



Płaszczyzny przecinające się

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Płaszczyzny przecinające się

Źródło: Joel Filipe, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Każda płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie przez trzy różne punkty niewspółliniowe, dwie proste przecinające się lub prostą i punkt, który do niej nie należy. Rozpatruje się różne możliwości wzajemnego położenia płaszczyzn. Okazuje się, że dwie płaszczyzny mogą się pokrywać (czyli każdy punkt z jednej płaszczyzny jest punktem drugiej płaszczyzny), być równoległe (wtedy nie mają punktów wspólnych) lub przecinać się. W materiale zajmiemy się tym ostatnim przypadkiem.

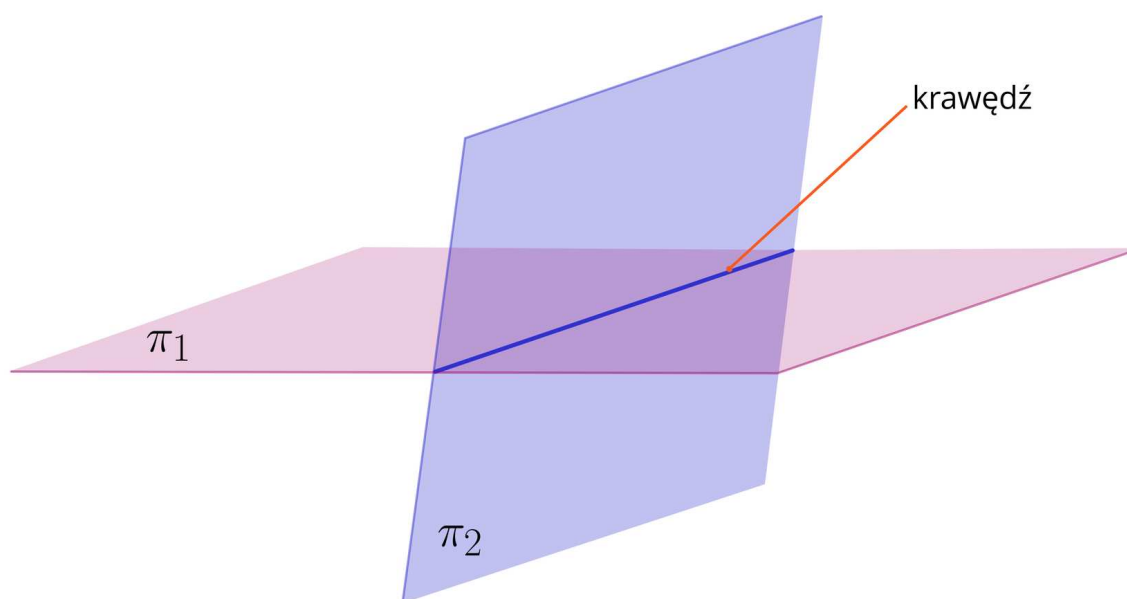
Twoje cele

- Zdefiniujesz, kiedy dwie płaszczyzny się przecinają.
- Rozpoznasz płaszczyzny przecinające się.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

Przeczytaj

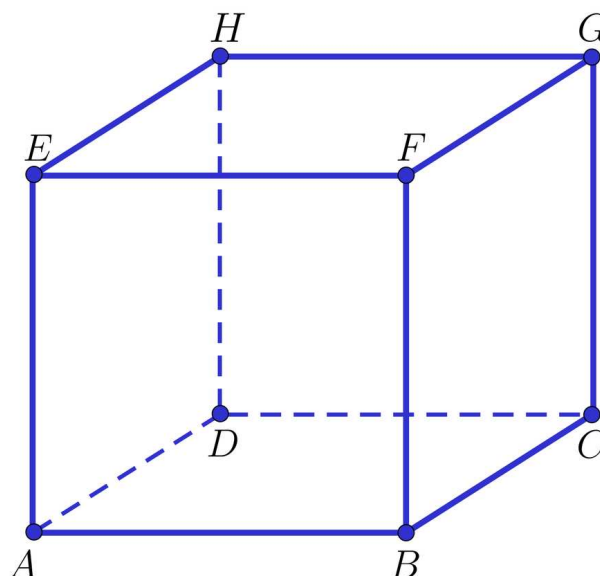
Definicja: płaszczyzny przecinające się

Dane są płaszczyzny π_1 i π_2 . Mówimy, że płaszczyzny π_1 i π_2 są przecinające się, gdy mają wspólną prostą, zwaną krawędzią.



