



## Długości odcinków w graniastostupie prawidłowym trójkątnym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Źródło: Michael Dziedzic, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Wystarczy podać matematykowi (czy też wprawnemu uczniowi) dwie wartości: długość krawędzi podstawy i długość krawędzi bocznej, a wykreśli siatkę i zbuduje z niej graniastosłup prawidłowy trójkątny. Jakie inne odcinki mogą jednoznacznie scharakteryzować tę bryłę? Czy wystarczy suma długości wszystkich odcinków? A może długość przekątnej ściany bocznej? Wysokość podstawy? Sprawdźmy to w następującym materiale.

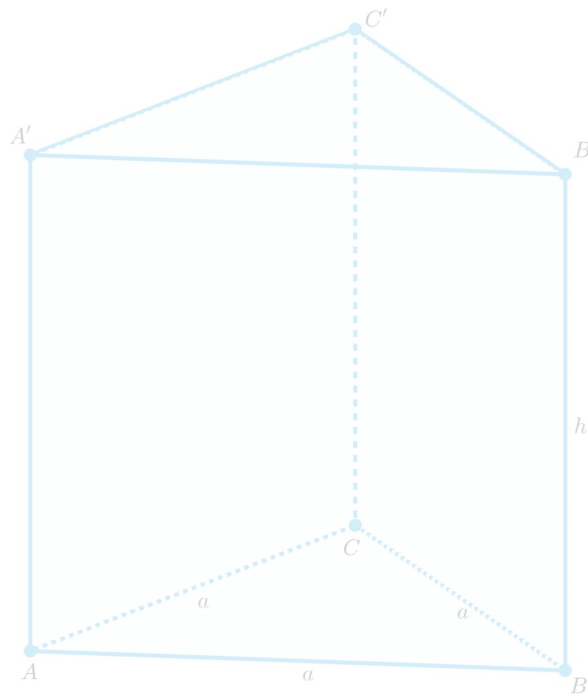
### Twoje cele

- Wskażesz odcinki w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.
- Wyznaczysz długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.
- Wykorzystasz wiedzę z planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

# Przeczytaj

## Definicja: Graniastosłup prawidłowy trójkątny

Graniastosłup prawidłowy trójkątny to taki graniastosłup prosty, który ma w podstawie trójkąt równoboczny.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b>

Bryła ta ma pięć ścian: dwie podstawy i trzy ściany boczne. Istnieje wiele odcinków, które możemy w takim graniastosłupie wyróżnić. Zarówno te leżące na ścianach – krawędzie, przekątne, wysokości, jak i znajdujące się wewnątrz graniastosłupa.

## Krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma 6 krawędzi podstawy (oznaczymy ich długość przez  $a$ ) oraz 3 krawędzie boczne, będące wysokościami (oznaczymy ich długość przez  $h$ ). Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego dana jest wzorem

$$S = 6a + 3h$$

### Przykład 1

Obliczymy długości krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wiedząc, że suma długości wszystkich krawędzi wynosi 45, a krawędź boczna jest cztery razy

dłuższa od krawędzi podstawy.

**Rozwiązanie:**

Przyjmijmy oznaczenia jak w części tekstu przed przykładem:

$$h = 4a$$

$$S = 6a + 3 \cdot 4a$$

$$45 = 6a + 12a$$

$$45 = 18a$$

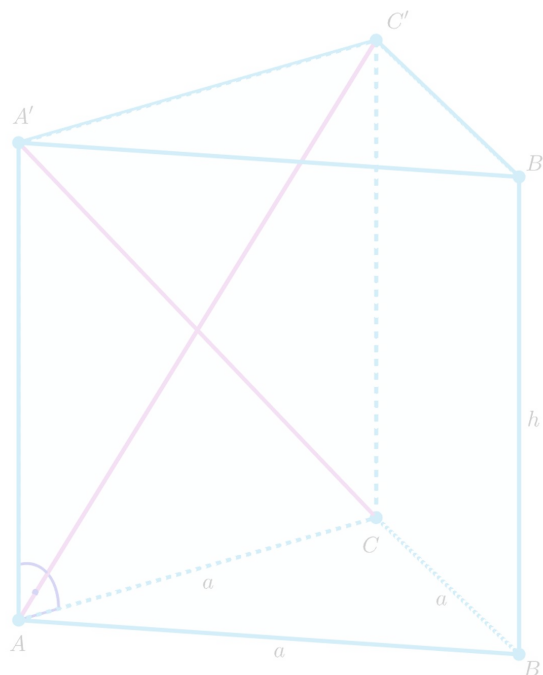
$$a = 2,5$$

Zatem krawędź boczna ma długość  $h = 4 \cdot 2,5 = 10$ .

