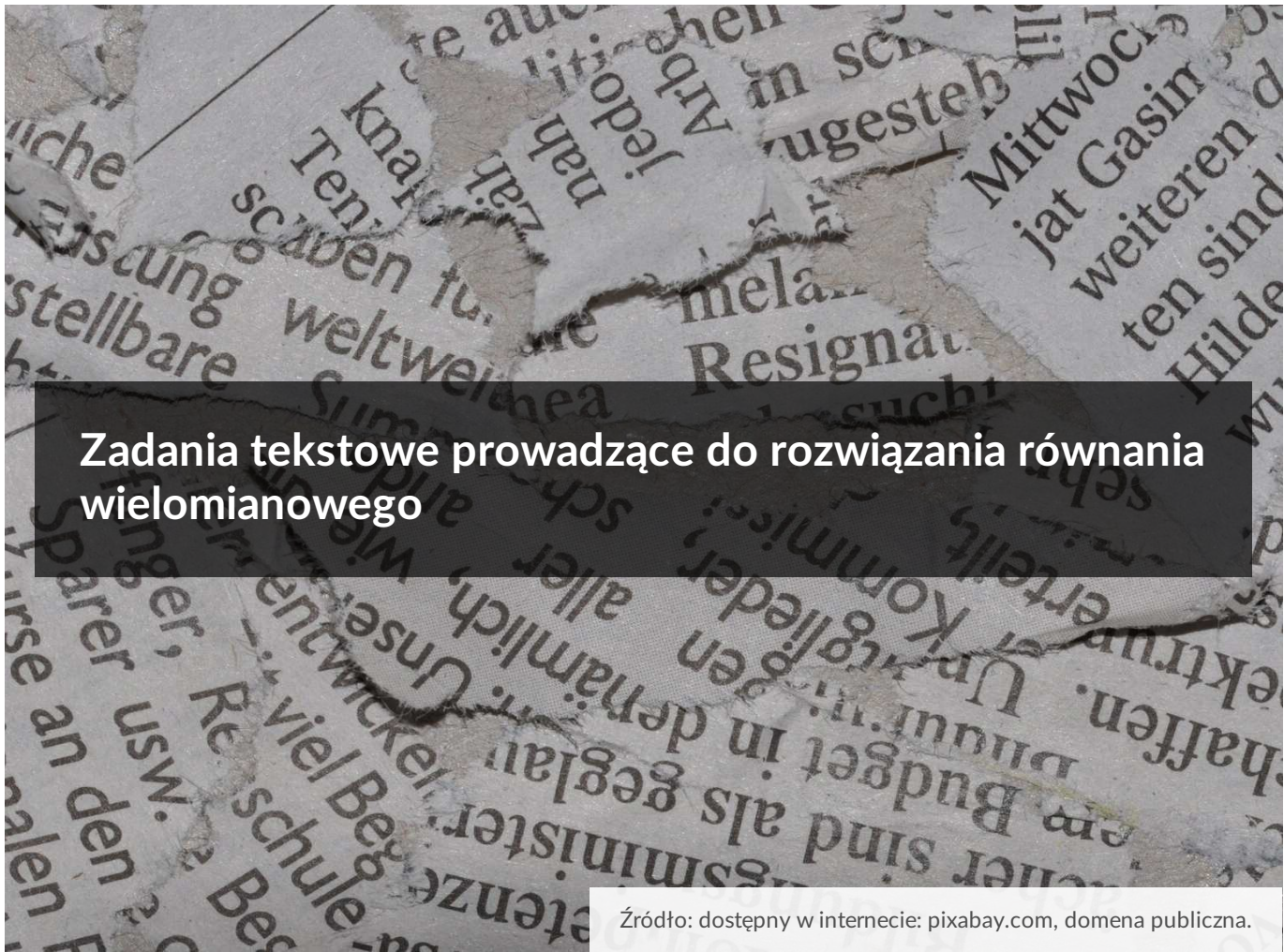




Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania wielomianowego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania wielomianowego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się zadaniami tekstowymi, prowadzącymi do rozwiązania równania wielomianowego. Skoncentrujemy się na zadaniach z parametrem określających liczbę pierwiastków równania oraz znajdowaniu współczynników równania wielomianowego spełniających określone warunki.

Będziemy również wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów, które są rozwiązaniami równań wielomianowych.

