Zastosowanie praw Keplera w obliczeniach

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Czy to nie ciekawe?

Johann Kepler żył na przełomie XVI i XVII wieku. Był znakomitym uczonym tamtych czasów, fascynował się astronomią. Wyznawał heliocentryczną teorię Wszechświata, stworzoną przez Mikołaja Kopernika kilkadziesiąt lat wcześniej, chociaż w tamtych czasach uznawana ona była za herezję. Kepler bardzo dokładnie analizował obserwacje ruchu planet zgromadzone przez wiele lat przez Tychona Brahego. Na podstawie tych obserwacji sformułował 3 prawa, które opisują zachowania planet w Układzie Słonecznym. Teraz wiemy, że opisują również inne układy planetarne. Czy prawa te są bardzo skomplikowane? Otóż nie! W tym e-materiale nauczysz się, jak korzystać z praw Keplera.

Twoje cele

- zapoznasz się z trzema prawami Keplera,
- zastosujesz prawa Keplera w obliczeniach,
- zrozumiesz znaczenie praw Keplera,
- nauczysz się wyznaczać parametry planet pozasłonecznych.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Kepler, dzięki wieloletnim obserwacjom gromadzonym przez lata przez swojego nauczyciela, Tychona Brahego, miał ogromną bazę danych umożliwiającą analizę ruchów planet w Układzie Słonecznym. Ponadto Kepler miał doskonałe wykształcenie matematyczne. Dzięki temu sformułował trzy prawa ruchu planet wokół Słońca. Pierwsze z nich opisuje orbity planet wokół Słońca i brzmi następująco:

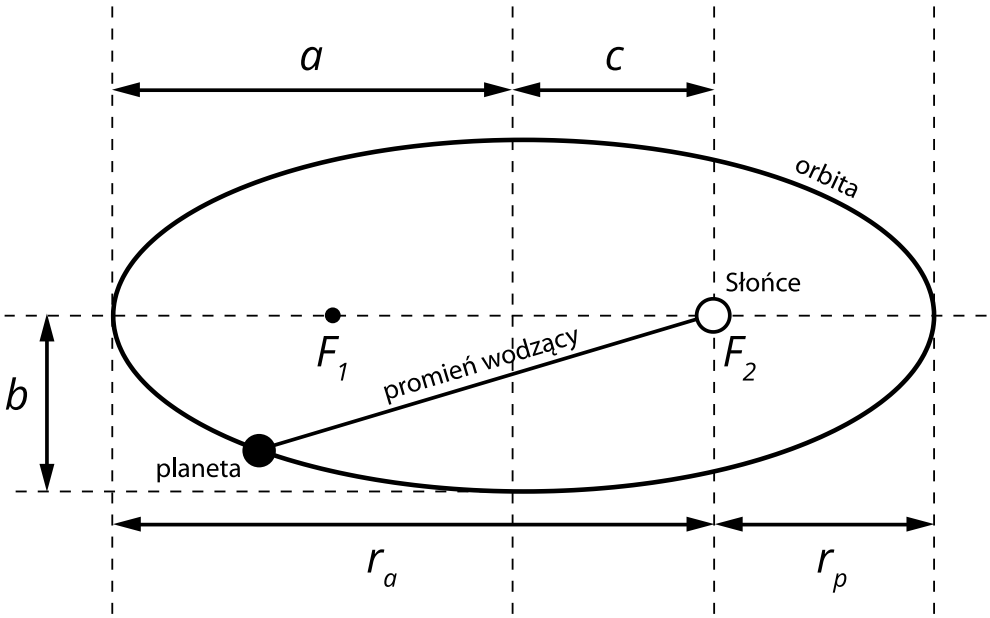
I prawo Keplera:

Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po orbicie w kształcie elipsy, w której w jednym z ognisk jest Słońce.

Podstawową zależnością dla elips jest związek pomiędzy długością wielkiej półosi elipsy a jej mimośrodem (ekscentrycznością):

$$e = \frac{c}{a}$$

gdzie e to mimośród, a – wielka półoś, c – odległość pomiędzy ogniskiem a środkiem elipsy.



