



Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego

Źródło: Floarian Schmetz, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W finale biegu na 100 m startuje ośmiu zawodników. Zastanówmy się, ile jest możliwych wyników takiego finału. Oczywiście wygrać może jeden z ośmiu zawodników. Jednak wszystkich możliwych rozstrzygnięć jest aż 40320! Skąd tak duża liczba? Dowiesz się tego zapoznając się z poniższym materiałem.

Twoje cele

- Dowiesz się, że każda funkcja różnowartościowa ze skończonego zbioru A do tego samego zbioru A da się zidentyfikować jako permutację tego zbioru, co pozwoli Ci wyznaczyć liczbę wszystkich takich funkcji,
- Nauczysz się rozpoznawać permutacje w typowych doświadczeniach opisujących własności liczb naturalnych o różnych cyfrach, również takich, w których dodatkowym warunkiem określona jest suma ich cyfr,
- Znajomość twierdzenia o liczbie permutacji pozwoli Ci obliczać, ile jest wyników wymienionych wyżej doświadczeń.
- Dowiesz się również, jak obliczać liczbę wszystkich permutacji, których elementy spełniają ustalone warunki.

Przeczytaj

W tej lekcji rozpatrywać będziemy doświadczenia, które polegają na ustawieniu w pewnej kolejności wszystkich wyrazów zbioru n -elementowego. Każdy otrzymany w ten sposób ciąg będziemy nazywać permutacją tego zbioru n -elementowego.

Zauważmy, że na podstawie reguły mnożenia natychmiast stwierdzimy, że liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!.$$

Zauważmy też, że permutacja zbioru n -elementowego jest n -elementową wariacją bez powtórzeń tego zbioru.

Definicja: permutacja zbioru n -elementowego

Każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego nazywamy permutacją tego zbioru.

Twierdzenie: liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego

Liczba P_n wszystkich permutacji zbioru n -elementowego określona jest wzorem $P_n = n!$

Przykład 1

Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Obliczymy, ile jest wszystkich funkcji różnowartościowych o argumentach ze zbioru X i wartościach w zbiorze X .

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że funkcja f spełnia warunki zadania i zapiszmy wartości przyporządkowane do każdego z kolejnych, rosnąco zapisywanych argumentów: najpierw $f(1)$, następnie $f(2)$, z kolei $f(3)$ i tak dalej aż do $f(9)$. Otrzymany w ten sposób 9-elementowy ciąg jest permutacją zbioru X . Zatem wszystkich funkcji, które spełniają warunki zadania jest tyle, ile permutacji tego zbioru, czyli 9!

Przykład 2

Przeanalizujemy przykład przytoczony przez Juliana Tuwima w jego zbiorze „*Cicer cum caule, czyli groch z kapustą*” (treść podajemy za wydaniem: Czytelnik, Warszawa 1958–59)

„Za czasów studenckich jadałem „*smaczne domowe obiady na maśle*” u jakiejś zdeklasowanej bałtyckiej baronessy, bardzo ważnej, sztywnej i pedantycznej damy. Obiady były doprawdy smaczne, więc nasza ekipa – czternaście osób – przez dłuższy czas

zasiadała przy podłużnym stole w niezmienionym składzie. I każdy miał swoje wyznaczone miejsce, którego nie wolno było zmieniać.

Jako najmłodszemu, przypadło mi miejsce na szarym końcu, a że służąca, postać również nadęta i pedantyczna, obnosiła półmiski zawsze w tej samej kolejności, zaczynając od jakiegoś b. carskiego huzara, a kończąc na mnie, dostawały mi się zazwyczaj żałosne resztki potraw.

Gdy kiedyś zaproponowałem łagodnie, aby stołownicy przesuwali się co dzień o jedno krzesło naprzód, projekt mój spotkał się z takim zabójczym spojrzeniem baronessy, że co prędzej zamilkłem.

