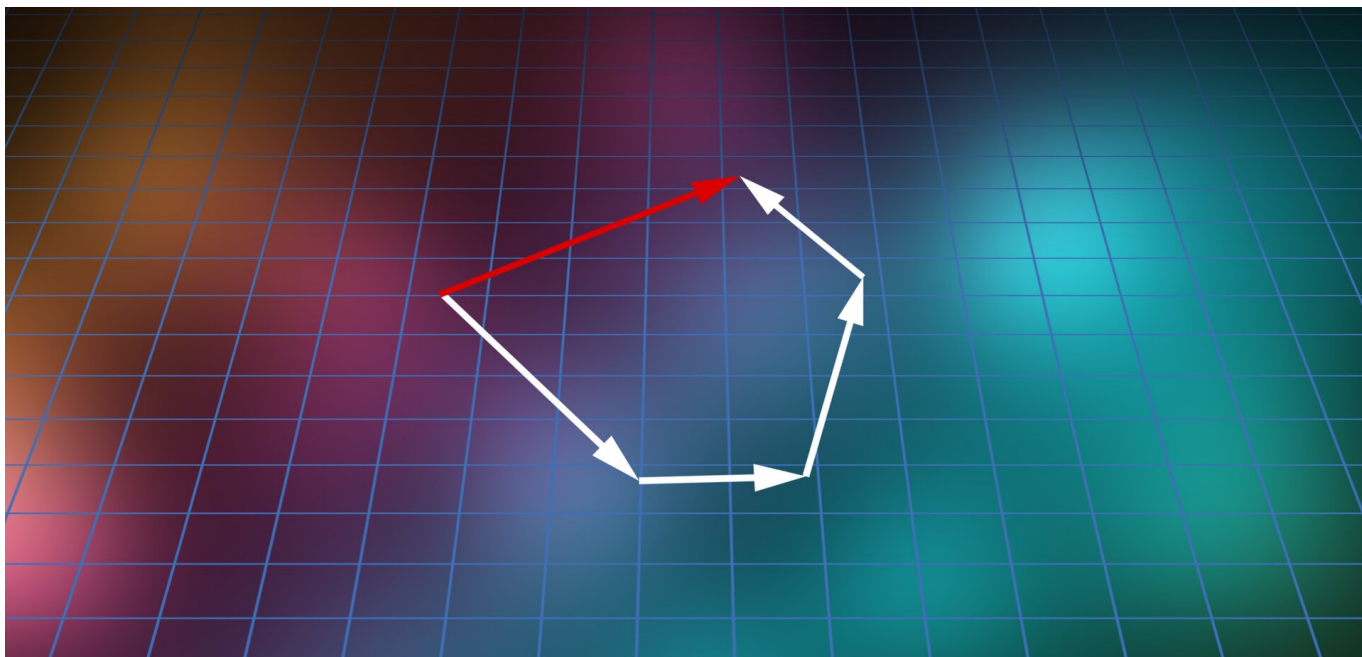




Dodawanie i odejmowanie wektorów

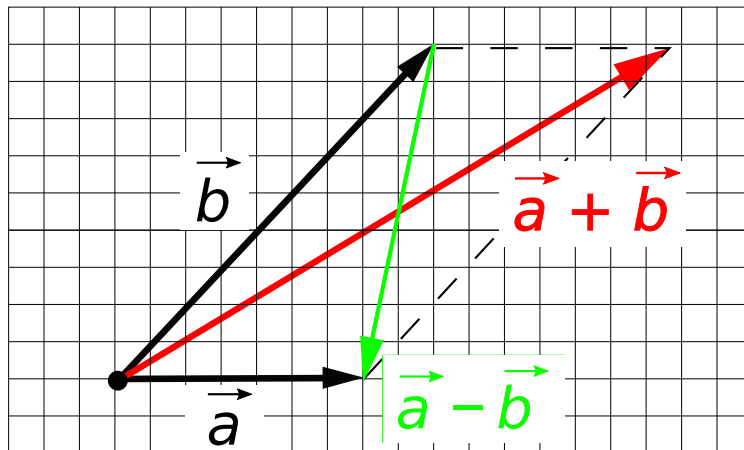
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Dodawanie i odejmowanie wektorów

Czy to nie ciekawe?