Twoje cele

- Określisz w zadaniu tekstowym warunki, dla których rozwiązanie równania wielomianowego ma żadaną własność.
- Znajdziesz współczynniki liczbowe równania wielomianowego spełniające określone warunki.
- Wyznaczysz sumę, różnicę i iloczyn zbiorów.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n , $n \in \mathbb{N}$ nazywamy równanie, które można zapisać w postaci

$$W(x) = 0,$$

gdzie:

$W(x)$ – jest wielomianem stopnia n .

Definicja: Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą a , dla której zachodzi warunek

$$W(a) = 0.$$

Rozwiązaniem równania $W(x) = 0$ są wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

W rozwiązywaniu zadań wykorzystamy definicje dotyczące działań na zbiorach.

Definicja: Suma zbiorów $A \cup B$

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B .

Definicja: Iloczyn zbiorów $A \cap B$

Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B .

Definicja: Różnica zbiorów $A \setminus B$

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

Przykład 1

Obliczymy sumę kwadratów wszystkich pierwiastków równania $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$.

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

Niech $x^2 = t$, $t \geq 0$.

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 2 = 8 > 0$, zatem równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania t_1, t_2 .

Ze wzorów Viete'a wiemy, że $t_1 + t_2 = 4 > 0$ oraz $t_1 \cdot t_2 = 2 > 0$, czyli oba rozwiązania równania są dodatnie.

Zatem równanie $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ ma cztery rozwiązania $-\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Suma kwadratów pierwiastków równania jest równa:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_2})^2 &= t_1 + t_2 + t_1 + t_2 = 2t_1 + 2t_2 = \\ &= 2 \cdot (t_1 + t_2) = 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

Suma kwadratów wszystkich pierwiastków równania jest równa 8.

Przykład 2

Dla jakich wartości parametru p równanie $x^3 + (p - 1)x^2 + 2px = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty?

$$x^3 + (p - 1)x^2 + 2px = 0$$

$$x(x^2 + (p - 1)x + 2p) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + (p - 1)x + 2p = 0$$

$$\Delta = (p - 1)^2 - 4 \cdot 2p = p^2 - 2p + 1 - 8p = p^2 - 10p + 1$$

$$p^2 - 10p + 1 < 0$$

$$\Delta p = 100 - 4 = 96 \Rightarrow \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$p_1 = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$p_2 = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$p \in (5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6})$$

Równanie ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty dla $p \in (5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6})$.

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem równania $mx^2 - 7x + 6 = 0$ jest liczba m ?

Aby liczba m była rozwiązaniem równania musi zachodzić warunek:

$$m \cdot m^2 - 7m + 6 = 0$$

$$m^3 - 7m + 6 = 0$$

$$m^3 - m - 6m + 6 = 0$$

$$m(m^2 - 1) - 6 \cdot (m - 1) = 0$$

$$m(m - 1)(m + 1) - 6 \cdot (m - 1) = 0$$

$$(m - 1)[m(m + 1) - 6] = 0$$

$$(m - 1)(m^2 + m - 6) = 0$$

$$(m - 1)(m + 3)(m - 2) = 0$$

$$m = 1 \text{ lub } m = -3 \text{ lub } m = 2$$

Aby rozwiązaniem równania była liczba m : $m = -3$, $m = 1$, $m = 2$.

Przykład 4

Wyznacz **sumę**, **iloczyn** i **różnice zbiorów** A i B ($A \cap B$, $A \cup B$ oraz $A \setminus B$, $B \setminus A$) jeżeli:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x = 0\}$$

Rozwiążemy najpierw równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

$$x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6 = 0$$

$$x^2(x + 3) - x(x + 3) - 2 \cdot (x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x + 3)(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 2.$$

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem równania

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = -2$$

czyli $A = \{-3, -1, 2\}$

$B = \{-2, 0, 2\}$

Zatem $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 2\}$, $A \setminus B = \{-3, -1\}$,
 $B \setminus A = \{-2, 0\}$.

Przykład 5

Dla jakich wartości parametru p część wspólna zbiorów $A = (-\infty, p^3 - 4)$ i $B = (-3p^2, \infty)$ jest zbiorem jednoelementowym?

Aby iloczyn $A \cap B$ był zbiorem jednoelementowym lewy kraniec przedziału A musi przyjmować taką samą wartość, jak prawy kraniec przedziału B .

$$\text{Czyli } p^3 - 4 = -3p^2$$

$$p^3 + 3p^2 - 4 = 0$$

$$p^3 - p^2 + 4p^2 - 4 = 0$$

$$p^2(p - 1) + 4 \cdot (p^2 - 1) = 0$$

$$p^2(p - 1) + 4 \cdot (p - 1)(p + 1) = 0$$

$$(p - 1)[p^2 + 4 \cdot (p + 1)] = 0$$

$$(p - 1)(p^2 + 4p + 4) = 0$$

$$(p - 1)(p + 2)^2 = 0$$

$$p = 1 \text{ lub } p = -2$$

Dla $p = 1$, $p = -2$ iloczyn zbiorów A i B jest zbiorem jednoelementowym.