Rys. 1. Rysunek prezentuje wygląd eliptycznej orbity planety i jej podstawowe wielkości: a – wielka półoś, b – mała półoś, r_a - odległość aphelium (najdalszego od Słońca punktu elipsy), r_p - odległość peryhelium (najbliższego Słońcu punktu elipsy), F_1 i F_2 - ogniska elipsy. Często w Układzie Słonecznym stosuje się przybliżenie elipsy okręgiem, ponieważ mimośród (eliptyczność) orbit planet jest niewielki.
Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Drugim wynikiem obserwacji Tychona Brahego i matematycznych wyliczeń Keplera było sformułowanie zasady dotyczącej sposobu poruszania się planet. Dzięki wielu obserwacjom udokumentowanym przez Tychona Brahego, Kepler mógł ocenić nie tylko kształt orbity, ale

zależności pomiędzy prędkościami planet w różnych punktach elipsy. W ten sposób sformułował drugie prawo.

II prawo Keplera:

W równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola.

Z tak sformułowanego prawa wynika, że prędkość w peryhelium jest największa, a w aphelium najmniejsza, a zależność pomiędzy nimi to:

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{1-e}{1+e}$$

Następnie, gdy Kepler znał już dokładną charakterystykę orbit oraz prędkości, mógł porównać zachowanie się planet w naszym Układzie Słonecznym. W ten sposób powstało trzecie prawo.

III prawo Keplera:

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześcianu wielkiej półosi jej orbity (czyli średniej odległości od Słońca) jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constans}$$

Natomiast we współczesnej, bardziej ogólnej wersji, III prawo Keplera wyprowadzone z prawa powszechnego ciążenia przyjmuje postać:

$$\frac{a^3}{T^2} = G\frac{M_S+m}{4\pi^2},$$

gdzie M_S to masa Słońca, m – masa planety, G – stała grawitacji.

W uogólnieniu tym możemy przyjąć, że masa planety jest znikomo mała w porównaniu z masą Słońca, więc wyrażenie po prawej stronie powyższej równości jest wartością stałą w danym układzie – to właśnie zauważył Kepler. Gdy analizujemy inny układ planetarny po prostu podstawiamy masę gwiazdy centralnej za masę Słońca.

Przeanalizujmy jeden ze znanych układów planetarnych. Za przykład weźmy niewielki układ planetarny o nazwie Kepler-444. Nazwa układu pochodzi od kosmicznego teleskopu Kepler, który badał ten układ planetarny. Jest to bardzo stary układ planetarny, ponieważ jego wiek szacuje się na około 11,2 miliarda lat (Układ Słoneczny ma zaledwie 4,6 mld lat). Zawiera on 5 planet skalistych o bardzo ciasnych orbitach, krążących wokół gwiazdy znajdującej się w odległości około 36 pc od Ziemi. Gwiazda ta jest wielkości mniej więcej ¾ naszego Słońca, ale prawie 3 krotnie od niego starsza.

Nazwa planety	**Wielka półoś - a [au]**	**Okres orbitalny - T [dni]**	**Mimośród - e**	**Promień - R [wyrażony w promieniach Ziemi]**

Kepler -444b	0,04178	3,60001053	0,16	0,4
Kepler -444c	0,04881	4,5458841	0,31	0,497
Kepler -444d	0,06	6,189392	0,18	0,53
Kepler -444e	0,0696	7,743493	0,1	0,546
Kepler -444f	0,0811	9,740486	0,29	0,741

Wykorzystując prawa Keplera obliczmy:

1. odległość gwiazdy centralnej od środka orbity planety Kepler-444c, czyli drugiej planety w tym układzie,
2. odległości tej planety od jej gwiazdy centralnej – apocentrum i perycentrum, a dzięki temu również stosunek największej do najmniejszej prędkości w jej ruchu orbitalnym,
3. masę gwiazdy centralnej.

Wszystkie te wielkości wyznaczymy używając zależności wynikających z trzech praw Keplera.

Mając daną wielką półoś a oraz mimośród e, z I prawa Keplera wyznaczamy szukaną wartość c, która jest odległością środka elipsy od ognisk $c = ae$. Należy pamiętać, że 1 au = 149 597 870,7 km. W zależności od tego w jakich jednostkach chcemy wyrazić szukane odległości, musimy je odpowiednio zamienić. Mimośród (ekscentryczność) jest wielkością bezwymiarową.

c = 0,04881 au · 0,31 = 0,0151311 au = 0,0151311 · 149597870,7 km = 2263580,34 km.

Mając taką informacje wyznaczymy również odległości charakterystyczne orbity, czyli odległość do apocentrum i perycentrum, ponieważ

$$r_a = a + c, \quad r_p = a - c.$$

Dla planety Kepler-444c dostajemy zatem wartości:

r_a = 0,04881 au + 0,0151311 au = 0,0639411 au = 9565452,41 km

r_p = 0,04881 au – 0,0151311 au = 0,0336789 au = 5038291,73 km

Różnica tych wielkości to prawie 4 miliony kilometrów. Nawet nie znając mimośrodu, już na tej podstawie możemy stwierdzić, że jest to ekscentryczna orbita (biorąc pod uwagę odległość nie przekraczającą 10 milionów km).