Wektor to uporządkowana para punktów, którą graficznie przedstawiamy jako strzałkę. Czy możemy dodać do siebie dwa wektory? Jak to możliwe, że dodajemy do siebie pary punktów lub strzałki? Co oznacza dodawanie wektorów?



Rys. a. Przykład wyznaczania sumy oraz różnicy dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Twoje cele

W tym e-materiale

- dowiesz się, jakie są sposoby dodawania wektorów,
- poznasz dwie metody graficzne dodawania wektorów oraz metodę obliczeniową,
- przeanalizujesz, czym różni się metoda graficzna od metody obliczeniowej oraz porównasz efektywność stosowania tych metod,
- wykorzystasz zdobytą wiedzę do samodzielnego rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Wektor to uporządkowana para punktów, którą graficznie przedstawia się jako strzałkę. Mamy dwie możliwości przedstawienia wektora, a co za tym idzie – co najmniej dwie metody wyznaczania sumy wektorów. Możemy to zrobić w sposób rachunkowy – działając na współrzędnych albo graficznie – działając na strzałkach.

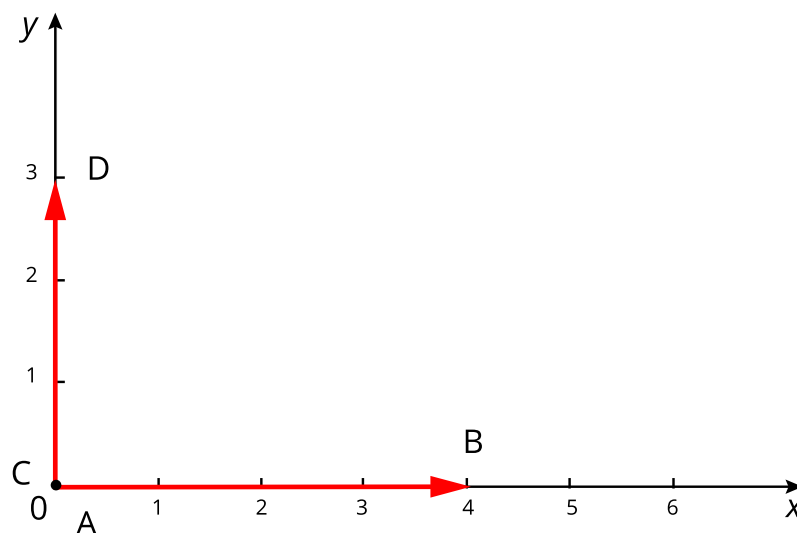
Jeśli znane są współrzędne początku oraz końca dwóch wektorów, to metoda rachunkowa jest najprostszą i najszybszą metodą ich dodawania oraz odejmowania. Jest to metoda możliwa do zastosowania zawsze.

1. Metoda rachunkowa

Aby dodawać wektory metodą rachunkową, w pierwszej kolejności należy podać ich współrzędne, np. w jakimś **układzie** kartezjańskim. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $A(a_x; a_y)$ i końcu w punkcie $B(b_x; b_y)$ wyznaczamy z korzystając ze wzoru $\overrightarrow{AB} = [b_x - a_x; b_y - a_y]$.

Jako przykład weźmy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A(1; 4)$ a $B(-5; 8)$, więc odejmowanie daje wynik $[-5 - 1; 8 - 4]$ czyli $\overrightarrow{AB} = [-6; 4]$. Współrzędne wektorów zapisujemy w nawiasie kwadratowym.