Przykład 1

Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDEFGH$. Wskażemy płaszczyzny zawierające ściany sześcianu, które przecinają się z płaszczyzną $ADHE$.

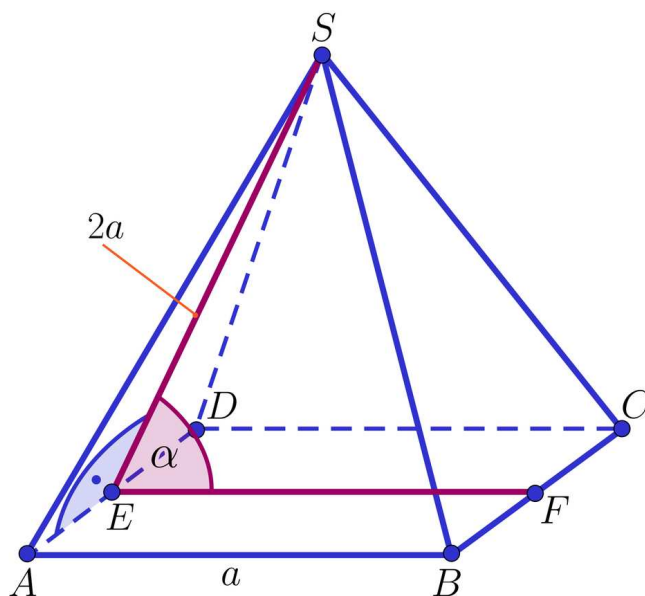


Rozwiązanie:

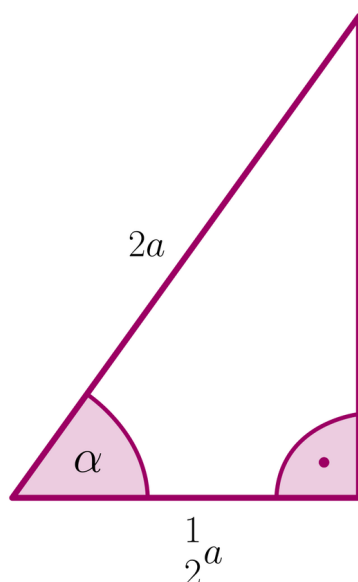
Płaszczyzny zawierające ściany sześcianu, które przecinają się z płaszczyzną zawierającą ścianę $ADHE$, to: $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$, $DCGH$.

Przykład 2

Obliczymy miarę kąta α pomiędzy płaszczyznami zawierającymi ściany ADS i $ABCD$ w **ostrosłupie prawidłowym czworokątnym** o wymiarach, jak na rysunku.

**Rozwiązanie:**

Do wyznaczenia miary kąta α wystarczy rozpatrzyć trójkąt prostokątny, jak na poniższym rysunku.



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznej cosinus, mamy, że:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{2a} = \frac{1}{4}$$

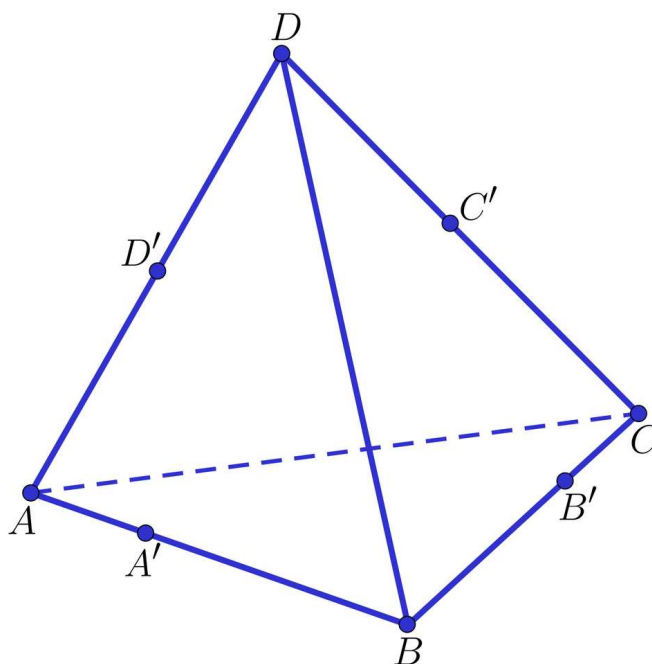
Jeżeli wykorzystamy tablice wartości funkcji trygonometrycznych, to odczytujemy, że $\alpha \approx 75^\circ$.