## Przekątne ścian w graniastopie prawidłowym trójkątnym

Podstawy graniastopu są trójkątami, a więc nie mają przekątnych.

Ściany boczne są przystającymi prostokątami. Każda z nich ma po dwie przekątne równej długości, przecinające się w połowie, ale niekoniecznie pod kątem prostym (prostopadłe są tylko wtedy, gdy ściany są kwadratami).



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b>

Długość przekątnej ściany bocznej obliczymy korzystając z [twierdzenia Pitagorasa](#) w trójkącie  $ACA'$ . Oznaczmy tę długość literą  $p$ .

$$a^2 + h^2 = p^2$$

$$p = \sqrt{a^2 + h^2}$$

### Przykład 2

Przekątna ściany bocznej w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym jest o 1 cm dłuższa od krawędzi podstawy i o 8 cm dłuższa od krawędzi bocznej. Oblicz długość tej przekątnej.

#### Rozwiązanie:

Przez  $p$  oznaczmy długość szukanej przekątnej. Wtedy  $(p - 1)$  to długość krawędzi podstawy oraz  $(p - 8)$  to długość krawędzi bocznej. Pamiętajmy o wyznaczeniu

dziedziny. Długości wszystkich odcinków muszą być dodatnie, czyli 
$$\begin{cases} p > 0 \\ p - 1 > 0, \\ p - 8 > 0 \end{cases}$$

a z takiego układu warunków wynika, że  $p > 8$ .

Zapisujemy równanie korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$(p - 1)^2 + (p - 8)^2 = p^2$$

i rozwiązujemy je:

$$p^2 - 2p + 1 + p^2 - 16p + 64 = p^2$$

$$p^2 - 18p + 65 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 65 = 324 - 260 = 64$$

$$p_1 = \frac{18+8}{2 \cdot 1} = 13$$

$$p_2 = \frac{18-8}{2 \cdot 1} = 5 < 8, p_2 \text{ odrzucamy ze względu na dziedzinę.}$$

Przekątna ściany bocznej w tym graniastosłupie ma długość 13 cm.

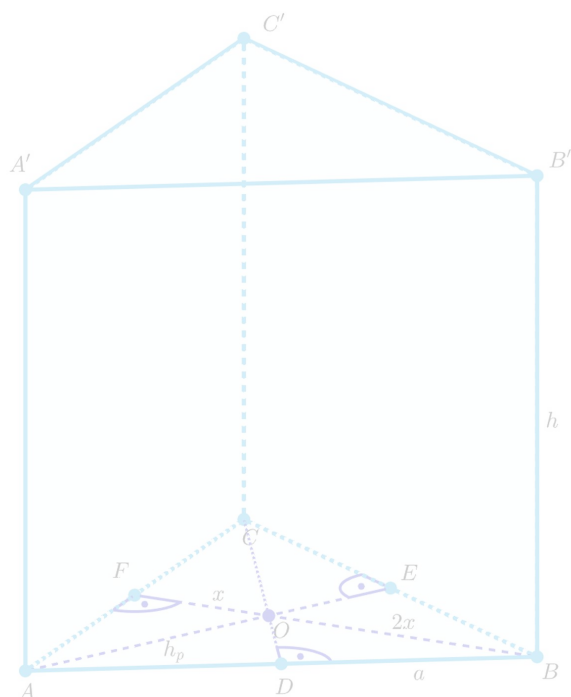
## Wysokość podstawy w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Wiesz już, że w podstawie omawianej bryły jest trójkąt równoboczny. W każdym trójkącie możemy poprowadzić trzy [wysokości](#) przecinające się w jednym punkcie – zwanym ortocentrum. Dodatkowo, w trójkącie równobocznym, wszystkie wysokości są tej samej

długości i połowią bok, na który padają. Przypomnijmy, że jeżeli przez  $a$  oznaczymy długość boku tego trójkąta, to jego wysokość  $h_p$  wyraża się wzorem