Następnie sprawdźmy, jaki jest stosunek prędkości planety na orbicie w apocentrum i perycentrum. Do tych obliczeń niezbędne jest II prawo Keplera.

Największą prędkość planeta osiąga w perycentrum, a największą w apocentrum. Z drugiego prawa Keplera wiemy, że $\frac{v_a}{v_p} = \frac{1-e}{1+e}$. Korzystając z tabeli wyliczamy stosunek prędkości $\frac{v_a}{v_p} = \frac{1-0{,}31}{1+0{,}31} = 0,5267$. Oznacza to, że prędkość w perycentrum jest ponad dwukrotnie większa niż w apocentrum.

Wykorzystując uogólnione III prawo Keplera, obliczmy masę gwiazdy centralnej.

Dostajemy zależność masy gwiazdy od wielkiej półosi orbity i czasu obiegu: $M = \frac{a^3}{T^2}\frac{4\pi^2}{G}$, masę planety przybliżyliśmy do zera, stała grawitacji $G = 6,6743 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$. Przy takich obliczeniach musimy pamiętać o ujednoliceniu jednostek, w których wyrażamy dane.

Najprościej jest wyrazić okres obiegu planety oraz wielką półoś w jednostkach SI:

T = 3,6 dnia = 311040 s,

a = 0,04178 au = 6 263 662 846,209 m

$$M = \frac{6263662846{,}209^3}{311040^2}\,\frac{4 \cdot 3{,}1415^2}{6{,}6743 \cdot 10^{-11}} = 1,5025 \cdot 10^{30}\ \text{kg}.$$

Masy gwiazd centralnych układów planetarnych zazwyczaj wyraża się w masach Słońca. Skoro masa Słońca wynosi 1,989 · 10^{30} kg, to masa gwiazdy układu Kepler-444 wynosi 0,755 mas Słońca.

W ten sposób wyznaczyliśmy zależności w układzie Kepler-444. W pierwszym kroku otrzymaliśmy informację, że odległość gwiazdy od środka elipsy wynosi ponad dwa miliony kilometrów. W drugim kroku policzyliśmy najmniejszą i największą odległość drugiej planety tego układu od gwiazdy centralnej. Różnica ta to prawie 4,5 mln kilometrów, przy mimośrodzie e = 0,31 – jest to bardzo ekscentryczna orbita. To też potwierdza się w kolejnym obliczeniu, z którego wynika, że największa prędkość orbity jest dwukrotnie większa od jej najmniejszej prędkości. W trzecim kroku, dzięki znajomości parametrów orbit planet i III prawu Keplera, wyznaczyliśmy masę gwiazdy centralnej, wynoszącą 1,5 · 10^{30} kg (dla porównania Słońce ma 1,99 · 10^{30} kg).

Prawa Keplera można wykorzystywać do wielu obliczeń dotyczących ruchu planet w układach planetarnych, ale także do ruchu komet oraz księżyców lub sztucznych satelitów wokół planet.

Słowniczek

Teoria heliocentryczna

teoria mówiąca o tym, że wszystkie planety krążą po orbitach wokół Słońca. Sformułowana została przez Mikołaja Kopernika w pierwszej połowie XVI wieku. Wcześniej zakładano, że Ziemia jest centrum wszystkiego – była to teoria geocentryczna.

Parsek (pc)

największa z miar odległości używanych w astronomii. Jeden parsek odpowiada odległości do gwiazdy, której paralaksa wynosi jedną sekundę kątową.

1 pc = 206 265 au = 30 856 775 814 913 673 m

Jednostka astronomiczna (au)

jednostka długości używana do opisu układów planetarnych. Jedna jednostka astronomiczna to średnia odległość Ziemi od Słońca.

