Jak wyznaczyć najmniejszą/największą objętość bryły?

Jak wyznaczyć najmniejszą/największą objętość bryły?

Źródło: Susan Holt Simpson, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W tej lekcji nauczysz się opisywać, uwzględniając narzucone warunki, objętość bryły za pomocą funkcji jednej zmiennej. Analiza tej funkcji pozwoli nam ustalić wymiary bryły o największej/najmniejszej objętości oraz umożliwi obliczenie tej objętości.

Twoje cele

- Wyznaczysz funkcję w zależności od sytuacji z zadania.
- Wyznaczysz pochodną funkcji.
- Wyznaczysz dziedzinę funkcji.
- Wyznaczysz ekstremum lokalne funkcji.
- Na podstawie wyznaczonego ekstremum lokalnego funkcji wskażesz maksimum/minimum.

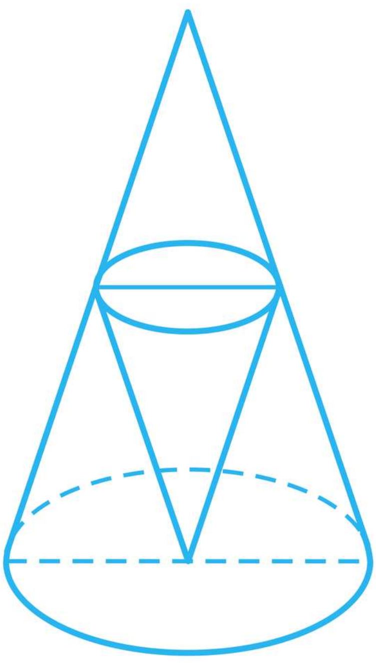
Przeczytaj

Zadania optymalizacyjne z jednej strony wymagają za każdym razem indywidualnego podejścia, z drugiej mają pewien powtarzający się schemat postępowania.

1. Uzależnienie wszystkich potrzebnych wymiarów od jednej zmiennej
2. Wyznaczenie funkcji opisującej badaną wielkość (w tym materiale objętość bryły)
3. Wyznaczenie dziedziny otrzymanej funkcji
4. Obliczenie pochodnej otrzymanej funkcji
5. Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej
6. Uzasadnienie maksimum/minimum funkcji
7. Obliczenie największej/najmniejszej wartości funkcji

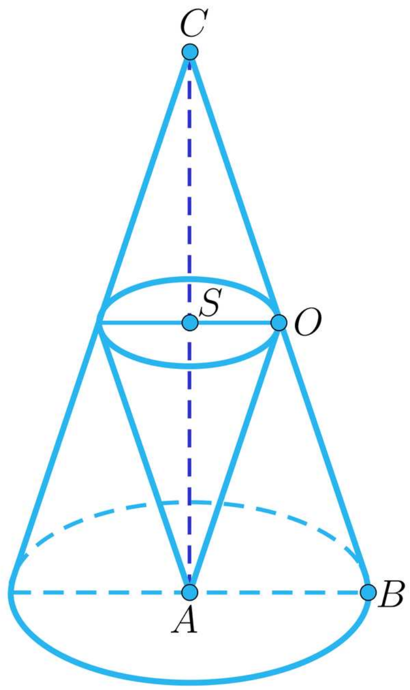
Przykład 1

W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisano drugi stożek w taki sposób, że jego wierzchołek znajduje się w środku podstawy danego stożka (zobacz rysunek). Wyznaczymy największą możliwą objętość wpisanego stożka.



Rozwiązanie

Oznaczmy:



$|AB| = R$ – promień dużego stożka,
$|AC| = H$ – wysokość dużego stożka,
$|SO| = r$ – promień wpisanego stożka,
$|AS| = h$ – wysokość wpisanego stożka.

Z powyższych oznaczeń możemy zauważyć, że jeśli $|AS| = h$ oraz $|AC| = H$, to $|SC| = H - h$. Trójkąty ABC oraz SOC są podobne (cecha KKK). Z podobieństwa

$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|SC|}{|SO|}$, tj. $\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$.