Ale nie dałem za wygraną. Nazajutrz wystąpiłem z nowym, znacznie radykalniejszym projektem rozmieszczenia ludzi przy stole.

Co dzień, powiedziałem, będziemy siadać w innym porządku, aż się wyczerpią wszystkie możliwe kombinacje tych przesiadań.

Ale madame była nieugięta – a pewien starszy pan uśmiechał się tylko i kręcił głową.

Po godzinie okazało się, że pomysł mój był absurdalny, po prostu obłąkany.

Po obiedzie starszy pan zaprosił mnie na kawę do pobliskiej cukierni.

– Więc pan chciałby przesadzać czternaście osób, co dzień w innej kolejności, aż do wyczerpania wszystkich możliwych kombinacji, czy tak?

– Tak jest, proszę pana.

– I co pan sądzi, jak to długo będzie trwało, aż pan te wszystkie możliwe kombinacje wyczerpie?

– No, nie wiem... może nawet parę tygodni... ale musi być sprawiedliwość.

– Owszem, musi być – odrzekł fundator kawy i zaczął coś obliczać ołówkiem na marmurze stolika.

Po paru minutach powiedział:

– Ale będzie to, panie drogi, trwało – niech pan słucha: dwieście trzydzieści osiem milionów osiemset czterdzieści cztery tysiące sześćset trzydzieści trzy lata.

Oślupiałem, myśląc, że mam do czynienia z wariatem.

– Jak to? 14 osób musi się przesiadać blisko 239 milionów lat, aby wyczerpać wszystkie możliwe sąsiedztwa? Pan sobie chyba ze mnie kpi!

Czarnym ołówkiem na białym marmurze dowiódł mi ów pan (nauczyciel matematyki w gimnazjum), że ma rację.”

Na podstawie treści zadania domyślamy się, że ów starszy pan, fundator kawy, przedstawił następujące rachunki:

Wszystkich rozmieszczeń grupy 14 stołowników na 14 dostępnych im 14 różnych miejscach jest $14!$, czyli 87178291200.

Wiemy, że jest ich dokładnie tyle, ponieważ każde takie rozmieszczenie jest 14-elementową **permutacją** tego zbioru.

Z przedstawionego w opowiadaniu wniosku wynika, że przyjęto tam 365 dni na rok, skąd właśnie wzięta jest przedstawiona tam liczba: $\frac{14!}{365} \approx 238844633,4$ roku.

Gdyby przyjąć trochę dokładniej, że rok trwa 365,25 dnia, to wynikiem byłoby $\frac{14!}{365,25} \approx 238681153,2$ roku, co nadal jest liczbą, która – zapewne – również zdumiałaby narratora przytoczonego opowiadania.

Przykład 3

Tworzymy liczby ośmiocyfrowe o różnych cyfrach, wśród których nie ma cyfr 0 oraz 9. Obliczymy, ile jest wszystkich takich liczb, w których zapisie dziesiętnym cyfry 3 oraz 4 zapisane są obok siebie.

Rozwiązanie

Zauważmy, że każda liczba ośmiocyfrowa utworzona za pomocą różnych cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ może być wzajemnie jednoznacznie utożsamiona z ośmioelementowym ciągiem kolejnych cyfr zapisu dziesiętnego tej liczby. Naszym zadaniem jest więc wyznaczenie wszystkich **permutacji** zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których elementy 3 i 4 sąsiadują ze sobą. Rozwiązanie tego problemu przedstawimy na dwa sposoby.