Dodając wektory dodajemy ich współrzędne wzdłuż osi x oraz współrzędne wzdłuż osi y (oraz wzdłuż osi z , jeśli mamy przestrzeń trójwymiarową). Jako przykład dodawania (zwanego często *składaniem*) wektorów metodą rachunkową, rozpatrzmy Rys. 1.:

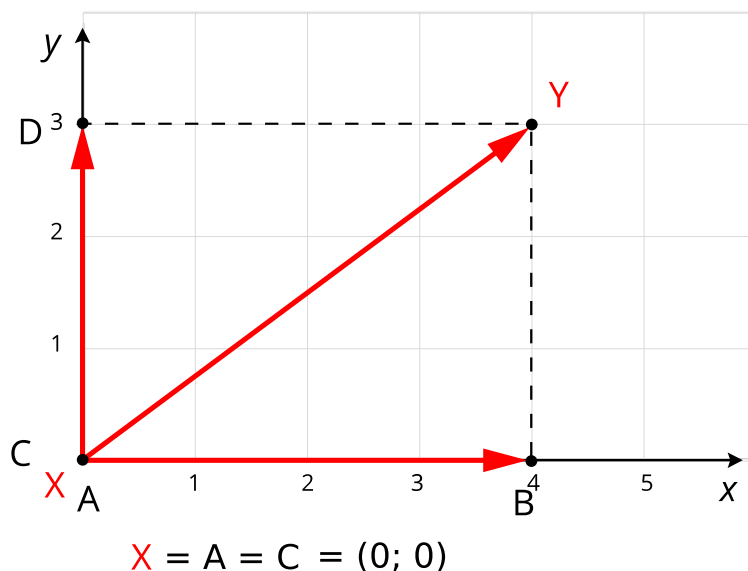


Rys. 1.

Mamy dwa wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{CD}$ zaczepione w początku układu współrzędnych $A = C = (0, 0)$. Aby dodać je do siebie, wyznaczmy najpierw ich współrzędne. Punkt A ma współrzędne $(0; 0)$, punkt B ma współrzędne $(4; 0)$. To znaczy, że wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[4; 0]$.

Podobnie, punkt C ma współrzędne $(0; 0)$, punkt D ma współrzędne $(0; 3)$. To znaczy, że współrzędne wektora $\overrightarrow{CD}$ to $[0; 3]$.

Chcemy wyznaczyć wektor $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. W tym celu dodajemy do siebie współrzędne iksowe i - osobno - igrekowe. Wynik dodawania, $\overrightarrow{XY}$, ma współrzędne $[4 - 0; 3 - 0]$. Jeśli więc umieścimy jego punkt zaczepienia w początku układu współrzędnych, to jego koniec będzie znajdował się w punkcie o współrzędnych $(4; 3)$ (Rys. 2.).

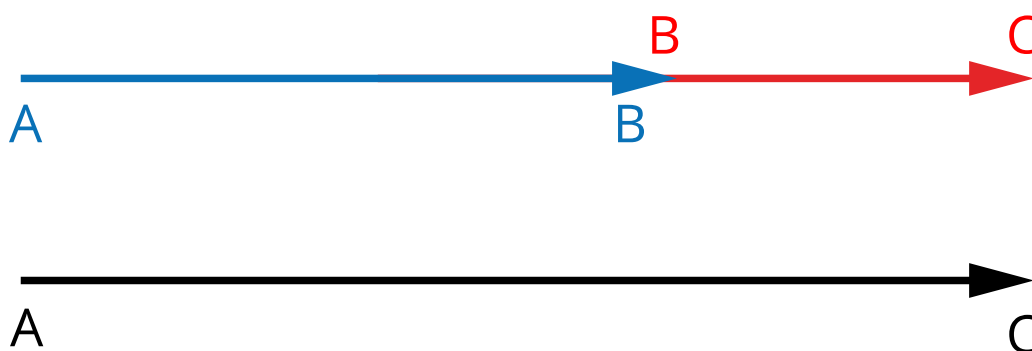


Rys. 2. Dodawanie wektorów

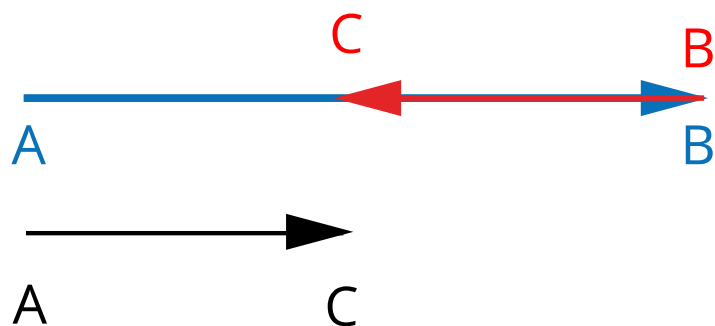
W ogólności sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ nazywamy wektor zaczepiony w punkcie A i końcu w punkcie C ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Jako przypadek szczególny rozpatrzmy dodawanie wektorów równoległych albo antyrównoległych, tj. mających wspólny kierunek i zgodne albo przeciwne zwroty. Ilustrują to Rys. 3a. oraz 3b.



