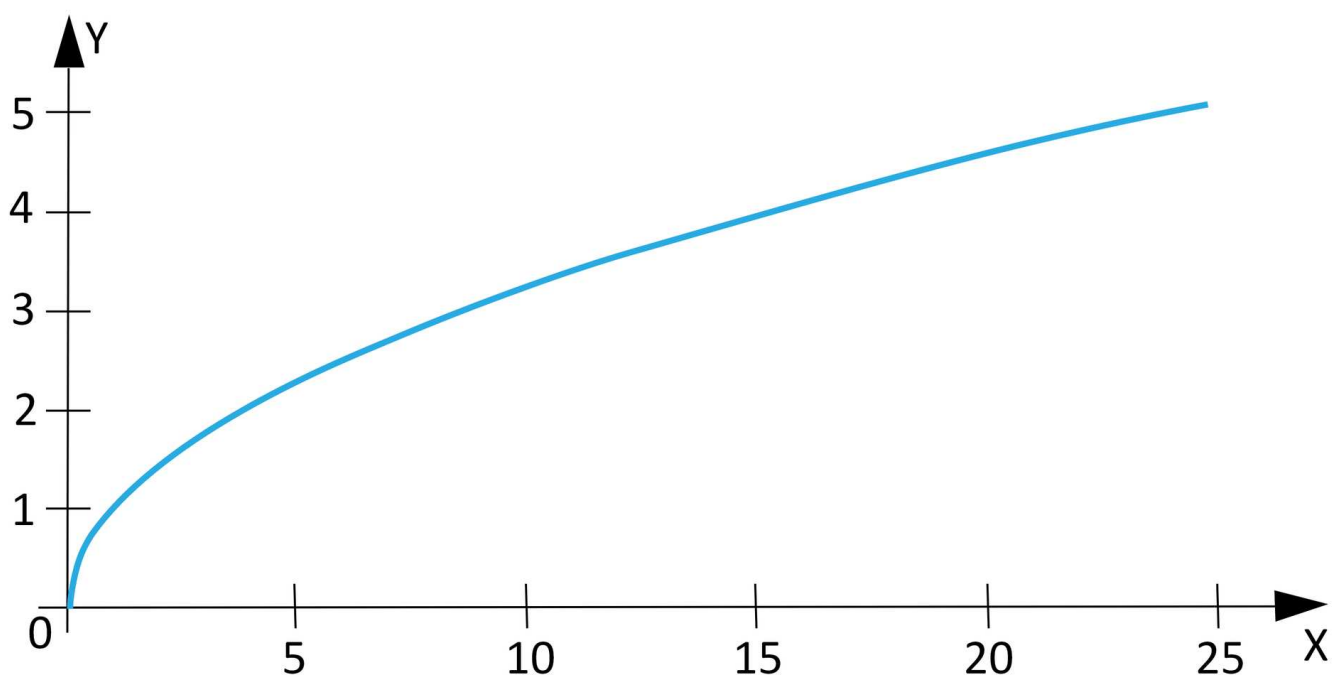




Zebranie wiadomości o nierównościach podwójnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zebranie wiadomości o nierównościach podwójnych

Źródło: dostępny w internecie: [S. Hermann & F. Richter z Pixabay](#), domena publiczna.

Słowo „podwójny” kojarzyć się może z podwójną tęczą, podwójnym agentem, podwójną kanapką, podwójnym zaworem kranowym, podwójnym fotelem wiszącym, podwójnym warkoczem, podwójnym sznurem pereł...



Być może i Tobie skojarzyło się to słowo z czymś przyjemnym – takim, jak na przykład nierówność podwójna, którą zajmiemy się w tym materiale. Całość jest zebraniem wiadomości o najważniejszych typach nierówności podwójnych. Zatem nie znajdziesz tu podwójnych węzłów gordyjskich do rozwikłania, ale co najwyżej podwójne sposoby rozwiązywania nierówności.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówność podwójną.
- Ustalisz zbiór rozwiązań nierówności w sytuacji praktycznej.
- Rozwiążesz prostą nierówność kwadratową.
- Określisz część wspólną nierówności wymiernych.

Przeczytaj

W niektórych przypadkach zdarza się, że zmienna musi spełniać jednocześnie dwie lub więcej nierówności. Nierówności takie nazywamy nierównościami jednoczesnymi. Nierówności jednoczesne rozwiązujemy oddzielnie, a z otrzymanych wyników wyciągamy końcowy wniosek.

W tym materiale zajmiemy się tylko nierównościami podwójnymi. Nierówności takie są jednoznaczne z układem dwóch nierówności pojedynczych, które powinny być jednocześnie spełnione.