Wyliczając r z powyższego równania otrzymujemy:

$r = \frac{R(H-h)}{H}$.

Zapiszmy wzór na objętość wpisanego stożka

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Podstawiając wyliczoną wcześniej wielkość $r = \frac{R(H-h)}{H}$ do wzoru opisującego objętość stożka otrzymujemy funkcję zmiennej h:

$V(h) = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2(H-h)^2}{H^2} h$.

Długości boków muszą być dodatnie, więc dziedziną jest

$D : h \in (0, H)$.

Wyznaczmy pochodną stosując wzór na pochodną iloczynu dwóch funkcji

$V'(h) = \frac{R^2}{3H^2}\pi\left[-2(H-h)h + (H-h)^2\right].$

Uprościmy

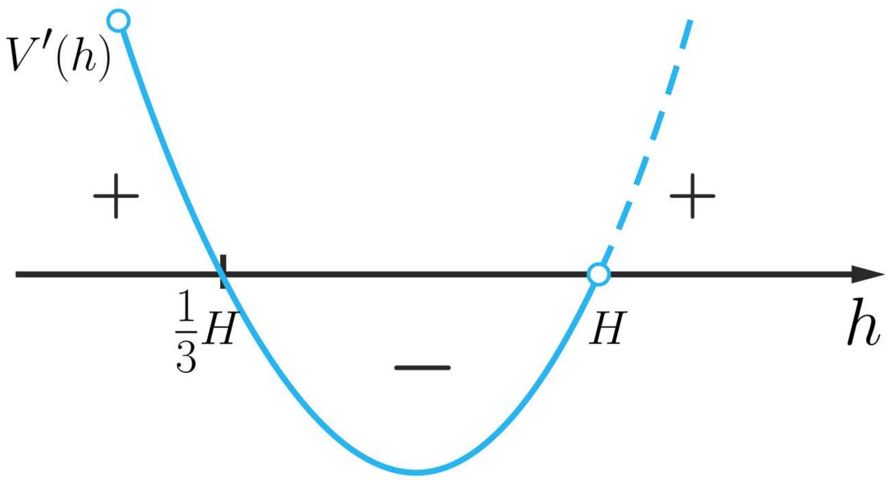
$V'(h) = \frac{R^2}{3H^2}\pi\left[3h^2 - 4hH + H^2\right].$

Aby wyznaczyć miejsce zerowe pochodnej wystarczy znaleźć miejsca zerowe funkcji kwadratowej, która występuje w nawiasie.

W tym przypadku $a = 3,\ b = -4H,\ c = H^2$, więc $\Delta = (-4H)^2 - 4 \cdot 3H^2 = 4H^2$ i $\sqrt{\Delta} = 2H$.

Wyliczając otrzymujemy $h_1 = \frac{1}{3}H$ oraz $h_2 = H$. Drugie miejsce zerowe nie należy do dziedziny.

Naszkicujemy wykres pochodnej.



Aby wyznaczyć ekstremum stworzymy tabelę, przedziały w tabeli są zależne od dziedziny oraz punktów, dla których pochodna się zeruje.

h	$\left(0, \frac{1}{3}H\right)$	$\frac{1}{3}H$	$\left(\frac{1}{3}H, H\right)$
$V'(h)$	$+$	0	$-$
$V(h)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

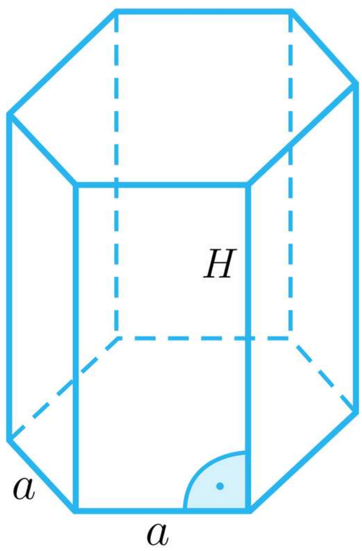
Funkcja osiąga największą wartość dla $h = \frac{1}{3}H$. Zatem objętość stożka wpisanego jest możliwie największa, gdy promień wynosi $r = \frac{2}{3}R$. Wyznaczymy największą objętość $V = \frac{4}{81}\pi R^2 H$.