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

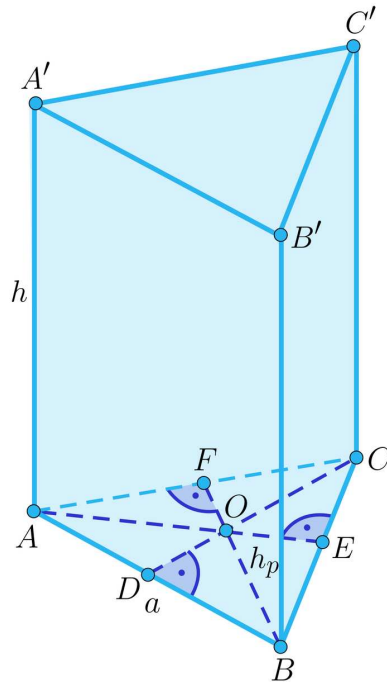
W trójkącie równobocznym wysokości spełniają definicję **środkowych**, a więc przyjmują też ich własność – przecinają się w stosunku 2 : 1 licząc od wierzchołka.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b>

### Przykład 3

Obliczymy długość krawędzi bocznej graniastoslupa prawidłowego trójkątnego przedstawionego na rysunku, w którym  $|AO| = 6$ , a suma długości wszystkich krawędzi to  $51\sqrt{3}$ .



### Rozwiązanie:

Wiemy, że  $|AO| : |OE| = 2 : 1$ , zatem  $|OE| = 3$ , czyli wysokość podstawy  $|AE| = 9$ .

$$9 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

stąd

$$a = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

Suma długości wszystkich krawędzi wynosi  $51\sqrt{3}$ , a więc

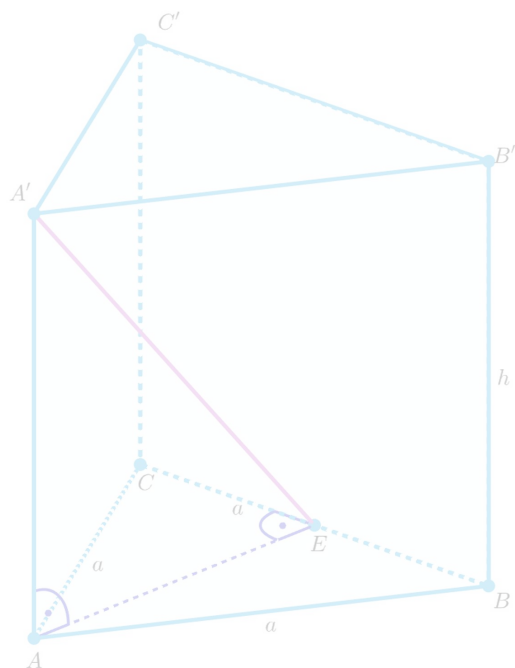
$$51\sqrt{3} = 6 \cdot 6\sqrt{3} + 3h$$

Szukana długość krawędzi bocznej to  $h = \frac{51\sqrt{3} - 36\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$ .

## Odcinki leżące poza płaszczyznami ścian graniastostupa prawidłowego trójkątnego

Graniastostup prawidłowy trójkątny nie ma przekątnych całej bryły. Możemy natomiast wyróżnić odcinki leżące poza płaszczyznami ścian, łączące punkty na krawędziach.

