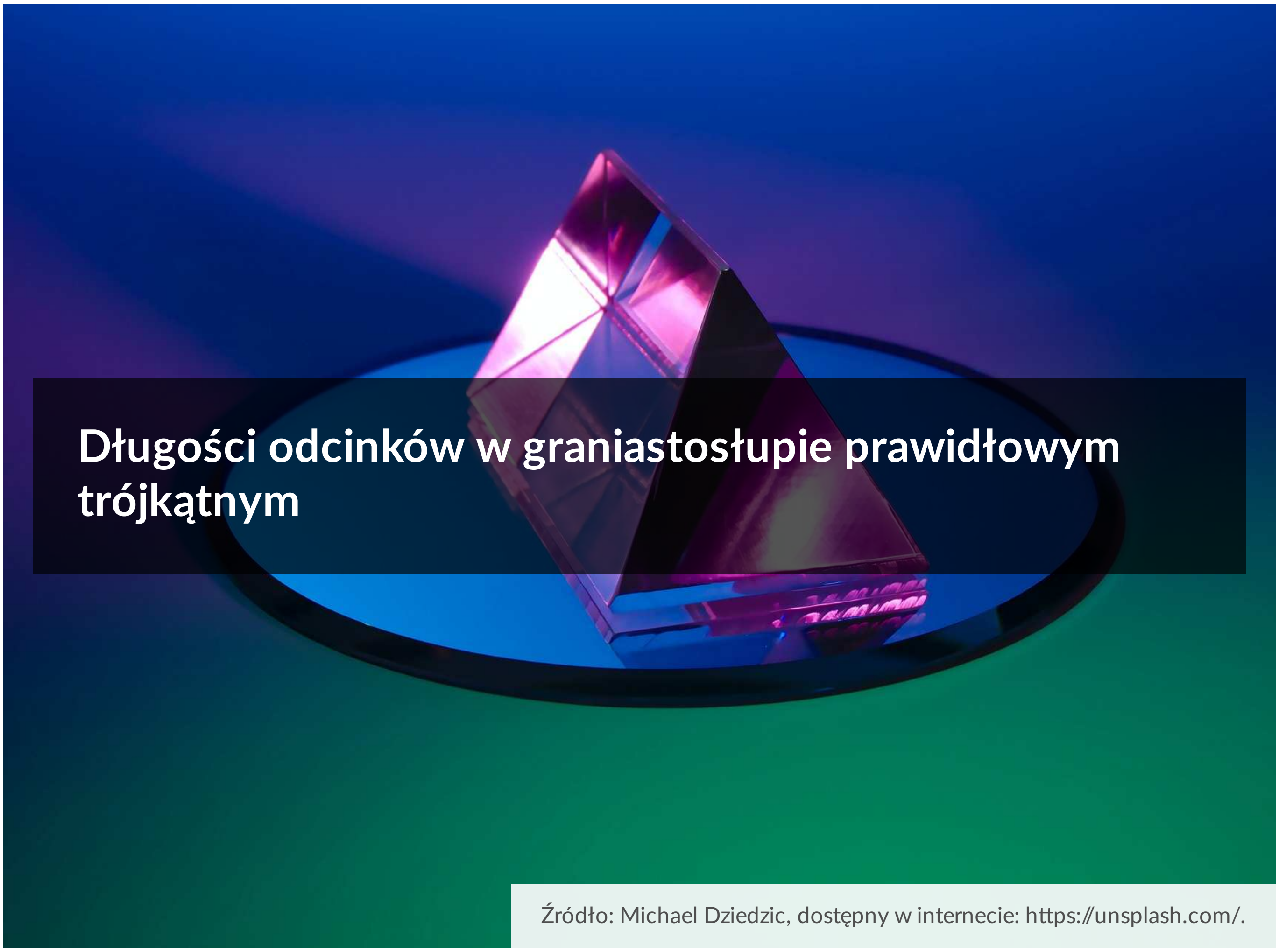
Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym



Źródło: Michael Dziedzic, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Wystarczy podać matematykowi (czy też wprawnemu uczniowi) dwie wartości: długość krawędzi podstawy i długość krawędzi bocznej, a wykreśli siatkę i zbuduje z niej graniastosłup prawidłowy trójkątny. Jakie inne odcinki mogą jednoznacznie scharakteryzować tę bryłę? Czy wystarczy suma długości wszystkich odcinków? A może długość przekątnej ściany bocznej? Wysokość podstawy? Sprawdzimy to w następującym materiale.