Rys. 3a. Składanie wektorów o zgodnym zwrocie leżących na prostej



Rys. 3b. Składanie wektorów o zwrotach przeciwnych leżących na prostej

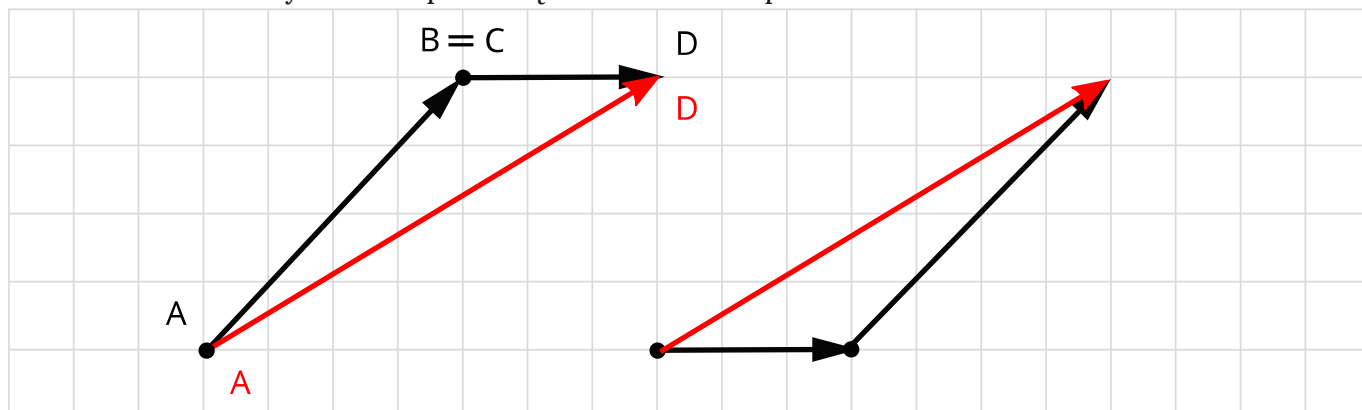
Ponieważ dodawanie wektorów jest łączne, możemy wszystkie te wektory dodać jednocześnie - wynik będzie taki sam.

Wektory możemy dodawać i odejmować również za pomocą **metody graficznej**. Mamy dwie takie metody:

2a. Metoda wieloboku

Aby dodać do siebie dwa wektory $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$, rysujemy wektor $\vec{AB}$, a następnie początek wektora $\vec{CD}$ umieszczamy w punkcie końcowym wektora $\vec{AB}$. Następnie z punktu początkowego wektora $\vec{AB}$ wyprowadzamy wektor o grocie w punkcie końcowym wektora $\vec{CD}$. Wyznaczony w ten sposób wektor (Rys. 4.), nazwijmy go $\vec{AD}$, jest sumą wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$.