Wiadomości wykorzystane w kolejnych dwóch przykładach wykraczają poza podstawę programową matematyki, ale są ciekawym uzupełnieniem poruszanej tematyki.

Twierdzenie: twierdzenie Cevy

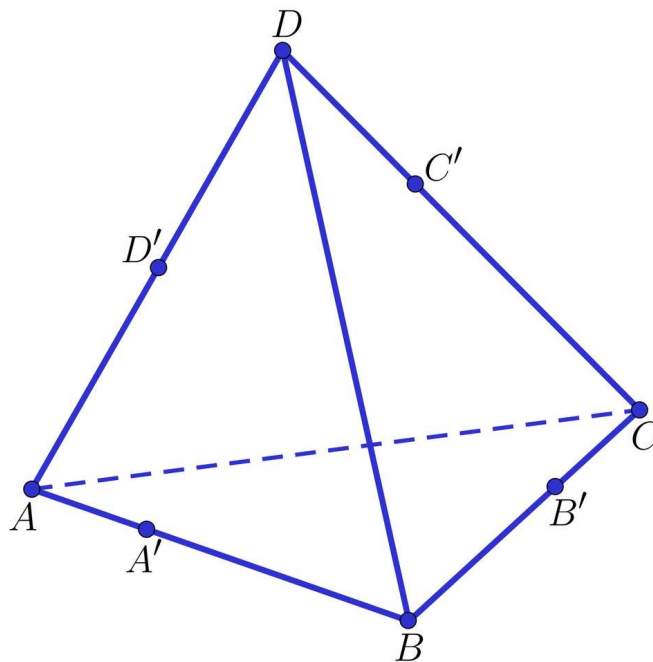
Dany jest czworościan $ABCD$ i punkty A' , B' , C' , D' leżące odpowiednio na krawędziach AB , BC , CD , DA . Płaszczyzny ABC' , BCA' , CDD' , DAB' przecinają się w jednym punkcie wtedy, gdy zachodzi warunek:

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = 1.$$



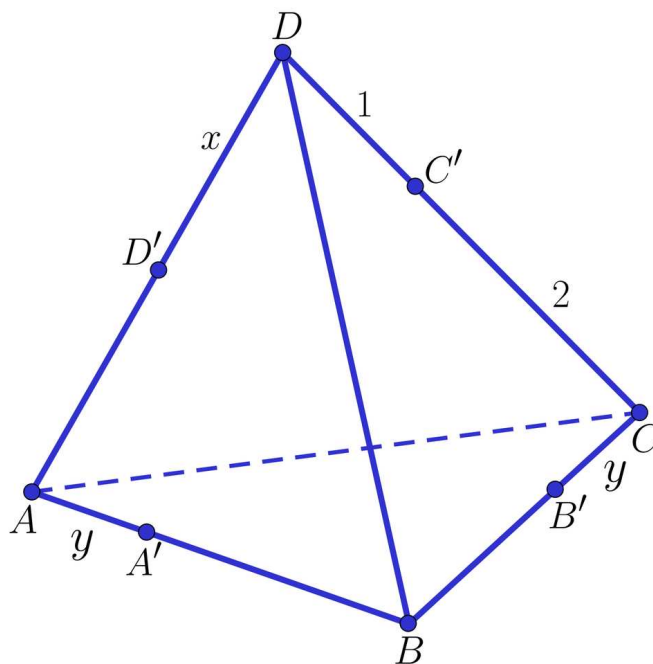
Przykład 3

Obliczymy długość odcinka DD' , jeżeli krawędź czworościanu foremnego z rysunku ma długość 3 oraz $|AA'| = |B'C|$, $|CC'| = 2$, $|C'D| = 1$ oraz płaszczyzny ABC' , BCD' , CDA' , DAB' przecinają się w jednym punkcie.