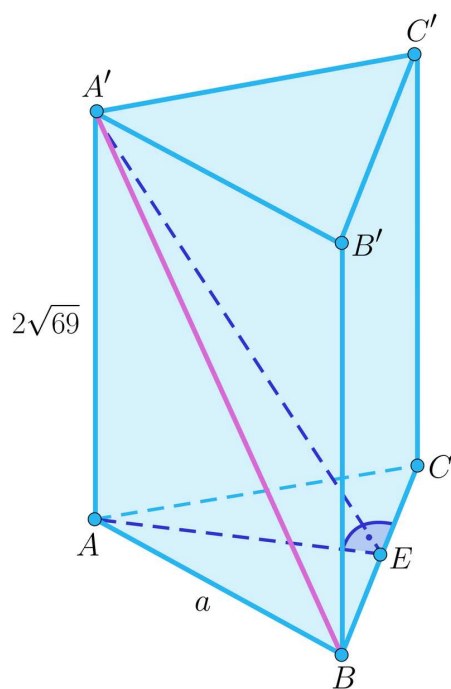
W poniższym aplecie widzimy odcinek  $A'E$  łączący wierzchołek górnej podstawy ze środkiem przeciwległej krawędzi dolnej podstawy. Długość tego odcinka możemy obliczyć korzystając z własności w trójkącie prostokątnym  $AEA'$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b>

#### Przykład 4

Obliczmy długość odcinka  $A'E$  w graniastopie prawidłowym trójkątym (rysunek poniżej), w którym krawędź boczna ma długość  $2\sqrt{69}$ , a stosunek długości odcinków  $|A'E| : |A'B|$  jest równy  $12 : 13$ .



**Rozwiązanie:**

Korzystając z informacji na temat stosunku długości odcinków zapisujemy, że  $|A'E| = 12x$  oraz  $|A'B| = 13x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $ABA'$  otrzymujemy równość:

$$(2\sqrt{69})^2 + a^2 = (13x)^2$$

$$a^2 = 169x^2 - 276$$

Jednocześnie z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $AEA'$  mamy:

$$(2\sqrt{69})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (12x)^2$$

$$276 + \frac{3}{4}a^2 = 144x^2$$

Wstawiając za  $a^2$  wcześniej wyznaczone wyrażenie otrzymujemy:

$$276 + \frac{3}{4}(169x^2 - 276) = 144x^2$$

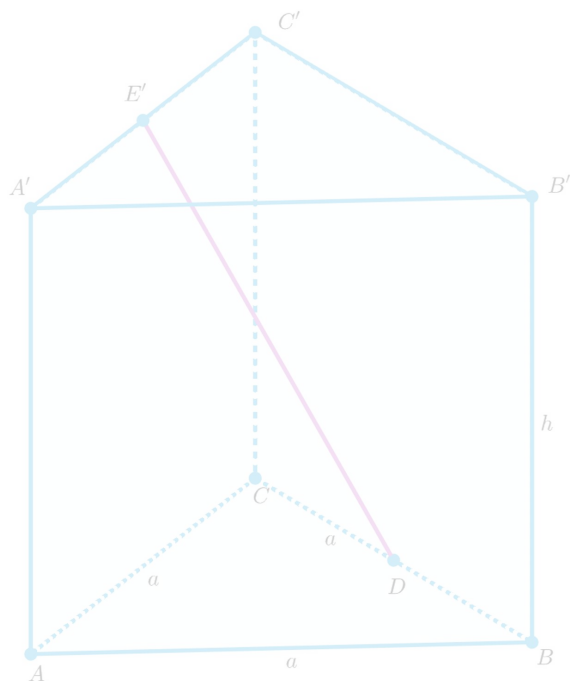
$$276 + \frac{507}{4}x^2 - 207 = 144x^2$$

$$69 = \frac{69}{4}x^2$$

$$x = 2$$

Długość odcinka  $A'E$  wynosi  $12x = 24$ .

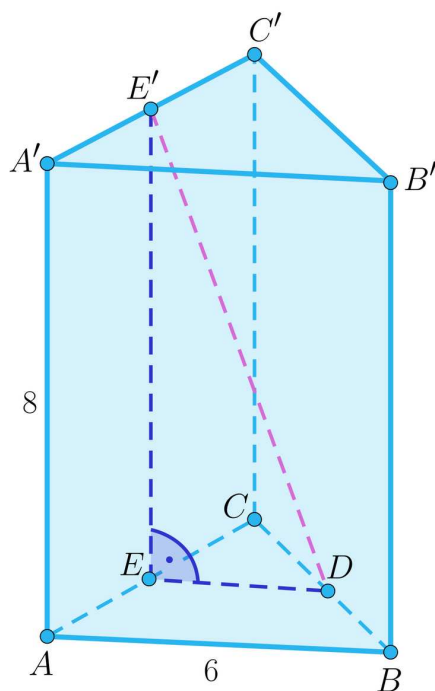
Innym przykładem odcinka w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym nie leżącego w płaszczyźnie żadnej ściany jest odcinek łączący środki nierównoległych krawędzi, z których jedna należy do podstawy górnej, a druga do podstawy dolnej. Przykładem jest odcinek  $DE'$  w poniższym aplecie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b>

