znajdujących się po obu stronach równania, tj. $f(x) = \frac{6}{x} - 1$ oraz $g(x) = \frac{2}{x-1}$.

Sporządzimy zatem wykresy tych funkcji.



Wykresy funkcji mają dwa punkty wspólne: **odcięte** tych punktów to rozwiązania równania, a rzędne są równe wartościom obu funkcji dla $x = 2$ oraz $x = 3$:

$$f(2) = g(2) = 2,$$

$$f(3) = g(3) = 1.$$

Zatem wykresy przecinają się w punktach o współrzędnych $(2, 2)$ oraz $(3, 1)$.

Ważne!

Zwróć uwagę na to, że ilustracja graficzna nie zawsze jest czytelna i nie powinna służyć jako jedyne rozwiązanie zadania, a tylko jako sprawdzenie poprawności obliczeń.

Przykład 2

Wyznamy współrzędne punktów A i B przecięcia wykresów funkcji $f(x) = \frac{4}{x+3}$ oraz $g(x) = x^2$, a następnie wyznaczmy taki punkt C należący do wykresu funkcji f , który wraz z punktami A i B tworzy trójkąt równoramienny o podstawie AB .

Rozwiązanie:

Rozwiążemy równanie: $\frac{4}{x+3} = x^2$, gdzie $x \neq -3$.

Po wykonaniu przekształceń równoważnych otrzymujemy równanie wielomianowe stopnia trzeciego:

$$4 = x^2(x + 3)$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0.$$

Aby rozwiązać to równanie, posłużymy się twierdzeniem o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. Nietrudno zauważyć, że jednym z rozwiązań równania jest $x = 1$. Możemy zatem podzielić wielomian $(x^3 + 3x^2 - 4)$ przez dwumian $(x - 1)$ w celu zapisania go w postaci iloczynowej:

$$(x^3 + 3x^2 - 4) : (x - 1) = x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4x + 4)(x - 1)$$

Zauważmy także, że trójmian w pierwszym nawiasie jest rozwinięciem kwadratu sumy, więc otrzymujemy następującą postać iloczynową równania:

$$(x + 2)^2(x - 1) = 0.$$

Rozwiązaniami równania są zatem liczby: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 1$.

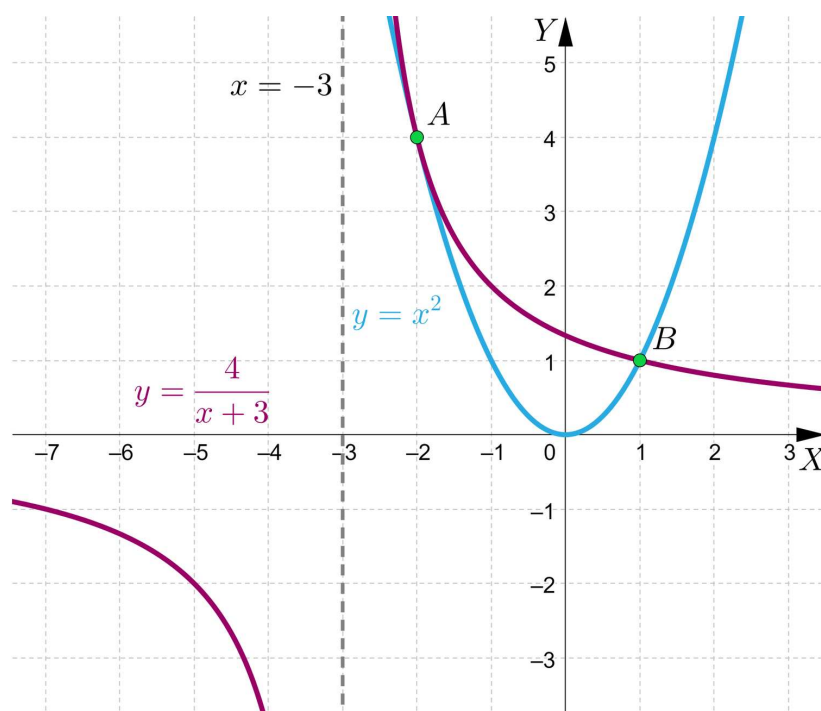
Są to jednocześnie odcięte punktów przecięcia wykresów funkcji f oraz g .

Ustalimy teraz **rzędne** tych punktów: $f(-2) = g(-2) = 4$ oraz $f(1) = g(1) = 1$.