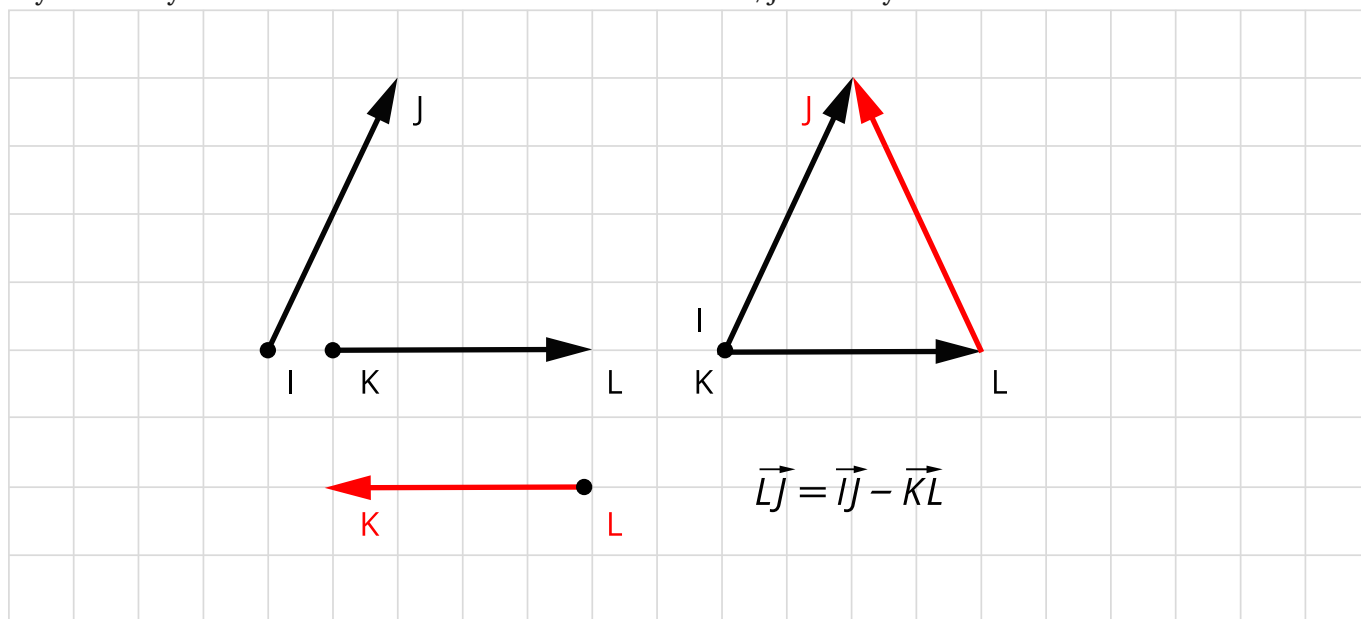
Obok sprawdzamy, że dodanie tych samych wektorów w przeciwnym porządku daje ten sam wektor. Dla czytelności pominięto oznaczenia punktów.



Rys. 4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, jeśli zapewnimy, że $B = C$

W przypadku równoległych wektorów powstający wielobok jest zdegenerowany do linii prostej, jak na Rys. 3a.

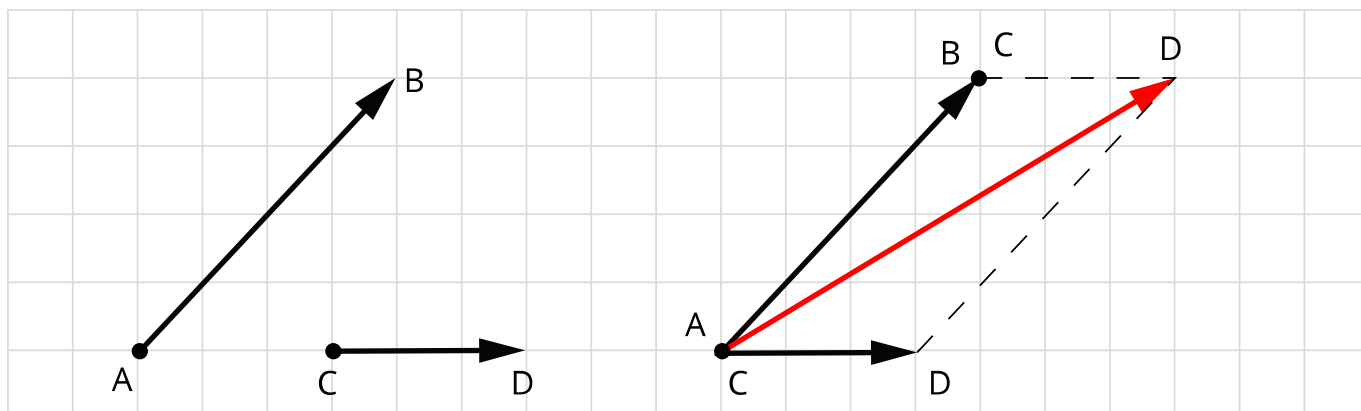
Aby od wektora $\overrightarrow{IJ}$ odjąć wektor $\overrightarrow{KL}$, postępujemy następująco: wykreślamy wektor $\overrightarrow{IJ}$, a następnie z początku wektora $\overrightarrow{IJ}$ wykreślamy wektor $\overrightarrow{KL}$. Z końca wektora $\overrightarrow{KL}$ wykreślamy wektor w kierunku końca wektora $\overrightarrow{IJ}$, jak na Rys. 5.