### Przykład 5

Obliczmy długość odcinka  $DE'$  w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przedstawionym na rysunku wiedząc, że punkty  $E'$  i  $D$  są środkami krawędzi oraz  $|AB| = 6$ ,  $|AA'| = 8$ .



**Rozwiązanie:**

Odcinek  $DE$  łączy środki dwóch boków w trójkącie. Z podobieństwa trójkątów  $ABC$  i  $DEC$  w skali  $\frac{1}{2}$  wynika, że  $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$  oraz, że  $DE \parallel AB$ . Zatem  $|DE| = 3$ . Jednocześnie  $|EE'| = |AA'| = 8$ .

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $DEE'$  obliczymy długość szukanego odcinka

$$3^2 + 8^2 = |DE'|^2$$

$$|DE'| = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$$

## Słownik

### graniastosłup prosty

graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a więc wszystkie ściany boczne są prostokątami

### twierdzenie Pitagorasa

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

### wysokość trójkąta

każdy z trzech odcinków łączący wierzchołek tego trójkąta z punktem na przeciwległym boku, prostopadły do tego boku; wysokości w trójkącie przecinają się w punkcie nazywanym ortocentrum

### środkowa w trójkącie

każdy z trzech odcinków łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku; środkowe w trójkącie przecinają się w stosunku 2 : 1 licząc od wierzchołka, w punkcie nazywanym środkiem ciężkości trójkąta (barycentrum)

# Animacja 3D

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie rozwiąż zadania umieszczone w Poleceniach 2 i 3.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8jZVvjN0>

Film przedstawia rozwiązania zadań dotyczących wyznaczania długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym. Ostatnie zadanie jest do samodzielnego rozwiązania.

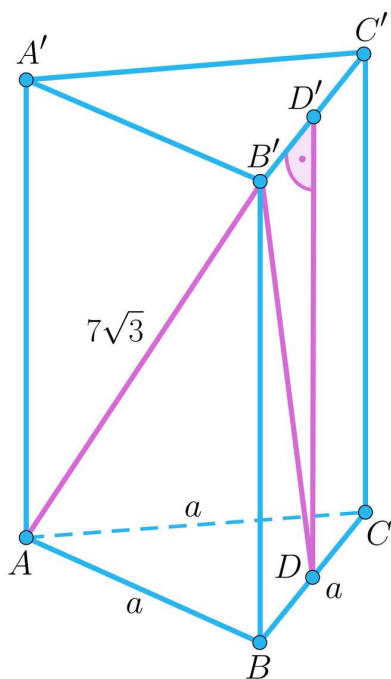
---

## Polecenie 2

Długość krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa wysokości trójkąta w podstawie. Przekątna ściany bocznej ma długość  $2\sqrt{21}$ . Oblicz długość krawędzi podstawy.

### Polecenie 3

Przekątna ściany bocznej w graniastostupie prawidłowym trójkątnym ma długość  $7\sqrt{3}$  i jest o  $\sqrt{3}$  dłuższa od długości przekątnej prostokąta, który jest połową ściany bocznej (patrz rysunek). Oblicz długość krawędzi podstawy graniastostupa.