Szukane punkty mają współrzędne: $A = (-2, 4)$ oraz $B = (1, 1)$.

Rozwiążemy graficznie równanie $\frac{4}{x+3} = x^2$, celem ustalenia położenia punktów A i B .

Wykresem funkcji $f(x) = \frac{4}{x+3}$ jest **hiperbola**, której asymptotą pionową jest prosta $x = -3$ i która powstaje przez przesunięcie wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{4}{x}$ o 3 jednostki w lewo. Wykresem zaś funkcji $g(x) = x^2$ jest parabola o wierzchołku w początku układu współrzędnych i ramionach skierowanych ku górze. Obie krzywe przechodzą przez punkty A i B .



Poszukamy punktu C położonego na wykresie funkcji f takiego, że $|AC| = |BC|$.

Punkt C ma współrzędne $(x, \frac{4}{x+3})$. Wyznamy długości odcinków AC oraz BC , korzystając ze wzoru na długość odcinka:

$$A = (-2, 4), B = (1, 1), C = (x, \frac{4}{x+3})$$

$$|AC| = \sqrt{(x+2)^2 + (\frac{4}{x+3} - 4)^2}$$

$$|BC| = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{4}{x+3} - 1)^2}$$

$$|AC| = |BC|$$

$$\text{Stąd } \sqrt{(x+2)^2 + (\frac{4}{x+3} - 4)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{4}{x+3} - 1)^2}$$

$$\text{oraz } (x+2)^2 + (\frac{4}{x+3} - 4)^2 = (x-1)^2 + (\frac{4}{x+3} - 1)^2.$$

Po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia, redukcji i uporządkowaniu wyrazów, otrzymujemy:

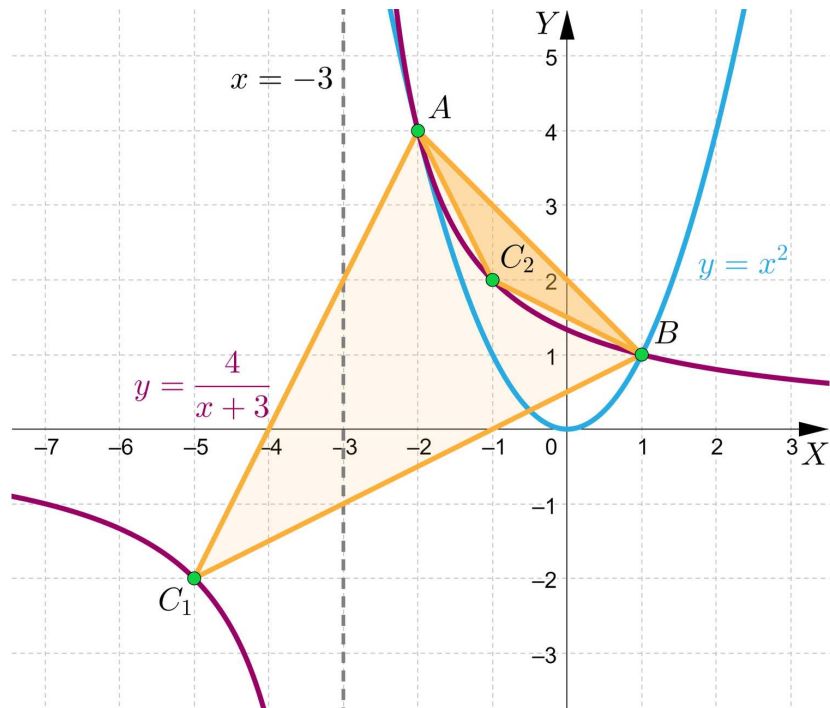
$$18 + 6x - \frac{24}{x+3} = 0.$$

Następnie po pomnożeniu obu stron równania przez $(x+3)$ i ponownym uporządkowaniu dostajemy:

$$x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $x_1 = -5$ oraz $x_2 = -1$.

Zatem istnieją dwa takie punkty $C_1 = (-5, -2)$ oraz $C_2 = (-1, 2)$, będące wraz z punktami A i B wierzchołkami trójkąta równoramiennego, co ilustruje poniższa grafika.



Przykład 3

Uczniowie klasy III a wynajęli autokar wycieczkowy, płacąc kwotą 3600 zł. Tuż przed wycieczką aż sześcioro uczniów tej klasy musiało pozostać w kwarantannie domowej, co podwyższyło koszt wynajęcia autokaru o 20 zł dla każdego uczestnika. Obliczymy, ilu uczniów miało pierwotnie uczestniczyć w wycieczce.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x liczbę uczniów, którzy mieli uczestniczyć w wycieczce, a przez y koszt wynajęcia autokaru przypadający na jednego uczestnika. Zatem $x \cdot y = 3600$ złotych.