Rys. 5. $\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{LK}$

2b. Metoda równoległoboku

Aby dodać do siebie dwa wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, rysujemy wg Rys. 6. wektor $\overrightarrow{AB}$, a następnie początek wektora $\overrightarrow{CD}$ umieszczamy w tym samym punkcie, co początek wektora $\overrightarrow{AB}$. Rysujemy proste: równoległą do pierwszego wektora, przechodzącą przez koniec drugiego i drugą, równoległą do drugiego wektora i przechodzącą przez koniec pierwszego. Na koniec z punktu początkowego wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ wykreślamy wektor, którego grot znajduje się w punkcie przecięcia narysowanych prostych. Wyznaczony w ten sposób wektor jest sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$.



Widać związek tej metody z poprzednio omówioną metodą wieloboku - wystarczy przesunąć wektor $\overrightarrow{CD}$ równolegle wzdłuż $\overrightarrow{AB}$, aż punkt C „dotrze” do B - odtwarzamy wtedy trójkąt, którego użyliśmy w konstrukcji na Rys. 4.

Uwaga: Dodawanie wektorów, podobnie jak dla liczb, jest działaniem przemienne i łącznym.

Słowniczek

układ współrzędnych

(ang.: *coordinate frame*) - układ nierównoległych do siebie osi, wyznaczających niezależne kierunki. Dla ułatwienia będziemy się posługiwać dwuwymiarowym kartezjańskim układem współrzędnych tzn. układem składającym się z dwóch prostopadłych osi ze wspólną jednostką długości. (Uwaga: jedna oś także tworzy układ współrzędnych - z punktu widzenia rachunku na wektorach niezbyt skomplikowany - w takiej sytuacji można utożsamiać wektory z liczbami: ich kierunkiem jest kierunek osi, wartością - wartość bezwzględna liczby, zwrotem - jej znak.)

Film samouczek

Dodawanie wektorów

W tym samouczku omówimy na graficzną metodę dodawania wektorów. Mamy dwie takie metody: wieloboku i równoległoboku.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DQQVHAAGM>

Wysłuchaj alternatywnej ścieżki lektorskiej.

Polecenie 1

Znajdź metodą wieloboku sumę i różnicę wektorów

$$\vec{a} = [-3; 5], \vec{b} = [1, -4].$$

Oblicz ich długości i porównaj z długościami wyjściowych wektorów.

Polecenie 2

Inną ważną własnością sumy i różnicy wektorów jest tzw. *tożsamość równoległoboku*. Sprawdź, że dla wektorów z Polecenia 1. prawdą jest, że

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



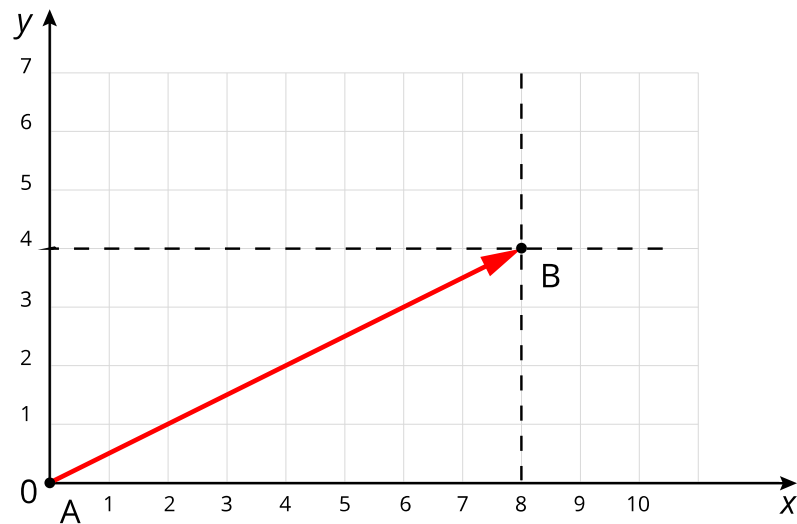
Dane są wektory $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0; 2 \end{bmatrix}$ oraz $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 3; 0 \end{bmatrix}$. Wyznacz współrzędne punktu F , jeśli $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, a punkt E ma współrzędne $(0, 0)$.