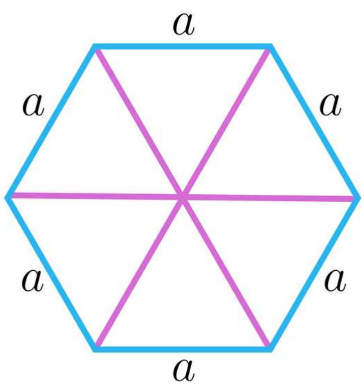
Przykład 2

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi P. Wyznaczymy krawędź podstawy wiedząc, że jego objętość jest największa z możliwych.

Rozwiązanie

Oznaczmy:
a – krawędź podstawy graniastosłupa,
H – wysokość graniastosłupa.





W podstawie znajduje się sześciokąt. Możemy go podzielić na 6 trójkątów równobocznych. Pole jednego trójkąta równobocznego wynosi $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Zatem $P_p = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Pole powierzchni całkowitej możemy zapisać $P_c = 2P_p + P_b$. Podstawiając

$P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6aH.$

Mamy zatem

$H = \frac{P-3a^2\sqrt{3}}{6a}.$

Długości krawędzi muszą być dodatnie zatem $\frac{P-3a^2\sqrt{3}}{6a} > 0$. Mianownik jest większy od zera dlatego wystarczy by licznik też był dodatni zatem $a^2 < \frac{P}{3\sqrt{3}}$. Stąd $a < \frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{3}{4}}}$.
Dziedziną jest zbiór

$D : a \in \left(0, \frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{3}{4}}}\right).$

Wyznaczymy wzór na objętość graniastosłupa

$V = P_pH.$

Podstawiając otrzymujemy

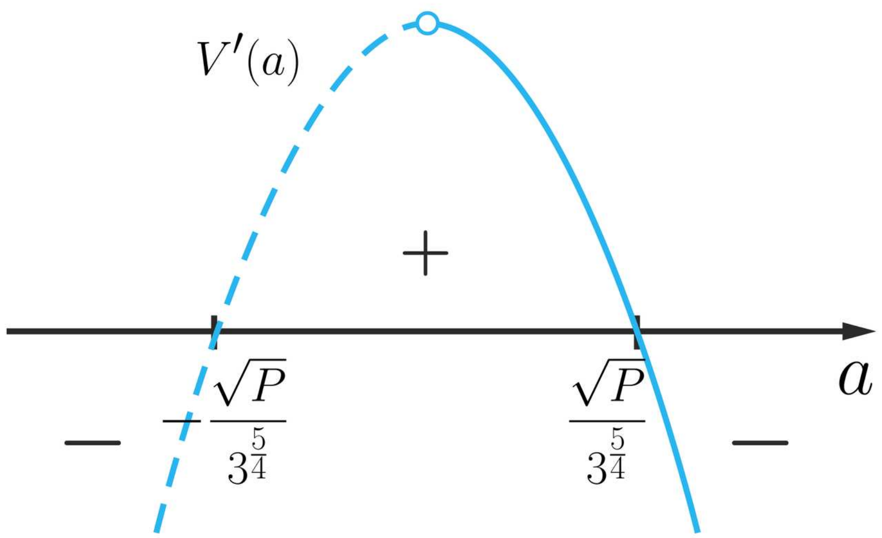
$V(a)=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{P-3a^2\sqrt{3}}{6a}=\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(P-3a^2\sqrt{3}\right).$

Wyznaczymy pochodną stosując wzór na pochodną iloczynu dwóch funkcji

$V'(a)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(P-3a^2\sqrt{3}\right)+\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(-6a\sqrt{3}\right)=\frac{P\sqrt{3}}{4}-\frac{27a^2}{4}.$

Miejscem zerowej pochodnej jest $a=\frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{5}{4}}}$ (drugie rozwiązanie jest ujemne więc pomijamy, ponieaż nie należy do dziedziny). Wyznaczone miejsce zerowe należy do dziedziny.