- **I sposób:**

Jeśli w takiej 8-elementowej **permutacji** ustalimy parę sąsiednich miejsc dla cyfr 3 i 4, to te dwie liczby możemy na ustalonych miejscach rozmieścić na $2!$ sposobów, a inne 6 elementów rozmieścimy na pozostałych 6 miejscach na $6!$ sposobów. Ponieważ możliwe pary sąsiednich miejsc to: 1 i 2 lub 2 i 3, lub 3 i 4, lub 4 i 5, lub 5 i 6, lub 6 i 7, lub 7 i 8, więc jest ich do wyboru 7. Zatem, korzystając z **reguły mnożenia**, otrzymujemy ostatecznie, że wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest

$$2! \cdot 6! \cdot 7 = 10080.$$

- **II sposób:**

Rozpatrujemy wszystkie **permutacje** zbioru 7-elementowego $\{\{3, 4\}, 1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, których jest $7!$. Jeżeli w każdej z nich uwzględnimy możliwe **permutacje** elementu $\{3, 4\}$, których jest $2!$, to w efekcie otrzymamy **permutację** zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w której elementy 3 i 4 sąsiadują ze sobą.

Na podstawie **reguły mnożenia**, otrzymujemy więc, że wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest

$$2! \cdot 7! = 10080.$$

Przykład 4

Rozpatrujemy wszystkie sześciocyfrowe liczby naturalne o różnych cyfrach. Obliczymy, ile jest wśród nich takich liczb, których suma wszystkich cyfr jest większa od 35.

Rozwiązanie

Zauważmy, że największa możliwa suma cyfr liczby sześciocyfrowej o różnych cyfrach jest równa $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$.

Ponadto:

- sumę cyfr równą 38 dostaniemy tylko wtedy, gdy cyframi będą 9, 8, 7, 6, 5 oraz 3,
- sumę cyfr równą 37 dostaniemy jedynie w dwóch przypadkach: gdy cyframi będą 9, 8, 7, 6, 5 oraz 2, a także, gdy cyframi będą 9, 8, 7, 6, 4 oraz 3,
- sumę cyfr równą 36 dostaniemy tylko w trzech przypadkach: gdy cyframi będą 9, 8, 7, 6, 5 oraz 1 lub gdy cyframi będą 9, 8, 7, 6, 4 oraz 2, a także, gdy cyframi będą 9, 8, 7, 5, 4 oraz 3.

Ponieważ liczbę sześciocyfrową o różnych cyfrach można zapisać za pomocą sześciu różnych cyfr na $6!$ sposobów, a wszystkich przypadków, w których taka liczba spełnia warunki zadania jest 7, więc wszystkich sześciocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, których suma wszystkich cyfr jest większa od 35 jest

$$7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040.$$

Przykład 5

Obliczymy, ile jest wszystkich **permutacji** zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, w których pierwszym wyrazem nie jest 1, a drugim jest 2.

Rozwiązanie

Niech $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ będzie **permutacją** zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Jeżeli taka **permutacja** spełnia warunki zadania, to $a_1 \neq 1$ i $a_2 = 2$.

Ponieważ a_2 jest ustalone (mówimy też, że 2 jest punktem stałym tej **permutacji**), więc wystarczy obliczyć, ile jest **permutacji** $(a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ zbioru $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, w których $a_1 \neq 1$.

Rozwiązanie przedstawimy na trzy sposoby.

- **I sposób:**

Skorzystamy z **reguły mnożenia**. Ponieważ a_1 można wybrać na 7 sposobów (tyle jest możliwości wyboru liczby różnej od 1 spośród 8 dostępnych) oraz przy każdym z dokonanych w ten sposób wyborów a_1 pozostałe 7 elementów rozmieszczamy na 7 pozostałych miejscach, więc wszystkich możliwości jest $7 \cdot 7!$

- **II sposób:**

Skorzystamy z reguły dodawania. Wszystkich **permutacji** $(a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ zbioru $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jest $8!$

Wśród nich wyróżnimy dwie rozłączne grupy:

- w pierwszej znajdują się te **permutacje**, w których $a_1 \neq 1$
- w drugiej pozostałe, czyli te, w których $a_1 = 1$.

Ponieważ tych ostatnich jest $7!$ (po ustaleniu pierwszego wyrazu **permutacji** pozostaje rozmieścić 7 wyrazów na 7 miejscach), więc wszystkich **permutacji** w pierwszej grupie jest $8! - 7! = 7! \cdot (8 - 1) = 7! \cdot 7$.