> **Twoje cele**
>
> - Wskażesz odcinki w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.
> - Wyznaczysz długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.
> - Wykorzystasz wiedzę z planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Przeczytaj

Definicja: Graniastosłup prawidłowy trójkątny

Graniastosłup prawidłowy trójkątny to taki graniastosłup prosty, który ma w podstawie trójkąt równoboczny.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b

Bryła ta ma pięć ścian: dwie podstawy i trzy ściany boczne. Istnieje wiele odcinków, które możemy w takim graniastosłupie wyróżnić. Zarówno te leżące na ścianach – krawędzie, przekątne, wysokości, jak i znajdujące się wewnątrz graniastosłupa.

Krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma 6 krawędzi podstawy (oznaczmy ich długość przez a) oraz 3 krawędzie boczne, będące wysokościami (oznaczmy ich długość przez h). Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego dana jest wzorem

$$S = 6a + 3h$$

Przykład 1

Obliczymy długości krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wiedząc, że suma długości wszystkich krawędzi wynosi 45, a krawędź boczna jest cztery razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak w części tekstu przed przykładem:

$h = 4a$

$S = 6a + 3 \cdot 4a$

$45 = 6a + 12a$

$45 = 18a$

$a = 2,5$

Zatem krawędź boczna ma długość $h = 4 \cdot 2,5 = 10$.

Przekątne ścian w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Podstawy graniastosłupa są trójkątami, a więc nie mają przekątnych.

Ściany boczne są przystającymi prostokątami. Każda z nich ma po dwie przekątne równej długości, przecinające się w połowie, ale niekoniecznie pod kątem prostym (prostopadłe są tylko wtedy, gdy ściany są kwadratami).

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b

Długość przekątnej ściany bocznej obliczymy korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACA'. Oznaczmy tę długość literą p.

$$a^2 + h^2 = p^2$$

$$p = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Przykład 2

Przekątna ściany bocznej w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym jest o 1 cm dłuższa od krawędzi podstawy i o 8 cm dłuższa od krawędzi bocznej. Oblicz długość tej przekątnej.

Rozwiązanie:

Przez p oznaczmy długość szukanej przekątnej. Wtedy $(p-1)$ to długość krawędzi podstawy oraz $(p-8)$ to długość krawędzi bocznej. Pamiętajmy o wyznaczeniu dziedziny. Długości wszystkich odcinków muszą być dodatnie, czyli $\begin{cases} p > 0 \\ p - 1 > 0, \\ p - 8 > 0 \end{cases}$

a z takiego układu warunków wynika, że $p > 8$.

Zapisujemy równanie korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$(p-1)^2 + (p-8)^2 = p^2$

i rozwiązujemy je:

$p^2 - 2p + 1 + p^2 - 16p + 64 = p^2$

$p^2 - 18p + 65 = 0$

$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 65 = 324 - 260 = 64$

$p_1 = \frac{18+8}{2 \cdot 1} = 13$

$p_2 = \frac{18-8}{2 \cdot 1} = 5 < 8$, p_2 odrzucamy ze względu na dziedzinę.

Przekątna ściany bocznej w tym graniastosłupie ma długość 13 cm.

Wysokość podstawy w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Wiesz już, że w podstawie omawianej bryły jest trójkąt równoboczny. W każdym trójkącie możemy poprowadzić trzy wysokości przecinające się w jednym punkcie – zwanym ortocentrum. Dodatkowo, w trójkącie równobocznym, wszystkie wysokości są tej samej długości i połowią bok, na który padają. Przypomnijmy, że jeżeli przez a oznaczymy długość boku tego trójkąta, to jego wysokość h_p wyraża się wzorem