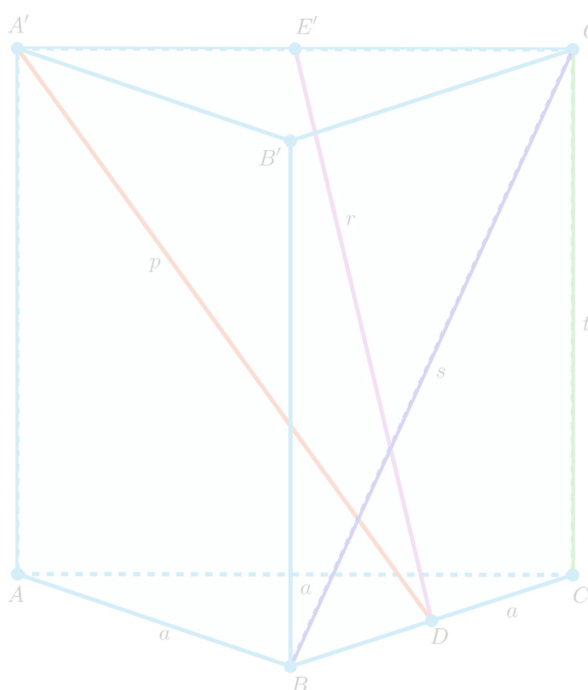
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Wiedząc, że punkty  $D$  i  $E'$  są odpowiednio środkami krawędzi  $BC$  i  $A'C$  ustaw w kolejności od najdłuższego do najkrótszego odcinki zaznaczone w aplikacji poniżej literami  $p$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $t$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmlsdgDat>

W którym miejscu w szeregu należałoby umieścić odcinek  $DC'$ ?

## Ćwiczenie 2



## Ćwiczenie 3



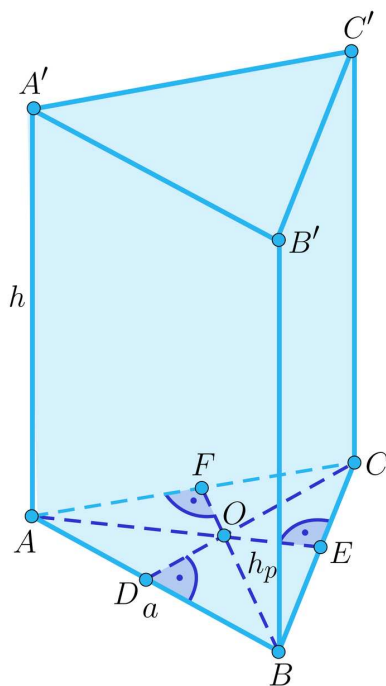
## Ćwiczenie 4



## Ćwiczenie 5



Oblicz długość przekątnej ściany bocznej graniastostupa prawidłowego trójkątnego przedstawionego na rysunku, w którym  $|OE| = \sqrt{3}$  oraz  $|FA'| = 5$ .

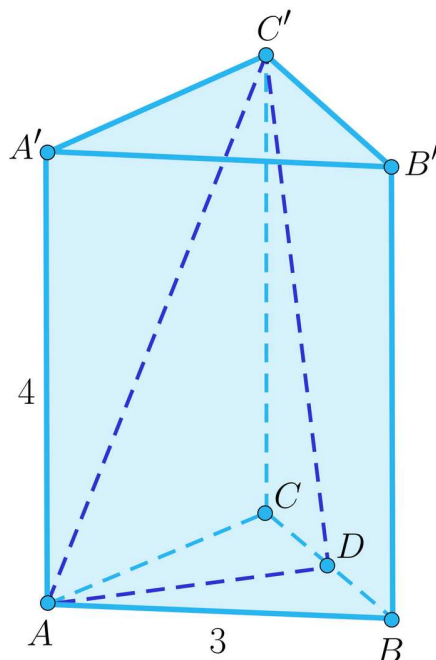


Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

## Ćwiczenie 6



Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości 3 i krawędzi bocznej długości 4. Punkt  $D$  jest środkiem krawędzi  $BC$ . Oblicz obwód trójkąta  $ADC'$ . Czy trójkąt  $ADC'$  jest prostokątny? Uzasadnij.