Rozwiązanie:

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia na rysunku.



Korzystając z twierdzenia Cevy, wykorzystujemy zależność:

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = 1$$

Zatem:

$$\frac{y}{3-y} \cdot \frac{3-y}{y} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{x}{3-x} = 1$$

Wobec tego:

$$\frac{2x}{3-x} = 1$$

$$2x = 3 - x$$

$$x = 1.$$

Ciekawostka

Jeżeli płaszczyzny są opisane za pomocą równań w postaci ogólnej, określa się warunki, kiedy te płaszczyzny się przecinają.

Dwie płaszczyzny zadane [równaniami w postaci ogólnej](#):

$$Q: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \text{ gdzie } A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R} \text{ oraz } A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$$

$$T: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \text{ gdzie } A_2, B_2, C_2 \in \mathbb{R} \text{ oraz } A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$$

przecinają się wtedy, gdy:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ lub } \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ lub } \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Przykład 4

Określimy, czy istnieje wartość parametru m taka, że płaszczyzny zadane równaniami ogólnymi $Q: mx + 2y + z + 1 = 0$ oraz $T: -6x + 6y + 3z + 3 = 0$ przecinają się.

Rozwiązanie:

Odczytujemy wartości współczynników w równaniach płaszczyzn Q i T .

$$\text{Zatem } A_1 = m, B_1 = 2, C_1 = 1, A_2 = -6, B_2 = 6, C_2 = 3.$$

Obliczamy wartości odpowiednich wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = m \cdot 6 - 2 \cdot (-6) = 6m + 12$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 6 - 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) - m \cdot 3 = -6 - 3m$$

Płaszczyzny przecinają się, gdy co najmniej jeden z wyznaczników jest różny od 0.

Zatem:

$$6m + 12 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$$

$$-6 - 3m \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$$

Wobec tego dla $m \neq -2$ podane płaszczyzny się przecinają.

Słownik

równanie płaszczyzny

równanie postaci $Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

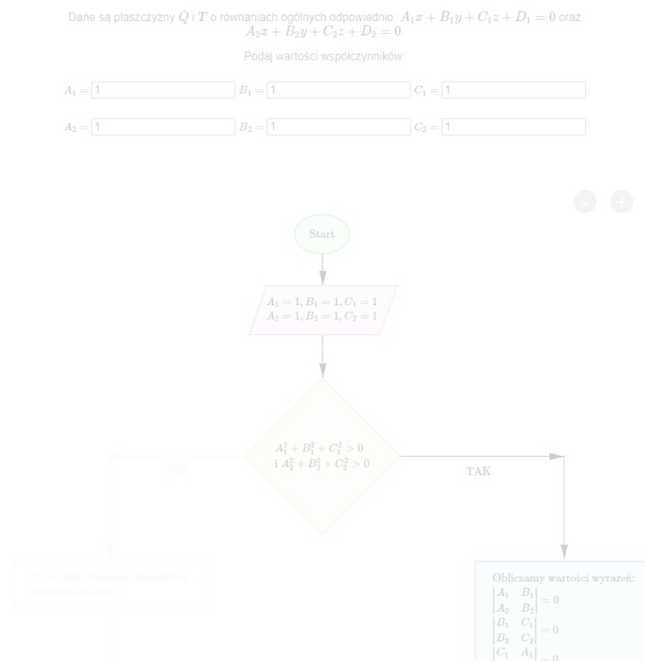
ostrosłup prawidłowy czworokątny

ostrosłup, który ma w podstawie kwadrat

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, dotyczącego płaszczyzn przecinających się, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D123x94ol>

Polecenie 2

Sprawdź, czy płaszczyzny Q i T przecinają się, jeżeli są określone równaniami w postaci ogólnej:

a) $Q: -5x + 4y - 2z = 0$ oraz $T: -x - 3y + 2z = 0$

b) $Q: -2x - 1y + 2z - 8 = 0$ oraz $T: -4x + 2y - 4z - 3 = 0$

Polecenie 3

Zbuduj algorytm sprawdzający, czy płaszczyzny Q i T o równaniach ogólnych odpowiednio: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ przecinają się.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Dwie płaszczyzny się przecinają, gdy:

☐ każdy punkt jednej płaszczyzny należy też do drugiej płaszczyzny.