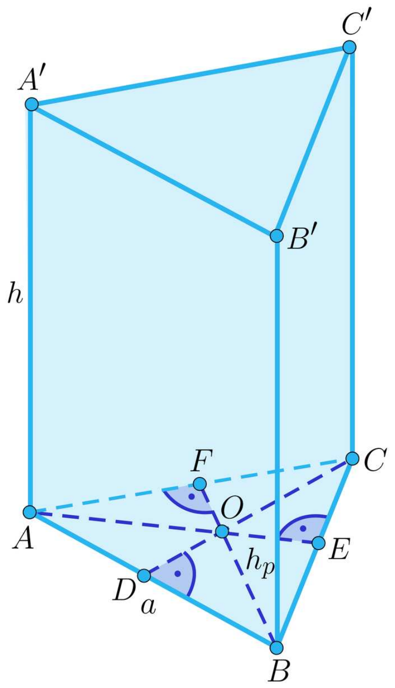
$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

W trójkącie równobocznym wysokości spełniają definicję środkowych, a więc przyjmują też ich własność – przecinają się w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołka.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b

Przykład 3

Obliczymy długość krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego przedstawionego na rysunku, w którym $|AO| = 6$, a suma długości wszystkich krawędzi to $51\sqrt{3}$.



Rozwiązanie:

Wiemy, że $|AO| : |OE| = 2 : 1$, zatem $|OE| = 3$, czyli wysokośc podstawy $|AE| = 9$.

$9 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

stąd

$a = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$

Suma długości wszystkich krawędzi wynosi $51\sqrt{3}$, a więc

$51\sqrt{3} = 6 \cdot 6\sqrt{3} + 3h$

Szukana długość krawędzi bocznej to $h = \frac{51\sqrt{3} - 36\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$.

Odcinki leżące poza płaszczyznami ścian graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

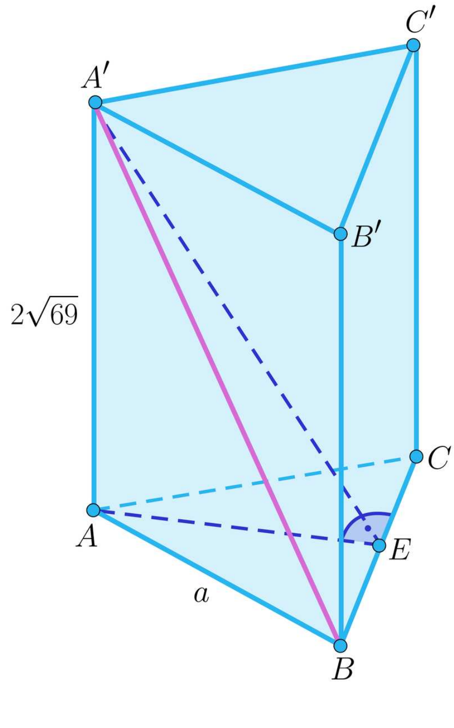
Graniastosłup prawidłowy trójkątny nie ma przekątnych całej bryły. Możemy natomiast wyróżnić odcinki leżące poza płaszczyznami ścian, łączące punkty na krawędziach.

W poniższym aplecie widzimy odcinek $A'E$ łączący wierzchołek górnej podstawy ze środkiem przeciwległej krawędzi dolnej podstawy. Długość tego odcinka możemy obliczyć korzystając z własności w trójkącie prostokątnym AEA'.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b

Przykład 4

Obliczymy długość odcinka $A'E$ w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym (rysunek poniżej), w którym krawędź boczna ma długość $2\sqrt{69}$, a stosunek długości odcinków $|A'E| : |A'B|$ jest równy $12 : 13$.