- **III sposób:**

Skorzystamy z reguły równoliczności. Wszystkich **permutacji** $(a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ zbioru $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jest $8!$

Ze względu na wartość a_1 można je podzielić na 8 równolicznych grup, przy czym w 7 przypadkach, tzn. wtedy, gdy $a_1 \neq 1$ spełnione są warunki zadania. A więc wszystkich takich **permutacji** jest $\frac{7}{8} \cdot 8! = 7 \cdot 7!$

Słownik

permutacja zbioru n -elementowego

Każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego.

ciąg

funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych lub pewien jego podzbiór, a wartościami są liczby rzeczywiste

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej galerią zdjęć interaktywnych. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązania zadań dotyczących zapisu dziesiętnego liczb naturalnych. Jest w nich pokazane, jak wykorzystać wzór na liczbę permutacji.

Polecenie 2

Rozpatrujemy wszystkie ośmiocyfrowe liczby naturalne o różnych cyfrach wybranych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Obliczymy ile jest wśród nich takich liczb, że między cyframi 1 oraz 2 zapisane są cztery inne cyfry, wśród których jest cyfra 8.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



W powieści *Kosmos* Witolda Gombrowicza Ludwik zwraca się do Leona w następujący sposób

Jak ojciec tak myśli i myśli, to niech ojciec wyobrazi sobie dziesięciu żołnierzy, idących gęsiego jeden za drugim, jak ojciec myśli... ile czasu trzeba by na zużycie wszystkich kombinacji uszeregowania tych żołnierzy, przedstawiając na przykład trzeciego na miejsce pierwszego i tak dalej... gdybyśmy przyjęli, że co dzień dokonujemy jednej zmiany?

Przyjmując, że średnio na rok przypada 365, 2422 doby oblicz, z dokładnością do pełnego roku, ile lat zajęłoby wyczerpanie wszystkich możliwości uszeregowania 10 żołnierzy w sposób zasugerowany przez Ludwika. Wynik swoich obliczeń wpisz w puste pole.

Ćwiczenie 2



Zbiór A ma o jeden element więcej, niż zbiór B . O ile liczba wszystkich permutacji zbioru A może być większa od liczby wszystkich permutacji zbioru B ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 82350

☐ 53820

☐ 28530

☐ 35280

Ćwiczenie 3



Oznaczamy:

przez a : liczbę wszystkich sześcioliterowych napisów otrzymanych z ustawiania w dowolnym porządku wszystkich liter wyrazu *chemia*,

przez b : liczbę wszystkich liczb siedmiocyfrowych otrzymanych z ustawiania w dowolnym porządku wszystkich cyfr liczby 1357968,

przez c : liczbę wszystkich możliwych sposobów, na które grupa 8 osób może zająć miejsca w ośmioosobowym przedziale,

przez d : liczbę wszystkich możliwych sposobów rozmieszczenia 9 różnych kul w 9 różnych pudełkach tak, żeby żadne pudełko nie było puste.

Co z tego wynika? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $(ab)^2 = 900cd$

☐ $abd = 800c^2$

☐ $ab = 9(c + d)$

☐ $7ad = 9bc$

Ćwiczenie 4



Rozpatrujemy liczby dziewięciocyfrowe o różnych cyfrach, wśród których nie ma zera.

Oznaczamy przez:

A – zbiór takich liczb spośród nich, w zapisie których między cyframi 3 oraz 4 jest jeszcze siedem innych cyfr,

B – zbiór takich liczb spośród nich, w których iloczyn pięciu ostatnich cyfr jest nieparzysty,

C – zbiór tych liczb spośród nich, w których suma trzech pierwszych cyfr jest równa 7,

D – zbiór tych liczb spośród nich, w zapisie których między cyframi 1 oraz 9 jest jeszcze 5 innych cyfr.

Połącz w pary moce zbiorów z liczbami reprezentującymi ich liczebność.