Odpowiedź: (,)

Ćwiczenie 2



Na rysunku widzisz wektor $\overrightarrow{AB}$, przy czym $A = (0; 0)$, $B = (8; 4)$. Jest on sumą wektorów $\overrightarrow{CD}$ oraz $\overrightarrow{EF}$. Który z poniższych podpunktów poprawnie opisuje współrzędne możliwych wektorów składowych?



☐ $C = [0; 0]$, $D = [8; 0]$, $E = [0; 4]$, $F = [0; 0]$

☐ $C = [0; 0]$, $D = [8; 0]$, $E = [0; 0]$, $F = [0; 4]$

☐ $C = [8; 0]$, $D = [0; 0]$, $E = [0; 0]$, $F = [0; 4]$

☐ $C = [0; 0]$, $D = [8; 0]$, $E = [0; 0]$, $F = [4; 0]$

Ćwiczenie 3



Która z metod dodawania wektorów pozwala dodać wektory równoległe do siebie?

☐ Metoda wieloboku

☐ Metoda równoległoboku

☐ Metoda rachunkowa

Ćwiczenie 4



Dane są wektory $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4; 0 \end{bmatrix}$ oraz $\vec{CD} = \begin{bmatrix} 3; 0 \end{bmatrix}$. Jaką długość ma wektor $\vec{EF}$, jeśli wiemy, że $\vec{EF} = \vec{AB} - \vec{CD}$?

Odpowiedź: Wektor ten ma długość .

Ćwiczenie 5



Wskaż zdania prawdziwe:

☐ Metodą rachunkową nie można dodawać wektorów równoległych do siebie.

☐ Wynik dodawania wektorów otrzymany metodą obliczeniową jest zazwyczaj przybliżony.

☐ Jeśli dodajemy więcej niż dwa wektory, lepszą metodą graficzną jest metoda wieloboku.

☐ Wszystkie metody, zarówno graficzne jak i obliczeniowa, jeśli są wykonane poprawnie, powinny prowadzić do tego samego wyniku.

Ćwiczenie 6



Które ze zdań są prawdziwe?

☐ Dodawanie wektorów jest łączne.

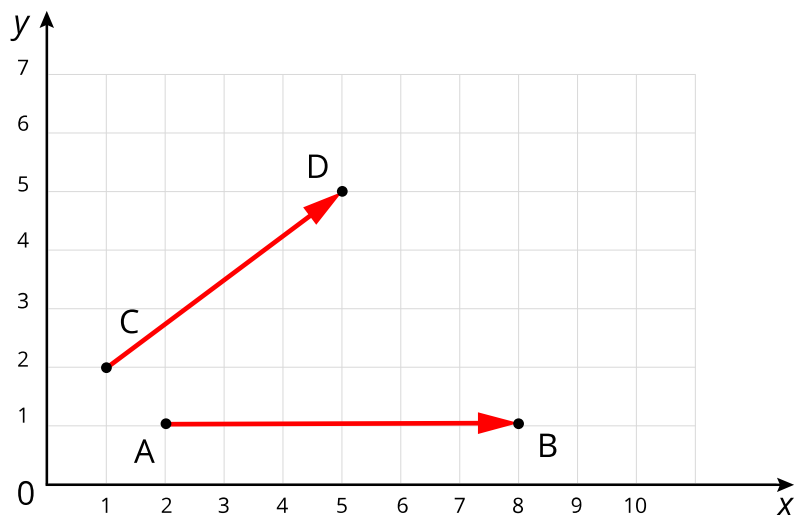
☐ Dodawanie wektorów jest przemienne.