Naszkicujemy wykres funkcji.



Następnie wyznaczymy tabelkę.

a	$\left(0,\frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{5}{4}}}\right)$	$\frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{5}{4}}}$	$\left(\frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{5}{4}}},\frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{3}{4}}}\right)$
$V'(a)$	$+$	0	$-$
$V(a)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Funkcja V osiąga największą wartość dla $a=\frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{5}{4}}}$, zatem objętość graniastosłupa jest możliwie największa, gdy długość krawędzi podstawy wynosi $a=\frac{\sqrt{P}}{3^{\frac{5}{4}}}$.

Przykład 3

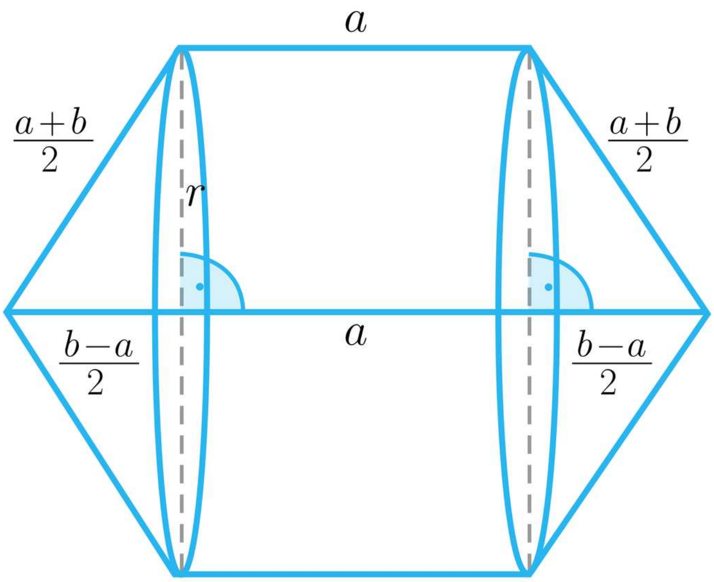
Dany jest trapez równoramienny taki, że można w niego wpisać okrąg oraz suma miar podstaw wynosi 20 cm. Dokonano obrotu trapezu wokół dłuższej podstawy. Wiedząc, że objętość otrzymanej bryły jest największa z możliwych wyznacz tą objętość.

Rozwiązanie

Oznaczmy:
a – krótsza podstawa trapezu,
b – dłuższa podstawa trapezu,
c – ramię trapezu.

Z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu otrzymujemy $c = \frac{a+b}{2}$.

Naszkicujemy figurę po obrocie.



Z rysunku możemy zauważyć, że po obrocie otrzymaliśmy dwa identyczne stożki oraz walec. Wyznaczymy wspólny promień podstawy tych brył z twierdzenia Pitagorasa

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + r^2$.

Kontunuując obliczenia

$r = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{b^2-2ab+a^2}{4}}$.

Otrzymujemy $r = \sqrt{ab}$. Z treści zadania wiemy, że $a + b = 20 \text{ cm}$. Wyznaczając b w zależności od a otrzymujemy $b = 20 - a$. Stąd otrzymujemy dziedzinę:

$D : a \in (0, 20)$.

Zapiszmy wzory na objętości opierając się rysunkiem:

$V_w = \pi r^2 a$ – objętość walca,

$V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{b-a}{2}\right)$ – objętość stożka.

Zauważmy, że $r = \sqrt{a(20-a)}$, więc $r^2 = a(20-a)$.