Słownik

suma zbiorów A i B

sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B

iloczyn zbiorów A i B

iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B

różnica zbiorów A i B

różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj sposób rozwiązania zadania, w którym należy określić wartość parametru m , aby równanie wielomianowe spełniało określone warunki.

Polecenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. Zbiór rozwiązań równania $(x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8)(x^2 - mx + 1) = 0$ jest zbiorem dwuelementowym, gdy:

☐ $m \in \langle -2, 2 \rangle$

☐ $m \in (-2, 2)$

☐ $m \in (-2, 2\rangle$

☐ $m \in \langle -2, 2 \rangle$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz taką całkowitą wartość parametru a , aby liczba (-2) była pierwiastkiem równania $x^4 + (a - 2)x^3 - a^2x^2 - 2x = 0$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Nie ma takiego całkowitego a , aby spełnione były warunki zadania.

☐ $a = 1$

☐ $a = -1$

☐ Parametr a może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ćwiczenie 2



Wybierz i wstaw odpowiednią liczbę. Dla jakich wartości parametru p równanie $x^2 + (2p + 1)x + p + 1 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych?

$p \in (\text{ } , \frac{\sqrt{3}}{2})$

Ćwiczenie 3



Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem równania $mx^2 + 8mx - m^2 = 0$ jest liczba 1? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $m = -4$

☐ $m = 0$

☐ $m = -1$

☐ $m = -2$

☐ $m = 9$

Ćwiczenie 4



Wyznacz zbiory $A \setminus B$, $A \cup B$, $A \cap B$ jeżeli:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 + 2x = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0\}$$

Zaznacz wszystkie poprawne rozwiązania.

☐ $A \cap B = \{-1, 0\}$

☐ $A \setminus B = \{-2, -1, 0\}$

☐ $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

☐ $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$

☐ $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

☐ $A \setminus B = \{-2\}$

Ćwiczenie 5



Dla jakich wartości parametru k część wspólna przedziałów $X = (-\infty, -8k - 4)$, $Y = \langle k^3 + 5k^2, \infty)$ jest zbiorem jednoelementowym?

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $k = -2, k = -1$

☐ $k = -2, k = 1$

☐ $k = -1, k = 2$

☐ $k = 1, k = 2$

Ćwiczenie 6



Wybierz przykładowe rozwiązania, spełniające warunki zadania. Dla jakich wartości parametru z zbiory $A = (-\infty, -z^2)$, $B = \langle 0, \infty)$ nie mają części wspólnej?

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $z = -1$

☐ $z = 0$

☐ $z = -3$

☐ $z = 1$

☐ $z = 3$

Ćwiczenie 7



Oblicz sumę kwadratów wszystkich pierwiastków równania $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$. Wpisz poprawną liczbę.

Suma kwadratów pierwiastków = .

Ćwiczenie 8



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe. Jeżeli równanie $3x^3 + (12 + k)x^2 + 6kx + 24 = 0$ ma trzykrotny pierwiastek to:

☐ Pierwiastkiem trzykrotnym tego równania jest liczba (-2) .

☐ Równanie ma trzykrotny pierwiastek dla $k = 6$.

☐ Rozwiązaniem równania jest liczba 6.

☐ Równanie można zapisać w postaci $3 \cdot (x - k)^3 = 0$, gdzie k jest pierwiastkiem równania.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równania wielomianowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa warunki, dla których rozwiązanie równania wielomianowego ma żądaną własność

- znajduje współczynniki liczbowe równania wielomianowego spełniające określone warunki
- wyznacza sumę, różnicę i iloczyn zbiorów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają metody rozwiązywania równań wielomianowych z parametrem oraz warunki, jakie muszą spełniać pierwiastki równania, aby posiadały określoną własność.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Przykłady rozwiązań znajdujące się w części Przeczytaj uczniowie analizują w parach. Wspólne z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
2. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.
3. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Każdy stół zawiera 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje ocenę bardzo dobry.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące metod i analizy zadań tekstowych prowadzących do rozwiązywania równań wielomianowych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Omawia ewentualne problemy, które powstały podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i tworzą dla drugiej osoby zadania analogiczne do zadań 6 i 7 z części „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać jako wprowadzenie do lekcji o nierównościach wielomianowych.