Ponieważ jednak ostatecznie w wycieczce uczestniczyło $(x - 6)$ uczniów, a koszt jednostkowy wzrósł do kwoty $(y + 20)$ zł, więc $(x - 6)(y + 20) = 3600$.

Rozwiążemy zatem układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, przyjmując założenia, że $x > 6$ oraz $y > 0$.

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ (x - 6)(y + 20) = 3600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ xy + 20x - 6y - 120 = 3600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ 3600 + 20x - 6y - 120 = 3600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ 20x - 6y - 120 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ 20x - 120 = 6y \mid : 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ y = \frac{10}{3}x - 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(\frac{10}{3}x - 20\right) = 3600 \\ y = \frac{10}{3}x - 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{10}{3}x^2 - 20x = 3600 \mid : 10 \\ y = \frac{10}{3}x - 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - 2x = 360 \mid \cdot 3 \\ y = \frac{10}{3}x - 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x = 1080 \\ y = \frac{10}{3}x - 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 1080 = 0 \\ y = \frac{10}{3}x - 20 \end{cases}$$

$$\Delta = 36 + 4 \cdot 1080 = 4356$$

$$\sqrt{\Delta} = 66$$

$$x_1 = -30, x_2 = 36$$

Pierwsze z rozwiązań nie odpowiada warunkom zadania ($x > 6$), zatem rozwiązaniem jest $x = 36$.

Warto sprawdzić otrzymany rezultat, tzn. ustalić, że wobec uczestnictwa w wycieczce 36 osób, każdy zapłaciłby za wynajem autokaru $3600 : 36 = 100$ złotych.

W sytuacji rezygnacji 6 uczestników kwota wynajmu musiałaby obciążyć 30 osób, które zapłaciłyby po $3600 : 30 = 120$ złotych, a więc koszt jednostkowy wzrósłby o 20 zł, co jest zgodne z treścią zadania.

Odpowiedź:

Pierwotnie w wycieczce miało uczestniczyć 36 uczniów.

Przykład 4

Tata Anki kupuje paliwo zawsze za tę samą kwotę pieniędzy. W lutym cena paliwa wynosiła 4 zł za litr i tata Anki zatankował 45 litrów paliwa, jednak miesiąc później (w

marcu) cena wzrosła o 12,5%, a w kolejnym miesiącu (kwietniu) tata Anki kupił o 2,5 litra paliwa mniej niż w marcu. W maju natomiast, po kolejnych podwyżkach cen paliw, zatankował o 1,5 litra paliwa mniej niż w poprzednim miesiącu.

a) Zapiszemy wzór funkcji wyrażającej zależność między ceną jednego litra paliwa a ilością zatankowanych litrów, przy stałej kwocie przeznaczonej na ten zakup.

b) Obliczymy cenę paliwa w marcu, kwietniu i maju oraz liczbę litrów paliwa, które zatankował tata Anki w tych miesiącach.

c) Sporządzimy wykres tej zależności.

Rozwiązanie:

a) Oznaczmy przez x cenę 1 litra paliwa, a przez y liczbę litrów, którą można kupić za ustaloną kwotę pieniędzy.

Obliczymy teraz, jaką kwotę pieniędzy przeznacza każdorazowo tata Anki na zakup paliwa:

$$4 \cdot 45 = 180.$$

Zatem wzór szukanej zależności to

$$y = \frac{180}{x}, \text{ gdzie } x > 0.$$

b) Obliczymy cenę paliwa w marcu:

$$4 \text{ zł} \cdot 1,125 = 4,50 \text{ zł}$$

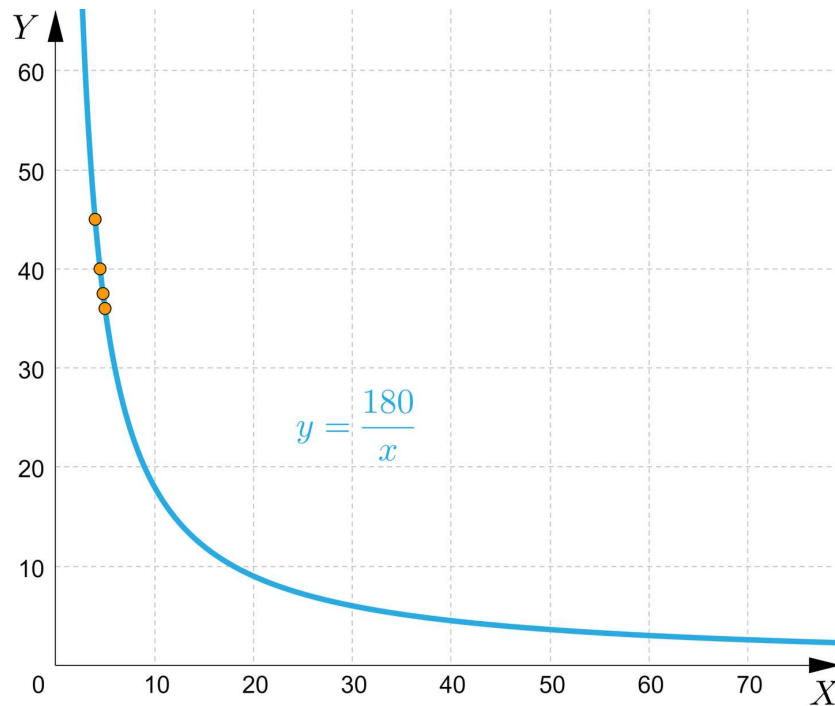
oraz liczbę litrów paliwa, które zakupił tata Anki za stałą kwotę 180 zł:

$$180 : 4,50 = 40.$$

Dalsze obliczenia przedstawimy w tabeli:

	luty	marzec	kwiecień	maj
Cena paliwa [zł]	4	4,50	$180 : 37,5 = 4,80$	$180 : 36 = 5$
Ilość [l]	45	40	37,5	36

c)



Słownik

hiperbola

krzywa będąca zbiorem takich punktów, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości tych punktów od dwóch ustalonych punktów, nazywanych ogniskami hiperboli, jest stała

asymptota krzywej

prosta jest asymptotą danej krzywej, jeśli dla punktu oddalającego się nieograniczenie wzdłuż krzywej, odległość tego punktu od prostej dąży do zera; asymptota funkcji to asymptota krzywej stanowiącej wykres funkcji

odcięta

pierwsza współrzędna punktu w kartezjańskim układzie współrzędnych (zwanym też prostokątnym układem współrzędnych), również inna nazwa osi X

rzędna

druga współrzędna punktu w kartezjańskim układzie współrzędnych (zwanym też prostokątnym układem współrzędnych), oznaczana jest przeważnie symbolem y , również inna nazwa osi Y

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się poniższą prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj polecenie 2.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Do1mTnEDD>

Polecenie 2

Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna $f(x) = \frac{-x-5}{x+2}$ jest rosnąca w przedziale $(-2, \infty)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Hiperbola $f(x) = \frac{5}{x}$ ma z prostą $y = 2x + a^2$ punkt wspólny o odciętej $\frac{1}{2}$ dla:

$a = 3$

$a = -3$

$a \in \{-3, 3\}$

$a = 9$

Ćwiczenie 2



Przeciwnij poprawną odpowiedź.

Miejszem zerowym funkcji $f(x) = \frac{-2}{x+5} - 6$ jest liczba

Ćwiczenie 3



Punkt $A = (p, q)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x-3}$, gdzie $x \neq 3$ oraz do prostej o równaniu $y = x - 4$. Wyznacz współrzędne punktu A . Sporządź interpretację graficzną zadania.

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Wyznacz całkowitą liczbę dodatnią o tej własności, że podwojona suma tej liczby i jej odwrotności jest równa 5. Przedstaw ilustrację graficzną zadania. Czy można to zrobić na więcej niż jeden sposób?

Ćwiczenie 6



Rozwiąż równanie: $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{9}{20}$.

Ćwiczenie 7



Dany jest okrąg o równaniu $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 5 = 0$, styczny do obu gałęzi hiperboli $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$. Wiedząc, że jeden z punktów styczności ma współrzędne $(5, -4)$, wyznacz współrzędne drugiego punktu styczności oraz wzór funkcji, której wykresem jest ta hiperbola.

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja $f(x) = \frac{-2x+5}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$. Wyznacz wszystkie punkty wykresu tej funkcji o obu współrzędnych całkowitych i wykaż, że trójkąt utworzony przez dowolne trzy z nich jest prostokątny.