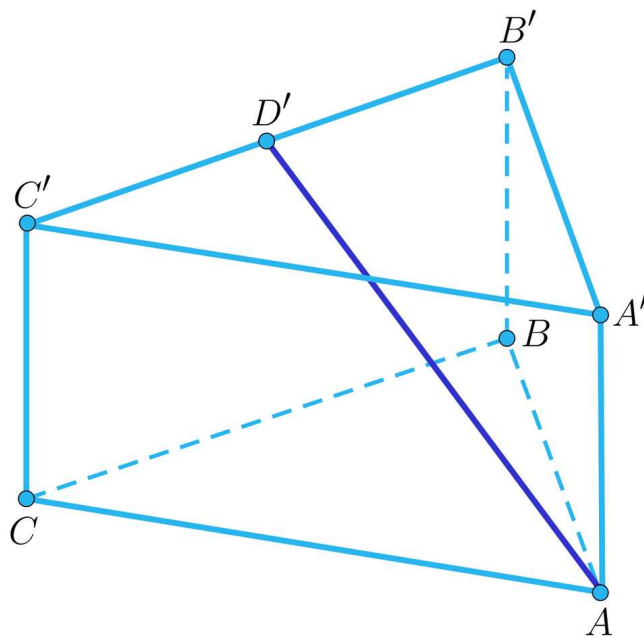


Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

### Ćwiczenie 7



W graniastopie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej. Punkt  $D'$  jest środkiem krawędzi  $B'C'$ , jak na rysunku obok. Wykaż, że długość odcinka  $AD'$  jest równa długości krawędzi podstawy.



Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

### Ćwiczenie 8



Wyznacz długość krawędzi bocznej graniastopu prawidłowego trójkątnego wiedząc, że suma długości wszystkich krawędzi wynosi 33, a długość przekątnej ściany bocznej jest równa 5.

Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Bartłomiej Cymbalista

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wskazuje odcinki w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym;
- wyznacza długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym;
- wykorzystuje wiedzę z planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- pogadanka;
- dyskusja;

- praca z medium bazowym.

### Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całą klasą.

### Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### Przebieg lekcji

#### Przed lekcją

- Uczniowie zapoznają się z treścią i przykładami z sekcji „Przeczytaj”.

#### Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym”, wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel rysuje na tablicy graniastosłup prawidłowy trójkątny i pyta uczniów o przykłady odcinków, które można w nim zaznaczyć oraz o sposoby wyliczenia ich długości w zależności od krawędzi podstawy oraz krawędzi bocznej, przyjmuje konkretne wartości, np.  $a = 6$ ,  $h = 8$ . Uczniowie w oparciu o zdobytą przed lekcją wiedzę udzielają odpowiedzi:

- wysokość podstawy  $h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$
- przekątna ściany bocznej  $p = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
- odcinek łączący wierzchołek dolnej podstawy ze środkiem nierównoległej krawędzi górnej podstawy  $d = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 8^2} = \sqrt{91} \approx 9,5$
- odcinek łączący środki dwóch nierównoległych krawędzi, z których jedna należy do dolnej, a druga do górnej podstawy  $x = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8,5$

#### Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z animacją 3D oraz rozwiązują Polecenie 2 znajdujące się w tej sekcji. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy.
2. Uczniowie rozwiązują samodzielnie Ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie nauczyciel wywołuje dyskusję na temat poprawnego rozwiązania, mobilizując uczniów

do argumentacji.

3. Uczniowie zostają podzieleni na 3-4 osobowe grupy. Rozwiązują ćwiczenia 2, 4, 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”. Po skończonej pracy wybrani uczniowie rozwiązują zadania na tablicy.
4. Uczniowie indywidualnie rozwiązują zadania 3, 5, 7 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów, w razie potrzeby podsuwając im wskazówki. Wybrane osoby omawiają rozwiązanie na tablicy. Nauczyciel może nagrodzić poprawne rozwiązanie oceną.

#### **Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się” oraz „Animacja 3D”.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie rozwiązują Polecenie 3 znajdujące się w sekcji „Animacja 3D”.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Graniastosłup](#)
- [Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Nauczyciel może przedstawić animację 3D na dużym ekranie dla całej klasy, a następnie dać czas uczniom na indywidualne (lub w parach) rozwiązanie zadań z tej sekcji.

Animację 3D można również wykorzystać podczas realizacji lekcji „Kąty między odcinkami w graniastosłupie”.