Definicja: Nierówność podwójna z jedną niewiadomą

Nierówność z jedną niewiadomą, którą można zapisać za pomocą układu dwóch nierówności z tą niewiadomą.

Sposoby rozwiązywania nierówności podwójnej pokażemy na prostym przykładzie.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność

$$-6 < 2(x - 3) + 1 < 3.$$

Sposób 1:

Zapisujemy i rozwiązujemy odpowiedni układ nierówności.

$$\begin{cases} -6 < 2(x - 3) + 1 \\ 2(x - 3) + 1 < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 < 2x - 5 \\ 2x - 5 < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < 2x \\ 2x < 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < 4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu nierówności jest część wspólna rozwiązań obu nierówności.

Odpowiedź:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 4\right).$$

Sposób 2:

Będziemy przekształcać równoważnie każdą ze stron nierówności.

$$-6 < 2(x - 3) + 1 < 3$$

$$-6 < 2x - 5 < 3$$

Dodajemy do każdej ze stron 5.

$$-6 + 5 < 2x - 5 + 5 < 3 + 5$$

$$-1 < 2x < 8$$

Dzielimy przez 2.

$$\frac{-1}{2} < x < 4$$

Odpowiedź:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 4\right).$$

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność

$$\frac{x-1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{x+4}{2} - \frac{2x}{3} > \frac{-x+2}{3} + \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie zaczniemy od sprowadzenia nierówności do najprostszej postaci. W tym celu mnożymy każdą ze stron przez 12 (aby „pozbyć się” mianownika).

$$\frac{x-1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{x+4}{2} - \frac{2x}{3} > \frac{-x+2}{3} + \frac{1}{4} \quad | \cdot 12$$

$$4(x-1) + 3 > 6(x+4) - 8x > 4(-x+2) + 3$$

Wykonujemy wskazane działania i redukujemy wyrazy podobne.

$$4x - 4 + 3 > 6x + 24 - 8x > -4x + 8 + 3$$

$$4x - 1 > -2x + 24 > -4x + 11$$

W tym przypadku niewiadoma występuje po każdej ze stron nierówności, zatem rozwiązujemy równoważny układ nierówności.

$$4x - 1 > -2x + 24 \text{ i } -2x + 24 > -4x + 11$$

$$6x > 25 \text{ i } 2x > -13$$

$$x > 4\frac{1}{6} \text{ i } x > -6\frac{1}{2}$$

$$\text{Zatem } x > 4\frac{1}{6}.$$

Odpowiedź:

$$x \in \left(4\frac{1}{6}, \infty\right).$$

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność

$$\frac{x+2}{x-1} \leq \frac{1}{2} < \frac{x-1}{x+2}.$$

Ustalamy dziedzinę nierówności.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

Rozwiązujemy koniunkcję nierówności:

$$\frac{x+2}{x-1} \leq \frac{1}{2} \text{ i } \frac{1}{2} < \frac{x-1}{x+2}$$

Zajmiemy się najpierw pierwszą z uzyskanych nierówności.

$$\frac{x+2}{x-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\frac{2x+4-x+1}{2(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x+5}{2x-2} \leq 0$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

$$(x+5)(2x-2) \leq 0$$

Czyli $x \in \langle -5, 1 \rangle$ – na razie nie uwzględniamy dziedziny.

Rozwiązujemy drugą z uzyskanych nierówności.

$$\frac{1}{2} < \frac{x-1}{x+2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{x-1}{x+2} < 0$$

$$\frac{x+2-2x+2}{2x+4} < 0$$

$$\frac{-x+4}{2x+4} < 0$$

$$(4-x)(2x+4) < 0$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$$

Ustalamy część wspólną obu nierówności, uwzględniając dziedzinę.

$$\begin{cases} x \in \langle -5, 1 \rangle \\ x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty) \\ x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Odpowiedź:

$$x \in \langle -5, -2 \rangle.$$

Uwaga!

Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią. Zauważmy, że nierówności $|x| < a$ oraz $-a < x < a$ są równoważne. Zatem rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną w niektórych przypadkach, można sprowadzić do rozwiązania nierówności podwójnej.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność

$$\sqrt{2x(x-3) + (3-x)(3+x)} < 5.$$

Zapisujemy wyrażenie podpierwiastkowe w prostszej postaci.

$$\sqrt{2x(x-3) + (3-x)(3+x)} < 5$$

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 9 - x^2} < 5$$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 5$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem zapisujemy w postaci kwadratu różnicy.

$$\sqrt{(x-3)^2} < 5$$

Zapisujemy nierówność w postaci równoważnej.

$$|x-3| < 5$$

$$-5 < x-3 < 5$$

Rozwiązujemy **nierówność podwójną**.

$$-2 < x < 8$$

Odpowiedź:

$$x \in (-2, 8).$$

Do rozwiązywania nierówności podwójnej prowadzą też często równania trygonometryczne.