$|A|$

$3! \cdot 6!$

$|B|$

$2! \cdot 7!$

$|C|$

$5! \cdot 4!$

$|D|$

$3! \cdot 7!$

Ćwiczenie 5



Rozpatrujemy wszystkie permutacje zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Oznaczmy przez n liczbę wszystkich spośród tych permutacji, w których suma każdych dwóch kolejnych wyrazów jest nieparzysta.

Która z podanych poniżej równości jest wówczas prawdziwa?

☐ $n = 2 \cdot (5!)^2$

☐ $n = 2 \cdot 5! + 2 \cdot 5!$

☐ $n = 10! - 2 \cdot 5!$

☐ $n = \frac{10!}{2}$

Ćwiczenie 6



Rozpatrzmy wszystkie liczby siedmiocyfrowe o różnych cyfrach utworzone za pomocą cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Oznaczmy:

przez A - zbiór wszystkich znajdujących się wśród nich liczb parzystych,

przez B - zbiór wszystkich znajdujących się wśród nich liczb nieparzystych.

Odszukaj pary równych liczb.

$2|B| - |A|$

$3 \cdot 5!$

$|A| + |B|$

$6 \cdot 5!$

$3|A| - 4|B|$

$9 \cdot 5!$

$|A| - |B|$

$6 \cdot 6!$

Ćwiczenie 7



W pudełku jest 12 kul ponumerowanych od 1 do 12, przy czym:

kule o numerach 1, 2, 3 są białe,

kule o numerach 4, 5, 6 są czerwone,

kule o numerach 7, 8, 9 są niebieskie,

a pozostałe kule są zielone.

Losujemy z tego pudełka dwanaście razy po jednej kuli, układając wylosowane kule jedna za drugą.

Na ile różnych sposobów możemy dostać takie ułożenie 12 wylosowanych kul, w którym wśród dowolnych 5 kolejnych kul pierwsza i ostatnia będą w tym samym kolorze?

W poniższe pola wpisz kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku:

Ćwiczenie 8



Przy użyciu cyfr 7, 8, 9 zapisujemy trzycyfrowe liczby naturalne, w których każde dwie cyfry są różne. Sumę wszystkich takich liczb oznaczamy przez S_1 .

Przy użyciu cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 zapisujemy sześciocyfrowe liczby naturalne, w których każde dwie cyfry są różne. Sumę wszystkich takich liczb oznaczamy przez S_2 .

Rozpatrujemy wszystkie dodatnie liczby wymierne, których okresowe rozwinięcie dziesiętne jest postaci $0, (abcd)$, gdzie a, b, c, d to kolejne różne cyfry tego rozwinięcia wybrane ze zbioru $\{0, 4, 5, 9\}$. Sumę wszystkich takich liczb oznaczamy przez S_3 .

Wynika stąd, że

☐ $\frac{S_2 \cdot S_3}{1001 \cdot S_1} > 700$

☐ $\frac{S_2 \cdot S_3}{1001 \cdot S_1} > 800$

☐ $\frac{S_2 \cdot S_3}{1001 \cdot S_1} > 600$

☐ $\frac{S_2 \cdot S_3}{1001 \cdot S_1} > 500$

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;

Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje permutacje w typowych doświadczeniach opisujących własności liczb naturalnych o różnych cyfrach, również takich, w których dodatkowym warunkiem określona jest suma ich cyfr,
- oblicza, ile jest wyników doświadczeń opisujących własności liczb naturalnych o różnych cyfrach stosując twierdzenia o liczbie permutacji,
- oblicza liczbę wszystkich permutacji, których elementy spełniają ustalone warunki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- opowiadanie.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się z galerią zdjęć interaktywnych. Analizują zaprezentowane w niej rozwiązania zadań dotyczących zapisu dziesiętnego liczb naturalnych z wykorzystaniem wzoru na liczbę permutacji. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione – nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Permutacja](#)
- [Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego”.