Film samouczek

Zastosowanie praw Keplera w obliczeniach

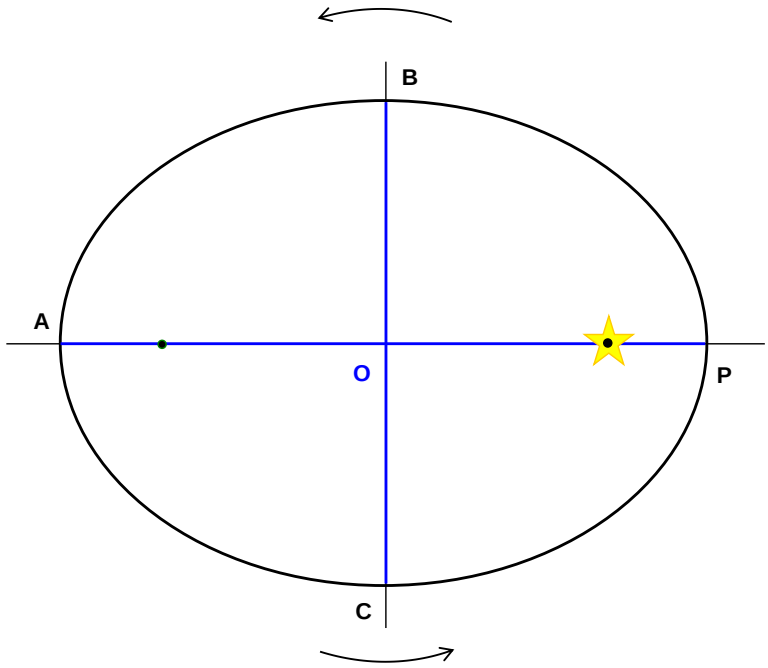
Polecenie 1

Planeta porusza się po eliptycznej orbicie o długości (obwodzie) p, wokół centralnej gwiazdy. Okres obiegi planety jest równy T. Wybieramy losowe położenie planety w umownej chwili $t = 0$. Droga przebyta przez planetę do czasu $t = \frac{1}{2}T$:

- ◯ jest na pewno mniejsza niż $\frac{1}{2}p$;
- ◯ jest na pewno równa $\frac{1}{2}p$
- ◯ jest na pewno większa niż $\frac{1}{2}p$
- ◯ wszystkie trzy możliwości są możliwe, zależnie od wylosowanego położenia początkowego

Polecenie 2

Dla każdej z trzech możliwości wymienionych w poleceniu 1 wskaż przykładowy punkt startowy na elipsie, który realizuje tę możliwość. Opisz słownie jego położenie, używając specyficznych punktów na elipsie, zaznaczonych na rysunku poniżej (A, B, P, C).



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Polecenie 3

W filmie samouczku wyprowadzono związek v_B w zależności od v_A i r_A oraz wykazano na jego podstawie, że $v_B > v_A$. Wyprowadź wyrażenia na v_B w zależności od v_P i r_P oraz wykaż, że związek ten przewiduje relację $v_B < v_P$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Czy znając tylko mimośród i wielką półoś orbity, potrafisz obliczyć odległości do peryhelium i aphelium?

Odpowiedź: tak / nie

Ćwiczenie 2

Które prawo Keplera pozwoli obliczyć masę gwiazdy centralnej w układzie planetarnym?

- I
- II
- III
- IV

Ćwiczenie 3

Kometa Hale-Bopp jest jedną z najdłużej obserwowanych komet 20 wieku. Jest to jedna z najjaśniejszych znanych komet Układu Słonecznego. Wiadomo, że znajduje się ona najbliżej Słońca w odległości zaledwie 0,9174 au, a odległość największa wynosi 363 au. Oblicz jej mimośród z dokładnością do części tysięcznych.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 4

Uzupełnij tabelę informacjami o planetach gazowych. Wykorzystaj do obliczeń odpowiednie prawo Keplera. Pamiętaj, że ziemski rok to 365,25 dni, a wielka półoś orbity Ziemi to 1 au. Używaj jednostek zgodnych z podanymi w nagłówkach tabeli. Wyniki zaokrąglaj tak, jak pozostałe liczby w tej samej kolumnie.

Nazwa planety	Odległość od Słońca [au]	Okres obiegu [dni]
Jowisz	5,20	
Saturn		10756
Uran		30707
Neptun	30,07	

Ćwiczenie 5

Oblicz, ile czasu trwa obieg Marsa wokół Słońca wiedząc, że jego odległość od Słońca wynosi 1,52 au. Wynik podaj w Ziemskich latach zaokrąglony do części tysięcznych.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 6

Fobos, naturalny satelita Marsa, okrąża planetę po prawie kołowej orbicie o promieniu równym $9{,}4 \cdot 10^{6}$ m. Wiedząc, że okres obiegu tego satelity wokół Marsa wynosi 7 godzin i 39 minut, wyznacz masę Marsa. W odpowiedzi podaj mnożnik zaokrąglony do części dziesiętnej i wykładnik liczby 10. $G = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$

Odpowiedź: M_M = $\cdot 10^{\square}$ kg

Ćwiczenie 7

Wokół Ziemi krążą dwa sztuczne satelity o podobnych orbitach. Pierwszy znajduje się na orbicie, której wielka półoś jest krótsza o 1000 km od wielkiej półosi orbity drugiego satelity a_2 = 10000 km. Okres obiegu drugiego satelity wynosi około 112 minut. Oblicz okres obiegu pierwszego satelity. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych minut.