Przykład 5

Określmy, dla jakich wartości parametru a równanie $\sin 2x = a^2 + 5a + 7$ ma rozwiązanie.

Z własności funkcji sinus wiemy, że

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

Zatem, aby rozważane równanie miało rozwiązanie, parametr a musi spełniać warunek

$$-1 \leq a^2 + 5a + 7 \leq 1.$$

Zapisujemy równoważną koniunkcję.

$$-1 \leq a^2 + 5a + 7 \text{ i } a^2 + 5a + 7 \leq 1$$

Rozwiążemy najpierw pierwszą z nierówności.

$$-1 \leq a^2 + 5a + 7$$

$$a^2 + 5a + 8 \geq 0$$

$$\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$$

Ponieważ współczynnik przy a^2 jest dodatni i $\Delta < 0$, więc nierówność jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.

Rozwiązujemy drugą z zapisanych nierówności kwadratowych.

$$a^2 + 5a + 7 \leq 1$$

$$a^2 + 5a + 6 \leq 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$a_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

$$a_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$(a + 3)(a + 2) \leq 0$$

$$a \in \langle -3, -2 \rangle$$

Określamy część wspólną znalezionych rozwiązań.

$$a \in \mathbb{R} \text{ i } a \in \langle -3, -2 \rangle$$

Stąd wynika, że $a \in \langle -3, -2 \rangle$.

W ostatnim przykładzie pokażemy zastosowanie nierówności podwójnej w zdaniu praktycznym.

Przykład 6

Kran napełnia wodą beczkę przy zamkniętym otworze spustowym w ciągu a minut. Otwór spustowy, przy zamkniętym kranie, opróżnia beczkę w ciągu b minut. Beczka jest pusta. Otworzono jednocześnie kran i otwór spustowy. Określimy, po jakim czasie beczka będzie napełniona co najmniej do połowy i co najwyżej do $0,75$ objętości.

Oznaczmy:

V – objętość beczki (w m^3).

Rozwiązanie zadania wymaga rozważenia dwóch przypadków.

- Jeżeli $a \geq b$, to napełnienie beczki przy jednoczesnym otwarciu kranu i otworu spustowego nie jest możliwe.
- Jeśli $a < b$, to w ciągu x minut wpłynie do beczki $\frac{V}{a} \cdot x$ metrów sześciennych wody, a wypłynie $\frac{V}{b} \cdot x$ metrów sześciennych wody.

W zbiorniku zostanie $\frac{V}{a} \cdot x - \frac{V}{b} \cdot x$ metrów sześciennych wody.

Na podstawie treści zadani wynika, że

$$\frac{1}{2}V \leq \frac{V}{a} \cdot x - \frac{V}{b} \cdot x \leq \frac{3}{4}V.$$

Przekształcamy zapisaną nierówność.

$$\frac{1}{2}V \leq \left(\frac{b-a}{ab}\right) \cdot Vx \leq \frac{3}{4}V$$

$$\frac{1}{2}V \leq \left(\frac{b-a}{ab}\right) \cdot Vx \leq \frac{3}{4}V \quad | : V, (V > 0)$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{b-a}{ab}\right) \cdot x \leq \frac{3}{4}$$

Podzielimy teraz każdą ze stron nierówności przez $\frac{b-a}{ab}$.

Liczba $\frac{b-a}{ab}$ jest dodatnia, bo $a > 0$, $b > 0$ i $b - a > 0$, zatem znaków nierówności nie zmieniamy.

$$\frac{ab}{2(b-a)} \leq x \leq \frac{3ab}{4(b-a)}$$

Odpowiedź:

Od chwili otworzenia kranu i otworu spustowego beczka będzie napełniona co najmniej do połowy i co najwyżej do 0,75 objętości w ciągu od $\frac{ab}{2(b-a)}$ minut do $\frac{3ab}{4(b-a)}$ minut.

Słownik

nierówność podwójna z jedną niewiadomą

nierówność z jedną niewiadomą, którą można zapisać za pomocą układu dwóch nierówności z tą niewiadomą

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przedstawione tam nierówności podwójne, a dopiero następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D199gkSb6>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej nierówności podwójnej.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność

$$(x - 2)(x + 2) + 4 < (x - 1)^2 < (x - 3)(x + 3).$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wskaż liczbę, która należy do zbioru rozwiązań nierówności $1 < (x + 1)^2 - (x - 1)^2 < 12$.

