



Działania na pierwiastkach

Definicja pierwiastka dowolnego stopnia. Twierdzenia o działaniach na pierwiastkach.

Działania na pierwiastkach

- Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b taką, która podniesiona do drugiej potęgi jest równa a

.

Zatem, dla dowolnej liczby nieujemnej a

$$\sqrt{a} = b$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a$

i $b \geq 0$

.

- Pierwiastkiem sześciennym z liczby a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a

.

Zatem, dla dowolnej liczby a

$$\sqrt[3]{a} = b$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $b^3 = a$

.

Zauważmy, że powyższe definicje różnią się wyłącznie założeniami dla liczb a

i b

. Ponieważ b^2

jest zawsze liczbą nieujemną, to pierwiastki kwadratowe obliczamy wyłącznie z liczb nieujemnych.

Natomiast b^3

może być zarówno ujemne, jak i nieujemne, dlatego pierwiastek sześcienny obliczamy z dowolnej liczby a

.

Podobnie możemy zapisać definicje pierwiastka stopnia n

większego niż 1

, pamiętając o odpowiednim założeniu dotyczącym liczby podpierwiastkowej.

- Jeśli n jest liczbą parzystą większą od 1, to pierwiastkiem stopnia n z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b taką, która podniesiona do potęgi n jest równa a

.

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

- Jeśli n jest liczbą nieparzystą większą od 1 to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy liczbę b taką, która podniesiona do potęgi n jest równa a

.

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Twierdzenie: Działania na pierwiastkach

Jeśli a

i b

są liczbami nieujemnymi, n

i m

są liczbami naturalnymi większymi od 1

, k

jest dodatnią liczbą naturalną, to

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

, $b \neq 0$

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Jeśli w powyższym twierdzeniu liczby n

i m

(stopnie pierwiastków) są nieparzyste, to twierdzenie pozostanie prawdziwe również dla ujemnych liczb podpierwiastkowych (a

lub b

).