Dla nauczyciela

Autor: Karolina Nowak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania związane z proporcjonalnością odwrotną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;

6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$.

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto rozwiązuje układy równań kwadratowych

$$x^2 + y^2 + ax + by = cx^2 + y^2 + dx + ey = f.$$

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie kwadratowe, wielomianowe, wymierne
- przekształca wyrażenia wymierne
- identyfikuje wielkości odwrotnie proporcjonalne
- stosuje własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$
- przekształca wzory i wykorzystuje własności funkcji homograficznych
- dokonuje analizy informacji i wyciąga wnioski, weryfikuje wyniki działań
- argumentuje i uzasadnia swoje działania
- integruje wiadomości i umiejętności z różnych działów matematyki

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- dyskusja
- obserwacja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach/małych grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Wprowadzenie” oraz „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa cele lekcji i kryteria sukcesu w języku ucznia.
2. Nauczyciel inicjuje rozmowę z uczniami na temat rozwiązywania równań różnych typów. Wspólnie z uczniami przypomina sposoby postępowania i techniki użyteczne w omawianych sytuacjach.
3. Nauczyciel zadaje pytania kontrolne dotyczące przykładów z sekcji „Przeczytaj”, aby uzyskać informację o stopniu zrozumienia przez uczniów opisanych przykładów. Jeśli uczniowie nie poruszą tego tematu wskazane byłoby omówienie innego sposobu, niż wskazany w przykładzie 2 w sekcji „Przeczytaj”, rozkładu wielomianu stopnia trzeciego na czynniki liniowe.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z załączoną infografiką i na jej podstawie realizują Polecenie 2. Jeśli zachodzi taka konieczność, nauczyciel może zaproponować inne analogiczne przykłady, aby nabrać przekonania o zrozumieniu przez uczniów zaprezentowanego algorytmu postępowania.
2. Uczniowie tworzą 3 – 4 osobowe zespoły (najlepiej 8 zespołów, jeśli więc klasa jest mało liczna, to tworzą pary), których zadaniem jest wspólne omówienie i wyjaśnienie sobie nawzajem po jednym ćwiczeniu 5 – 8, wskazanym przez nauczyciela, spośród zamieszczonych w sekcji „Sprawdź się”. Nad każdym z czterech ćwiczeń pracują dwa zespoły.
3. Każde dwa zespoły pracujące nad jednakowym ćwiczeniem łączą się w większą grupę i w tym gronie porównują rezultaty, ustalają poprawność zastosowanych rozwiązań, wyjaśniają wątpliwości. W razie konieczności proszą o rozstrzygnięcie nauczyciela.

4. Nauczyciel kontroluje pracę zespołów, koryguje błędy i wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
5. Zespoły delegują po jednym przedstawicielu, który przedstawia rozwiązanie uzgodnione w grupie, na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie zgłaszają ewentualne pytania w nawiązaniu do ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się” i wspólnie z nauczycielem je rozstrzygają.
2. Nauczyciel inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Jaką wcześniejszą wiedzę i umiejętności wykorzystali na lekcji? Co było dla nich (lub nadal jest) trudne bądź niezrozumiałe?
3. Jeśli nauczyciel widzi taką potrzebę może zastosować na podsumowanie sygnalizację świetlną: uczniowie indywidualnie przypisują poszczególnym umiejętnościom określonym w kryteriach sukcesu kolory: zielony – wszystko zrozumiałe, żółty – zrozumiałe częściowo i czerwony – niezrozumiałe.

Praca domowa:

Zadaniem dla wszystkich uczniów jest wykonanie ćwiczeń 1 – 4 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Proporcjonalność odwrotna](#)
- [Wielkości odwrotnie proporcjonalne](#)

Wskazówki metodyczne:

- Szczególną uwagę warto zwrócić na zadanie zamieszczone w Przykładzie 2 w sekcji „Przeczytaj” i pokazać uczniom nietypowy sposób rozkładu wielomianu stopnia trzeciego na czynniki liniowe.
- Warto także w tym samym przykładzie pokazać uczniom różnicę w geometrycznym położeniu dwóch punktów wspólnych paraboli i hiperboli w konfrontacji z zapisem algebraicznym równania, którego pierwiastki stanowią odcięte tych punktów (znaczenie pierwiastka podwójnego).
- Prezentację multimedialną nauczyciel może wykorzystać jako uzupełnienie tematu „Monotoniczność funkcji”.