☐ 0

☐ 3

☐ -1

☐ 1

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Zbiór rozwiązań nierówności $-2 < \sqrt{x^2 - 4x + 6} < 0$ to:

☐ $\emptyset$

☐ $(-2, -1)$

☐ $(-\infty, 2)$

☐ $\mathbb{R}$

Ćwiczenie 3



Dana jest nierówność $\left| \frac{x^2 - 3x}{2} \right| < 1$.

Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Nierówność ta jest równoważna nierówności $-2 < x^2 - 3x < 2$.	☐	☐
Nierówność tę można zapisać w postaci układu nierówności $x^2 - 3x < 2$ i $x^2 - 3x < -1$.	☐	☐
Największa liczba naturalna spełniająca tę nierówność to 3.	☐	☐
Do zbioru rozwiązań tej nierówności należą tylko liczby dodatnie.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Rozwiąż nierówność $-1 \leq \frac{x^2 + 3 - x(3x - 1)}{1 + x^2} \leq 2$ i wpisz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

Najmniejsza liczba naturalna spełniająca nierówność to .

Ćwiczenie 5



Określ, dla jakich wartości parametru m równanie $\cos \pi x = \frac{m^3 - 1}{m + 1 + m^2}$ ma rozwiązanie. Przeciągnij odpowiedni zbiór.

$m \in$

☐ $(-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty)$

☐ $\langle 0, 2 \rangle$

☐ $\langle -1, 1 \rangle$

☐ $\langle -1, 2 \rangle$

Ćwiczenie 6



Poukładaj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie zadania:

Dane są liczby naturalne dodatnie a, b, c, d, x, y takie, że:

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d} \text{ i } bc - ad = 1.$$

Wykaż, że $y \geq b + d$.

Przekształcamy drugą z zapisanych nierówności.

Aby uzyskane nierówności były prawdziwe, musi być spełniony warunek:

$$xb - ya > 0 \text{ i } yc - xd > 0.$$

Mnożymy pierwszą nierówność przez d , a drugą przez b :

$$xbd - yad \geq d \text{ i } ycb - xdb \geq b.$$

$$\frac{c}{d} - \frac{x}{y} > 0$$

Ponieważ $bc - ad = 1$, zatem $y \geq b + d$, co należało wykazać.

$$\frac{yc - xd}{yd} > 0$$

Nierówność $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ jest równoważna układowi nierówności

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \text{ i } \frac{x}{y} < \frac{c}{d}.$$

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} > 0$$

Przekształcamy pierwszą z zapisanych nierówności.

$$\frac{xb - ya}{yb} > 0$$

Ponieważ lewe strony nierówności są liczbami całkowitymi, więc musi być spełniony warunek:

$$xb - ya \geq 1 \text{ i } yc - xd \geq 1.$$

Dodajemy nierówności stronami.

$$ycb - yad \geq d + b$$

$$y(cb - ad) \geq d + b$$

Ćwiczenie 7



Cyfra dziesiątek liczby dwucyfrowej jest o 3 mniejsza od cyfry jedności. Znajdź tę liczbę, jeżeli wiadomo, że jest ona większa od 45, ale mniejsza od 69.

Ćwiczenie 8



Znajdź najmniejszą liczbę naturalną x , dla której wartość wyrażenia $A = \frac{x-1}{x^2-4}$ jest dodatnia, ale mniejsza od $\frac{1}{4}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zebranie wiadomości o nierównościach podwójnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$.

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówność podwójną
- ustala zbiór rozwiązań nierówności w sytuacji praktycznej
- rozwiązuje prostą nierówność kwadratową
- określa część wspólną nierówności wymiernych
- dobiera argumenty do uzasadniania poprawności rozwiązania problemu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- ekspert – nauczycielem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie, pracując w grupach, tworzą mapy myśli, na których zamieszczają najważniejsze dotychczas uzyskane wiadomości na temat nierówności podwójnych. W ten sposób przypominają sobie informacje, które wykorzystają w czasie zajęć.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach, zapoznając się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i animacją. Przy czym każda para wybiera sobie tylko jeden przykład, który dokładnie musi przeanalizować tak, aby stać się ekspertem od jego rozwiązania.
2. Po upływie wyznaczonego czasu ochotnicy – eksperci (w parach, w których pracowali) wcielają się w role nauczycieli, którzy przekazują zdobytą wiedzę innym.

3. Pozostali uczniowie mogą zadawać pytania, zgłaszać wątpliwości, a także na koniec ocenić zdolności „nauczycielskie” ekspertów.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę par, na podstawie sugestii klasy.

Praca domowa:

W ramach pracy domowej uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Nierówność podwójna](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach poświęconych rozwiązywaniu nierówności z wartością bezwzględną.