Odpowiedź: minut

Ćwiczenie 8

Współczesne, uogólnione III prawo Keplera pozwoliło na określenie masy czarnej dziury znajdującej się w centrum Drogi Mlecznej. Za jej odkrycie dwoje astronomów, Reinhard Genzel i Andrea Ghez, otrzymało w 2020 roku nagrodę Nobla. Oblicz masę tej czarnej dziury M_{cd} wiedząc, że jedna z gwiazd obiega środek Galaktyki w ciągu 15 lat w średniej odległości 900 a.u. od centrum. Przyjmij, że w obliczeniach masę tej gwiazdy można zaniedbać w porównaniu z masą czarnej dziury. Do obliczeń przyjmij, że wartość stałem grawitacji wynosi $G \approx 4\pi^2 \frac{(a.u.)^3}{m_s(rok)^2}$, gdzie m_s, to masa Sońca.

Masa czarnej dziury M_{cd} = _____ mln m_s.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Monika Sitek
Przedmiot:	fizyka
Temat zajęć:	**Kiedy możemy wykorzystać prawa Keplera?**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 18) przedstawia własnymi słowami główne tezy tekstu popularnonaukowego z dziedziny fizyki lub astronomii; 19) wyodrębnia zjawisko z kontekstu, nazywa je oraz wskazuje czynniki istotne i nieistotne dla jego przebiegu. IV. Grawitacja i elementy astronomii. Uczeń: 5) interpretuje III prawo Keplera jako konsekwencję prawa powszechnego ciążenia; stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych;
Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. omawia zależności pomiędzy prawami Keplera; 2. wykorzystuje w obliczeniach prawa Keplera; 3. analizuje ruch planet pozasłonecznych.

Strategie nauczania:	fliped-classroom
Metody nauczania:	praca własna z bazą danych
Formy zajęć:	praca w parach
Środki dydaktyczne:	urządzenie multimedialne z dostępem do Internetu
Materiały pomocnicze:	e-materiały: „Pierwsze prawo Keplera", „Co mówi III prawo Keplera?", „Jaki jest związek między III prawem Keplera a prawem powszechnego ciążenia.", „Jaka jest treść II prawa Keplera?", „Jaki jest związek między II prawem Keplera a zasadą zachowania momentu pędu"

PRZEBIEG LEKCJI

Faza wprowadzająca:

Uczeń zapoznaje się z całym e-materiałem w domu.
Materiał należy wykorzystać na lekcji wraz z zajęciami, na których omawiane są prawa Keplera.
Nauczyciel pyta uczniów, czego nie zrozumieli w e-materiale i wyjaśnia wątpliwości. Jeśli jest uczeń, który nie miał problemów ze zrozumieniem materiału, to on wyjaśnia kolegom i koleżankom niejasności.

Faza realizacyjna:

Nauczyciel pokazuje uczniom bazę planet pozasłonecznych exoplanet.eu. Każda para uczniów dostaje od nauczyciela nazwę układu planetarnego do analizy. Na przykład: Kepler-33, Kepler-278, Kepler-146, Kepler-538. Dla zdolniejszych uczniów, bardziej zainteresowanych tematem, należy przygotować bardziej złożone układy czyli składające się z większej ilości planet, takie jak Kepler-132 A, Kepler-90. Uczniowie samodzielnie znajdują informacje o swoim układzie planetarnym i zapisują dane w formie tabeli. Na podstawie praw Keplera wyznaczają parametry orbit planet w tym układzie – mimośród, wielka półoś, odległość ogniska od środka orbity, perycentrum, apocentrum, stosunek prędkości w skrajnych punktach elipsy. Uczniowie rysują zależność $a^3(T^2)$ dla swojego układu planetarnego.

Faza podsumowująca:

Uczniowie wymieniają się swoimi tabelami i sprawdzają, czy wszystko zostało poprawnie policzone.

Praca domowa:

W ramach powtórzenia i utrwalenia wiadomości uczniowie rozwiązują zadania z zestawu ćwiczeń.	
Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium	Multimedium może być także wykorzystane podczas lekcji, jako wprowadzenie do tematu lub podsumowanie wiadomości.