Ponadto $\frac{b-a}{2} = \frac{20-a-a}{2} = 10 - a$

Objętość otrzymanej bryły wynosi $V = 2V_s + V_w$, podstawiając wyznaczone wielkości do wzorów otrzymujemy:

$V(a) = \frac{2}{3}\pi a(20-a)(10-a) + \pi a(20-a)a.$

Tym samym uzyskaliśmy funkcję zmiennej a opisującą objętość otrzymanej bryły w zależności od krótszej podstawy trapezu.

Kontynuując

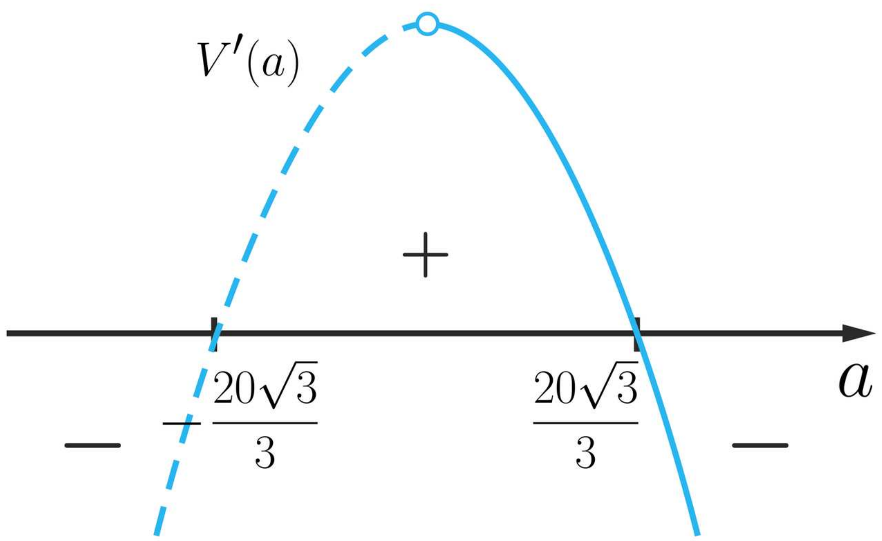
$V(a) = \pi\left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{400}{3}a\right).$

Wyznaczymy pochodną

$V'(a) = \pi\left(-a^2 + \frac{400}{3}\right).$

Miejscem zerowym pochodnej jest $a_1 = -\frac{20\sqrt{3}}{3}$ oraz $a_2 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$. Pierwsze miejsce zerowe nie należy do dziedziny, natomiast drugie należy.

Naszkicujemy wykres pochodnej.



Stworzymy tabelę.

a	$\left(0, \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}, 20\right)$
$V'(a)$	$+$	0	$-$
$V(a)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

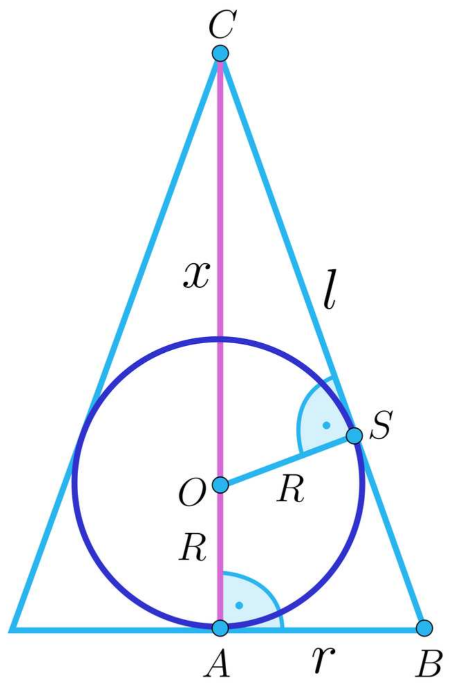
Zatem objętość naszej bryły jest możliwie największa, gdy krótsza podstawa trapezu ma długość $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$. Wyznaczymy objętość
$V\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \pi\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{400}{3} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16000\sqrt{3}}{27}$.

Przykład 4

Stożek został opisany na kuli o promieniu $5\ \text{cm}$. Wiedząc, że objętość stożka jest najmniejsza z możliwych wyznaczymy tą objętość.