Rozwiązanie:

Korzystając z informacji na temat stosunku długości odcinków zapisujemy, że $|A'E| = 12x$ oraz $|A'B| = 13x$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABA' otrzymujemy równość:

$$\left(2\sqrt{69}\right)^2 + a^2 = (13x)^2$$

$$a^2 = 169x^2 - 276$$

Jednocześnie z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AEA' mamy:

$$\left(2\sqrt{69}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (12x)^2$$

$$276 + \frac{3}{4}a^2 = 144x^2$$

Wstawiając za a^2 wcześniej wyznaczone wyrażenie otrzymujemy:

$$276 + \frac{3}{4}\left(169x^2 - 276\right) = 144x^2$$

$$276 + \frac{507}{4}x^2 - 207 = 144x^2$$

$$69 = \frac{69}{4}x^2$$

$$x = 2$$

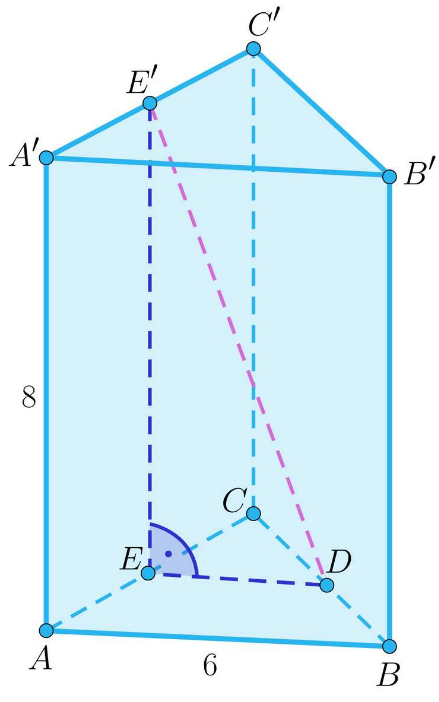
Długość odcinka $A'E$ wynosi $12x = 24$.

Innym przykładem odcinka w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym nie leżącego w płaszczyźnie żadnej ściany jest odcinek łączący środki nierównoległych krawędzi, z których jedna należy do podstawy górnej, a druga do podstawy dolnej. Przykładem jest odcinek DE' w poniższym aplecie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DmKXumi7b

Przykład 5

Obliczymy długość odcinka DE' w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przedstawionym na rysunku wiedząc, że punkty E' i D są środkami krawędzi oraz $|AB| = 6$, $|AA$'$| = 8$.



Rozwiązanie:

Odcinek DE łączy środki dwóch boków w trójkącie. Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC w skali $\frac{1}{2}$ wynika, że $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$ oraz, że $DE \parallel AB$. Zatem $|DE| = 3$. Jednocześnie $|EE'| = |AA'| = 8$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DEE' obliczymy długość szukanego odcinka

$3^2 + 8^2 = |DE'|^2$

$|DE'| = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$

Słownik

graniastosłup prosty

graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a więc wszystkie ściany boczne są prostokątami

twierdzenie Pitagorasa

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

wysokość trójkąta

każdy z trzech odcinków łączący wierzchołek tego trójkąta z punktem na przeciwległym boku, prostopadły do tego boku; wysokości w trójkącie przecinają się w punkcie nazywanym ortocentrum

środkowa w trójkącie

każdy z trzech odcinków łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku; środkowe w trójkącie przecinają się w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołka, w punkcie nazywanym środkiem ciężkości trójkąta (barycentrum)

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie rozwiąż zadania umieszczone w Poleceniach 2 i 3.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D8jZVvjN0

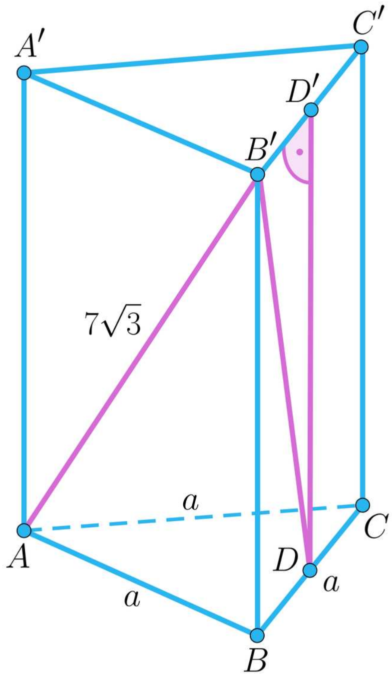
Film przedstawia rozwiązania zadań dotyczących wyznaczania długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym. Ostatnie zadanie jest do samodzielnego rozwiązania.

Polecenie 2

Długość krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa wysokości trójkąta w podstawie. Przekątna ściany bocznej ma długość $2\sqrt{21}$. Oblicz długość krawędzi podstawy.