☐ Odejmowanie wektorów jest przemienne.

☐ Jeśli od wektora $\overrightarrow{AB}$ odejmiemy wektor $\overrightarrow{CD}$, to otrzymamy taki sam wynik, jak przy dodaniu wektora $\overrightarrow{DC}$.

Ćwiczenie 7

Na rysunku widzisz dwa wektory, $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{CD}$. Który z poniższych wektorów jest ich sumą?



☐ $\overrightarrow{KL} = [12; 3]$

☐ $\overrightarrow{EF} = [5; 10]$

☐ $\overrightarrow{GH} = [6; 4]$

☐ $\overrightarrow{IJ} = [8; 5]$

Ćwiczenie 8



Mamy dane dwa wektory $\overrightarrow{AB} = [6; 0]$, $\overrightarrow{CD} = [4; 4]$. Który z poniższych wektorów jest wynikiem odejmowania $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$?

☐ [2;-4]

☐ [-4;2]

☐ [2;4]

☐ [10;4]

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Martyna Jakubowska
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Dodawanie wektorów
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy/rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia - wymagania ogólne I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. Zakres podstawowy Treści nauczania - wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 5) rozróżnia wielkości wektorowe i skalarne. Zakres rozszerzony Treści nauczania - wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 5) rozróżnia wielkości wektorowe i skalarne, wykonuje graficznie działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe).
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń - wymienia sposoby dodawania wektorów. - opisuje dwie metody graficzne dodawania wektorów oraz metodę obliczeniową. - analizuje, czym różni się metoda graficzna od metody obliczeniowej. - wymienia argumenty przemawiające za stosowaniem poszczególnych metod. - uzasadnia, kiedy i dlaczego poszczególne metody nie mogą być stosowane. - stosuje zdobytą wiedzę teoretyczną dodając wektory każdą z poznanych metod.
Strategie i metody nauczania:	– blended-learning – nauczanie hybrydowe
Formy zajęć:	– film samouczek, – praca w grupach.
Środki dydaktyczne:	– komputer z rzutnikiem, – kartka w kratkę, – linijka, – długopis.
Materiały pomocnicze:	– przygotowane pary wektorów dla potrzeb przykładów rachunkowych wykonywanych przez uczniów w czasie lekcji.
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel rozpoznaje wiedzę uczniów poprzez zadanie pytań: co to są wektory? Czy uczniowie wiedzą, że wektor możemy przedstawić graficznie oraz za pomocą współrzędnych? Czy wiedzą, jakie właściwości mają wektory? Przeczytanie i omówienie wstępu.	
Faza realizacyjna:	

Uczniowie samodzielnie czytają tekst, a następnie wspólnie oglądają film samouczek. Nauczyciel sprawdza, czy uczniowie mają jakieś pytania związane z tekstem lub filmem. Uczniowie wspólnie zastanawiają się nad pytaniami, które się pojawiły. Nauczyciel naprowadza uczniów na właściwe odpowiedzi. Jeśli zajdzie taka potrzeba, uczniowie wracają do wybranego fragmentu tekstu lub filmu.

Uczniowie dzielą się na trzy grupy i analizują metody dodawania wektorów. Nauczyciel podaje współrzędne dwóch wektorów, a każda z grup dodaje te dwa wektory inną metodą. Uczniowie porównują wyniki uzyskane przez różne grupy. Uczniowie, wykorzystując zdobytą wiedzę, rozwiązują problemy z zestawu zadań.

Faza podsumowująca:

Uczniowie w grupach omawiają rozwiązania zadań, wspólnie zastanawiając się nad zadaniami, które sprawiły im trudność. Każda z grup omawia dwa zadania „na forum klasy”. Nauczyciel sprawdza, które zadania sprawiły uczniom kłopot i dlaczego. Poprzez analizę wypowiedzi uczniów nauczyciel określa, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele.

Praca domowa:

Nauczyciel wcześniej przygotowuje pulę zadań podobnych do obecnych zadań, o zróżnicowanym stopniu trudności.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Film-samouczek może być wykorzystany przed lekcją jako wprowadzenie do niej lub w czasie lekcji tak, jak pokazano w konspekcie.