Rozwiązanie

Naszkicujmy przekrój osiowy.



Z treści zadania wynika, że $R = 5\ \text{cm}$. Możemy zaobserować, że trójkąty ABC oraz OSC są podobne (cecha KKK). Z podobieństwa mamy

$\frac{x}{R} = \frac{l}{r}$, więc $rx = Rl$.

Z twierdzenia Pitagorasa $l = \sqrt{(x+5)^2 + r^2}$. Podstawiając $rx = Rl$ do wcześniej wyprowadzonego wzoru otrzymujemy, że

$rx = R\sqrt{(x+5)^2 + r^2}$.

Podnosząc obustronnie do kwadratu oraz wyznaczając r^2 otrzymujemy

$r^2 = \frac{25(x+5)^2}{x^2-25}$.

Wyznaczmy dziedzinę

$D : x \in (5, \infty)$.

Wyznaczymy wzór na objętość stożka $V = \frac{1}{3}\pi r^2(x+5)$. Po podstawieniu za r wcześniej wyznaczonego wyrażenia otrzymujemy funkcję zmiennej x opisującą objętość otrzymanego stożka.

$V(x) = \frac{1}{3}\pi \frac{25(x+5)^2}{x^2-25}(x+5)$.

Po przekształceniach otrzymujemy

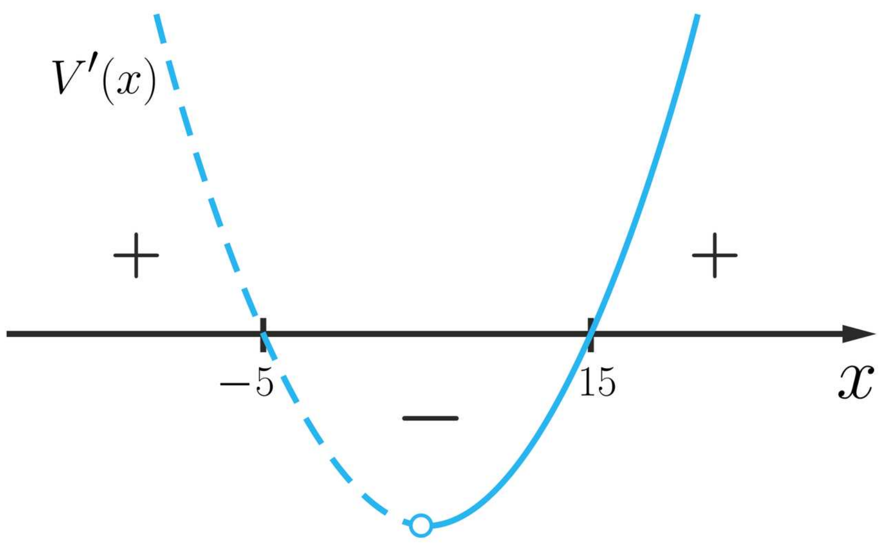
$V(x) = \frac{25\pi}{3} \frac{(x+5)^2}{x-5}$.

Wyznaczymy pochodną

$V'(x) = \frac{25\pi}{3} \frac{2(x+5)(x-5)-(x+5)^2}{(x-5)^2} = \frac{25\pi}{3} \frac{x^2-10x-75}{(x-5)^2}$.

Aby wyznaczyć miejsce zerowe pochodnej, wystarczy licznik przyrównać do zera. Otrzymujemy $x_1 = -5$ oraz $x_2 = 15$. Pierwsze miejsce zerowe nie należy do dziedziny.

Naszkicujemy wykres pochodnej.



Stworzymy tabelę.

x	$(5, 15)$	15	$(15, \infty)$
$V'(x)$	$-$	0	$+$
$V(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

> Zatem rozważany stożek osiąga najmniejszą objętość dla $x = 15$. Wyznaczymy najmniejszą objętość $V = \frac{1000}{3}\pi$.