Polecenie 3

Przekątna ściany bocznej w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym ma długość $7\sqrt{3}$ i jest o $\sqrt{3}$ dłuższa od długości przekątnej prostokąta, który jest połową ściany bocznej (patrz rysunek). Oblicz długość krawędzi podstawy graniastosłupa.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wiedząc, że punkty D i $E^{'}$ są odpowiednio środkami krawędzi BC i $A^{'}C$ ustaw w kolejności od najdłuższego do najkrótszego odcinki zaznaczone w aplecie poniżej literami p, r, s, t.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DmlsdgDat

- t
- r
- s
- p

W którym miejscu w szeregu należałoby umieścić odcinek DC'?

Ćwiczenie 2

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie są tej samej długości. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 90. Wtedy długość wysokości trójkąta w podstawie jest równa:

- ◯ $5\sqrt{3}$
- ◯ 10
- ◯ $10\sqrt{3}$
- ◯ 5

Ćwiczenie 3

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 10, a krawędź boczna 12. Długość odcinka łączącego środek krawędzi dolnej podstawy ze środkiem krawędzi górnej podstawy może mieć długość:

- ☐ 14
- ☐ 13
- ☐ 10
- ☐ 15
- ☐ 12

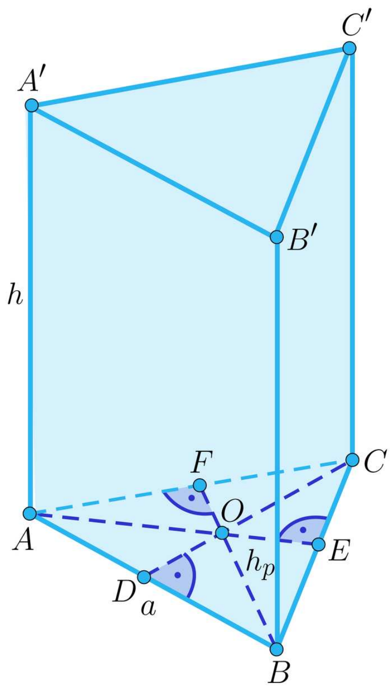
Ćwiczenie 4

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 10, a krawędź boczna 11. Długość odcinka łączącego środek krawędzi dolnej podstawy z wierzchołkiem górnej podstawy może mieć długość:

- [ ] 5
- [ ] 14
- [ ] $\sqrt{146}$
- [ ] $5\sqrt{3}$
- [ ] 12

Ćwiczenie 5

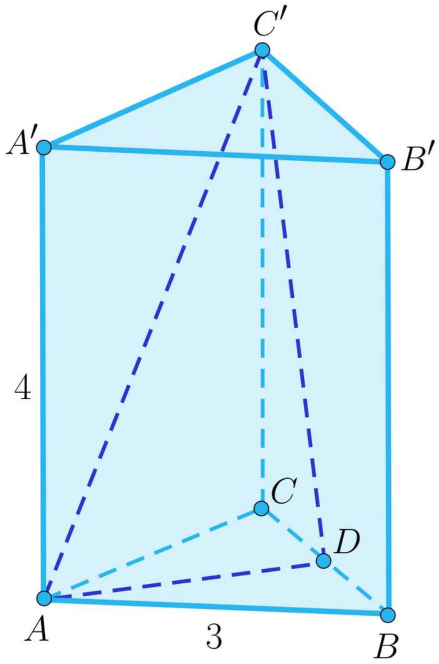
Oblicz długość przekątnej ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego przedstawionego na rysunku, w którym $|OE| = \sqrt{3}$ oraz $|FA'| = 5$.



Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

Ćwiczenie 6

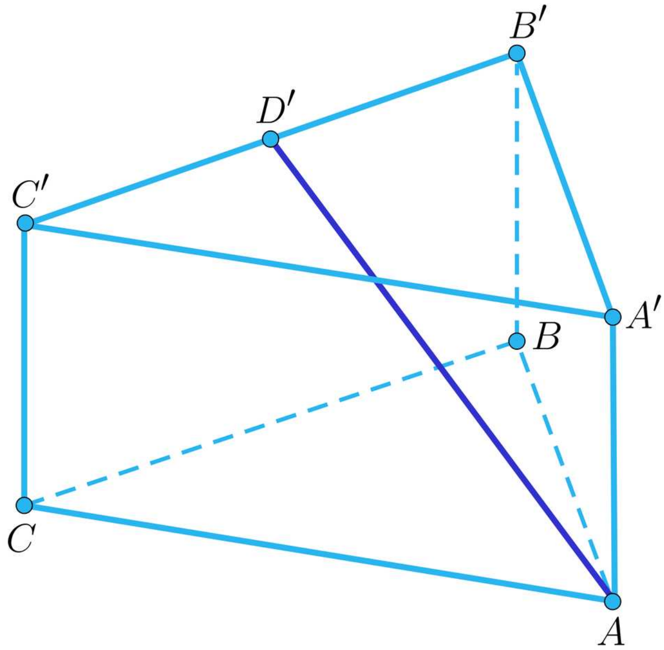
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości 3 i krawędzi bocznej długości 4. Punkt D jest środkiem krawędzi BC. Oblicz obwód trójkąta ADC'. Czy trójkąt ADC' jest prostokątny? Uzasadnij.



Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

Ćwiczenie 7

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej. Punkt D’ jest środkiem krawędzi B’C’, jak na rysunku obok. Wykaż, że długość odcinka AD’ jest równa długości krawędzi podstawy.



Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

Ćwiczenie 8

Wyznacz długość krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wiedząc, że suma długości wszystkich krawędzi wynosi 33, a długość przekątnej ściany bocznej jest równa 5.

Do przeprowadzenia obliczeń możesz wykorzystać poniższe pole.

Dla nauczyciela

Autor: Bartłomiej Cymbalista

Przedmiot: Matematyka

Temat: Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje odcinki w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym;
- wyznacza długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym;
- wykorzystuje wiedzę z planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- pogadanka;
- dyskusja;

- praca z medium bazowym.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całą klasą.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją

- Uczniowie zapoznają się z treścią i przykładami z sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym”, wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel rysuje na tablicy graniastosłup prawidłowy trójkątny i pyta uczniów o przykłady odcinków, które można w nim zaznaczyć oraz o sposoby wyliczenia ich długości w zależności od krawędzi podstawy oraz krawędzi bocznej, przyjmuje konkretne wartości, np. $a = 6$, $h = 8$. Uczniowie w oparciu o zdobytą przed lekcją wiedzą udzielają odpowiedzi:

- wysokość podstawy $h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$
- przekątna ściany bocznej $p = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
- odcinek łączący wierzchołek dolnej podstawy ze środkiem nierównoległej krawędzi górnej podstawy $d = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{91} \approx 9,5$
- odcinek łączący środki dwóch nierównoległych krawędzi, z których jedna należy do dolnej, a druga do górnej podstawy $x = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8,5$

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z animacją 3D oraz rozwiązują Polecenie 2 znajdujące się w tej sekcji. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy.
2. Uczniowie rozwiązują samodzielnie Ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie nauczyciel wywołuje dyskusję na temat poprawnego rozwiązania, mobilizując uczniów

do argumentacji.
3. Uczniowie zostają podzieleni na 3-4 osobowe grupy. Rozwiązują ćwiczenia 2, 4, 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”. Po skończonej pracy wybrani uczniowie rozwiązują zadania na tablicy.
4. Uczniowie indywidualnie rozwiązują zadania 3, 5, 7 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów, w razie potrzeby podsuwając im wskazówki. Wybrane osoby omawiają rozwiązanie na tablicy. Nauczyciel może nagrodzić poprawne rozwiązanie oceną.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się” oraz „Animacja 3D”.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują Polecenie 3 znajdujące się w sekcji „Animacja 3D”.

Materiały pomocnicze:

- Graniastosłup
- Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może przedstawić animację 3D na dużym ekranie dla całej klasy, a następnie dać czas uczniom na indywidualne (lub w parach) rozwiązanie zadań z tej sekcji.

Animację 3D można również wykorzystać podczas realizacji lekcji „Kąty między odcinkami w graniastosłupie”.