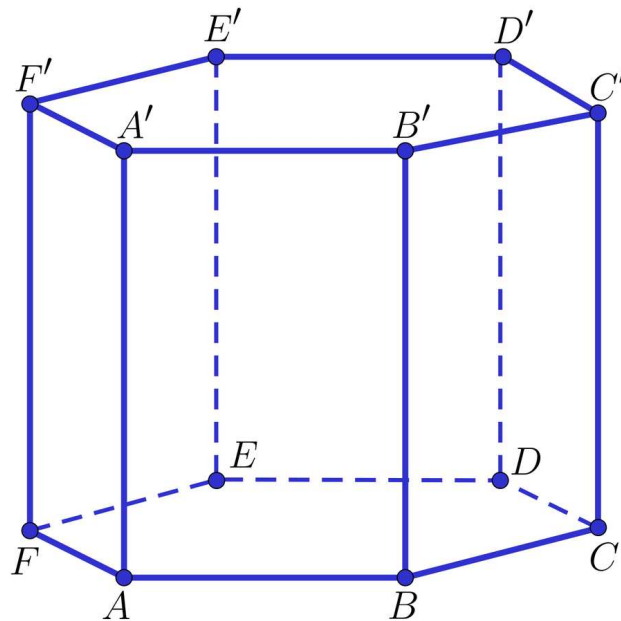
☐ ich częścią wspólną jest prosta.

☐ są równoległe.

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy sześciokątny.



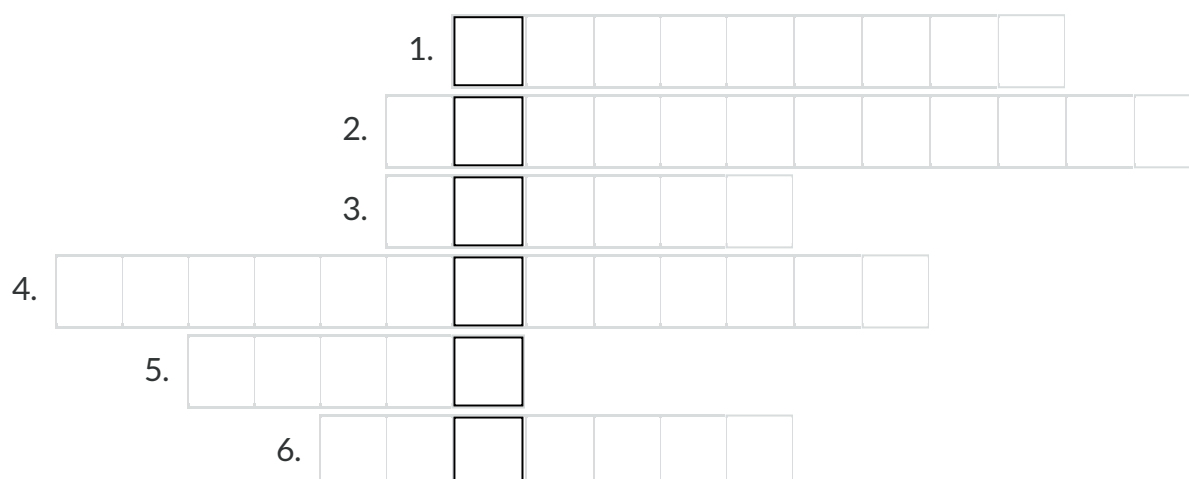
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Każde dwie sąsiednie ściany graniastostupa przecinają się pod kątem prostym.
- ☐ Częścią wspólną płaszczyzn zawierających podstawy tego graniastostupa jest punkt.
- ☐ Płaszczyzny zawierające ściany $BCC'B'$ oraz $DCC'D'$ przecinają się pod kątem, którego miara wynosi 120° .
- ☐ Płaszczyzny zawierające ściany $ABB'A'$ i $EDD'E'$ nie przecinają się.