Słownik

> **pochodna iloczynu dwóch funkcji**
>
> jeśli obie funkcje $f(x)$, $g(x)$ są różniczkowalne, to pochodną iloczynu tych funkcji obliczamy według wzoru:
>
> $$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

> **twierdzenie: O czworokącie opisanym na okręgu**
>
> czworokąt wypukły można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są sobie równe

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z poniższą animacją 3D, a następnie wykonaj polecenie.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EkYP3QX

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący objętości bryły.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

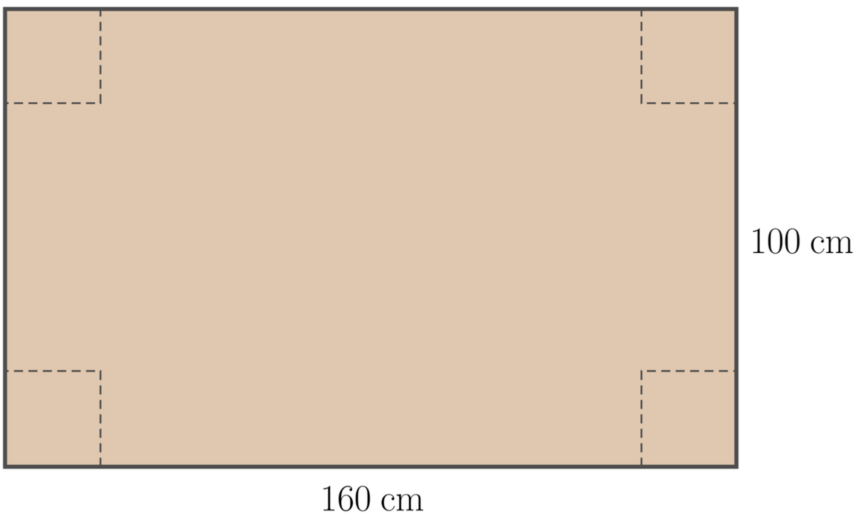
Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Dany jest prostokątny karton o długości 160 cm i szerokości 100 cm. W czterech rogach wycięto kwadratowe naroża. Następnie zagięto wzdłuż przerywanych linii, tworząc prostopadłościenne pudełko bez przykrywki.



Ćwiczenie 6

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Suma długości tej krawędzi bocznej i najdłuższej krawędzi bocznej wynosi 20. Wiedząc, że objętość jest największa z możliwych wyznacz krawędź podstawy oraz wysokość tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 7

Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 20π. Wyznacz promień stożka wiedząc, że jego objętość jest największa z możliwych.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Alicja Dembczak-Kołodziejczyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć najmniejszą/największą objętość bryły?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres podstawowy.
Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

XIII. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczyny, ilorazu o funkcji złożonej;
5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne za pomocą pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci funkcji
- wyznacza dziedzinę otrzymanej funkcji
- wyznacza pochodną funkcji
- wyznacza ekstremum lokalne funkcji
- wskazuje w wyznaczonym ekstremum czy funkcja osiąga wartość największą lub najmniejszą
- wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wraz z nauczycielem analizują i omawiają rozwiązane przykłady z sekcji „Przeczytaj".
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja 3D", czyta treść polecenia nr 1 – „Zapoznaj się uważnie z poniższą animacją 3D, a następnie wykonaj polecenie". Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem. Uczniowie w parach rozwiązują polecenie nr 2 w sekcji „Animacja 3D". Wybrana para prezentuje swoje rozwiązanie. Nauczyciel, w razie potrzeby, uzupełnia informacje.
3. Następnie uczniowie wykonują w grupach zadania z ćwiczeń interaktywnych.
4. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy grup dzielą się informacjami na temat pracy swojej grupy, prezentują pomysły, przedstawiają wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu tylko wybrane ćwiczenia albo te, których uczniowie nie zdążyli zrobić z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Pochodna i monotoniczność funkcji

Wskazówki metodyczne:

Animację 3D można wykorzystać jako wstęp do zajęć, utrwalając w ten sposób schemat rozwiązania zadań optymalizacyjnych.