Ćwiczenie 3



Rozwiąż krzyżówkę, wpisując litery w odpowiednie pola.



1. Określa się je w przypadku płaszczyzn, prostych, czy odcinków.
2. Płaszczyzny mające wspólną krawędź.
3. Na przykład ogólna równania płaszczyzny.
4. Bryła geometryczna, w której płaszczyzna przechodząca przez dowolną ścianę boczną przecina się z czterema innymi płaszczyznami, zawierającymi ściany tej bryły.
5. Jedno z pojęć pierwotnych w geometrii Euklidesa.
6. Część wspólna płaszczyzn przecinających się.

Ćwiczenie 4



Przeciągnij poprawną wartość w puste pole.

1. Przez trzy niewspółliniowe punkty przestrzeni przechodzi tylko jedna .
2. Prosta przechodząca przez różne punkty płaszczyzny zawiera się w tej płaszczyźnie.
3. Jeśli dwie płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają również drugi punkt wspólny.
4. Każda zawarta w płaszczyźnie dzieli ją na dwie części.

jeden

prosta

dwa

punkt

płaszczyzna

Ćwiczenie 5



Połącz w pary określenie wzajemnego położenia płaszczyzn z odpowiadającym mu opisem.

płaszczyzny równoległe

brak punktów wspólnych

płaszczyzny przecinające się

mają wspólną prostą

płaszczyzny pokrywające się

każdy punkt jednej płaszczyzny jest punktem drugiej płaszczyzny

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Wiadomo, że dwie płaszczyzny mają dokładnie 3 różne punkty wspólne, które nie leżą na jednej prostej.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz zdanie prawdziwe.

☐ Płaszczyzny te przecinają się.

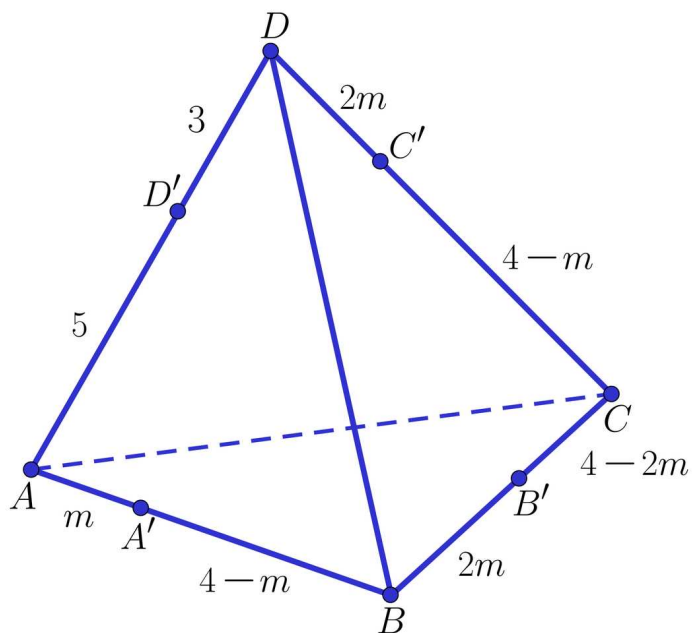
☐ Płaszczyzny te są równoległe.

☐ Płaszczyzny te są identyczne.

Ćwiczenie 8



Dany jest czworościan $ABCD$ i punkty A' , B' , C' , D' leżące odpowiednio na krawędziach AB , BC , CD , DA tak, jak na poniższym rysunku. Oblicz wartość parametru m , dla której płaszczyzny ABC' , BCD' , CDA' , DAB' przecinają się w jednym punkcie.



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Płaszczyzny przecinające się

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje, kiedy dwie płaszczyzny się przecinają;
- rozpoznaje płaszczyzny przecinające się;
- stosuje zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Płaszczyzny przecinające się”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać jako powtórzenie wiadomości dotyczących płaszczyzn przecinających się lub do realizacji tematu „Miary kątów między płaszczyznami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym”.