



Reguła mnożenia, reguła dodawania

Reguła mnożenia, reguła dodawania

W tym materiale zawarte są wiadomości na temat niektórych sposobów zliczania obiektów kombinatorycznych. Analizując przykłady zawarte w tym materiale poznasz:

- regułę mnożenia,
- regułę dodawania,
- wariacje z powtórzeniami,
- permutacje.

Rozwiązując ćwiczenia – sprawdzisz ukształtowane umiejętności.

Reguła mnożenia

Przykład 1

W pudełku jest 11 kul, ponumerowanych od 1 do 11. Z tego pudełka losujemy jedną kulę, zapisujemy jej numer i wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do pudełka. Następnie operację losowania powtarzamy, zapisując wynik drugiego losowania.

Obliczymy, ile jest wszystkich możliwych wyników takiego doświadczenia.

Pojedynczy wynik takiego doświadczenia zapisujemy, notując dwie liczby: najpierw wynik pierwszego losowania – w_1 , a następnie wynik drugiego losowania – w_2 .

Wszystkie możliwe wyniki doświadczenia możemy przedstawić np. za pomocą tabeli.

| (w_1, w_2) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) | (1, 7) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) | (2, 7) |

| | | | | | | | |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) | (3, 7) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) | (4, 7) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) | (5, 7) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) | (6, 7) |
| 7 | (7, 1) | (7, 2) | (7, 3) | (7, 4) | (7, 5) | (7, 6) | (7, 7) |
| 8 | (8, 1) | (8, 2) | (8, 3) | (8, 4) | (8, 5) | (8, 6) | (8, 7) |
| 9 | (9, 1) | (9, 2) | (9, 3) | (9, 4) | (9, 5) | (9, 6) | (9, 7) |
| 10 | (10, 1) | (10, 2) | (10, 3) | (10, 4) | (10, 5) | (10, 6) | (10, 7) |
| 11 | (11, 1) | (11, 2) | (11, 3) | (11, 4) | (11, 5) | (11, 6) | (11, 7) |

Każdy wynik doświadczenia został w powyższej tabeli utożsamiony z przyporządkowaną mu parą liczb (w_1, w_2) . Jeżeli np. w pierwszym losowaniu otrzymamy 3, a w drugim 8, to wynik tego losowania zapiszemy jako $(3, 8)$. Z kolei zapisanie pary $(11, 2)$ to informacja, że za pierwszym razem wylosowano 11, a za drugim – 2.

Ponieważ rozpatrywane doświadczenie losowe to wykonanie jedna po drugiej dwóch czynności, polegających za każdym razem na wyborze jednego elementu z jedenastoelementowego zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$, to wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia jest $11 \cdot 11 = 121$.

Przykład 2

Ustalimy, ile dodatnich dzielników całkowitych ma każda z liczb: 72, 360 oraz 1410.

Skorzystamy z zapisu każdej z tych liczb w postaci rozkładu na czynniki pierwsze.

Ponieważ $72 = 2^3 \cdot 3^2$, więc każdy dodatni czynnik całkowity liczby 72 jest liczbą postaci $2^n \cdot 3^m$, przy czym n jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, natomiast m jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. Zauważmy, że wybór dzielnika liczby 72 polega na wykonaniu dwóch czynności: wyborze wykładnika dla czynnika 2 – co można

zrobić na 4 sposoby, a następnie na wyborze wykładnika dla czynnika 3 – co można zrobić na 3 sposoby.

Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że 72 ma $4 \cdot 3 = 12$ dzielników, które przedstawia poniższa tabela.

| \times | 3^0 | 3^1 | 3^2 |
|----------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 2^0 | $2^0 \cdot 3^0 = 1$ | $2^0 \cdot 3^1 = 3$ | $2^0 \cdot 3^2 = 9$ |
| 2^1 | $2^1 \cdot 3^0 = 2$ | $2^1 \cdot 3^1 = 6$ | $2^1 \cdot 3^2 = 18$ |
| 2^2 | $2^2 \cdot 3^0 = 4$ | $2^2 \cdot 3^1 = 12$ | $2^2 \cdot 3^2 = 36$ |
| 2^3 | $2^3 \cdot 3^0 = 8$ | $2^3 \cdot 3^1 = 24$ | $2^3 \cdot 3^2 = 72$ |

Ponieważ $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, więc każdy dodatni czynnik całkowity liczby 360 jest liczbą postaci $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k$, przy czym n jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, m jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, natomiast k jest liczbą ze zbioru $\{0, 1\}$. Zauważmy, że wybór dzielnika liczby 360 polega na wykonaniu trzech czynności, z których pierwsza może skończyć się na jeden z 4 sposobów, druga – na jeden z 3 sposobów, a trzecia – na jeden z 2 sposobów.

Jeżeli najpierw rozpatrzmy wszystkie przypadki związane z wykonaniem dwóch pierwszych czynności (jest ich 12), a następnie wykonamy trzecią czynność, to dostaniemy 24 możliwości.

Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że 360 ma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dodatnie dzielniki całkowite, które przedstawia poniższa tabela.

| \times | $2^0 \cdot 3^0$ | $2^1 \cdot 3^0$ | $2^2 \cdot 3^0$ | $2^3 \cdot 3^0$ | $2^0 \cdot 3^1$ | $2^1 \cdot 3^1$ | $2^2 \cdot 3^1$ | $2^3 \cdot 3^1$ |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5^0 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 24 |
| 5^1 | 5 | 10 | 20 | 40 | 15 | 30 | 60 | 120 |

Ponieważ $1410 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 47$, więc każdy dodatni czynnik całkowity liczby 1410 jest liczbą postaci $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot 47^l$, przy czym każda z liczb n, m, k, l wybierana jest ze zbioru $\{0, 1\}$.

Zauważmy, że wybór dzielnika liczby 1410 polega na wykonaniu czterech czynności, z których każda może skończyć się na jeden z 2 sposobów.

Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że 1410 ma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ dzielników.

Reguła mnożenia

Rozumując podobnie jak w przedstawionych powyżej przykładach, stwierdzimy, że:

- liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei dwóch czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z n sposobów, druga – na jeden z m sposobów, jest równa mn ,
- liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei trzech czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z n sposobów, druga – na jeden z m sposobów, a trzecia – na jeden z k sposobów, jest równa kmn .

Zasada, którą w podobnych przypadkach stosujemy, nazywa się **regułą mnożenia**.

Twierdzenie: Reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n –tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n.$$

Powołując się na regułę mnożenia, można pokazać, że liczba n , która w rozkładzie na czynniki pierwsze daje się zapisać w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie p_1, p_2, \dots, p_k są różnymi liczbami pierwszymi, a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, ma

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

dodatnich dzielników całkowitych.

Przykład 3

Ustalimy, ile jest wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na:

1. siedmiokrotnym rzucie symetryczną monetą.

W pojedynczym rzucie symetryczną monetą możemy otrzymać jeden z dwóch wyników: „orzeł” lub „reszka”. Doświadczenie polega więc na siedmiokrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 2 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$$

2. pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry.

W pojedynczym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry możemy otrzymać jeden z sześciu wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Doświadczenie polega więc na pięciokrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 6 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$$

3. zapisaniu liczby trzycyfrowej, utworzonej wyłącznie za pomocą cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (cyfry mogą się powtarzać).

Wybierając każdą cyfrę takiej liczby, możemy otrzymać jeden z ośmiu wyników. Oznacza to, że doświadczenie polega na trzykrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 8 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$$

4. rozmieszczeniu 4 różnych notatników w 7 różnych teczkach.

Wyboru teczki dla każdego z czterech notatników możemy dokonać na 7

sposobów. Doświadczenie polega więc na czterokrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 7 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401$$

Wariacje z powtórzeniami

W doświadczeniach rozpatrywanych w poprzednim przykładzie mieliśmy do czynienia z tym samym schematem: każde z nich polegało na k – krotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem mogła się skończyć na jeden z n sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników w doświadczeniu tego typu jest równa

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ czynników}} = n^k.$$

Doświadczenie polegające na k – krotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem mogła się skończyć na jeden z n sposobów, nazywa się zwyczajowo k – wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru n – elementowego.

Modelem dla tego typu doświadczenia jest k – wyrazowy ciąg o elementach wybieranych dowolnie ze zbioru n – elementowego (czyli z powtórzeniami – dowolny element zbioru może wystąpić wielokrotnie w ciągu).

Na podstawie spostrzeżenia poczynionego powyżej formułujemy twierdzenie.

Własność: liczba k – wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n – elementowego

Liczba wszystkich k – wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n – elementowego jest równa n^k .

Przykład 4

Stosując twierdzenie o liczbie wariacji z powtórzeniami, obliczymy, że:

1. liczba wszystkich możliwych wyników trzykrotnego rzutu kostką sześcienną to $6^3 = 216$,
2. liczba wszystkich możliwych wyników pięciokrotnego rzutu monetą to $2^5 = 32$,
3. liczba wszystkich możliwych liczb 4 – cyfrowych utworzonych z cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ to $5^4 = 625$,
4. liczba wszystkich możliwych sposobów umieszczenia 10 różnych długopisów w 4 różnych szufladach to $4^{10} = 1048576$,
5. liczba wszystkich możliwych sposobów umieszczenia 7 różnych kul w 6 różnych pudełkach (zakładamy, że w każdym pudełku zmieści się co najmniej 7 takich kul) to $6^7 = 279936$.

Przykład 5

Obliczymy sumę wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 (cyfry mogą się powtarzać).

Wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest dokładnie tyle, ile dwuelementowych ciągów (c_1, c_2) , gdzie c_1 oraz c_2 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, z powtórzeniami. Jest ich zatem $5 \cdot 5 = 25$.

Sumę tych wszystkich liczb obliczymy dwoma sposobami.

- sposób I

Wypisujemy wszystkie liczby w tabeli, przy czym elementy c_1, c_2 pary (c_1, c_2) to dla konkretnej liczby odpowiednio cyfra dziesiątek oraz cyfra jedności.

| (c_1, c_2) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------|----|----|----|----|----|
| 1 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 2 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 3 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 4 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| 5 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |

Sumujemy liczby dwucyfrowe w kolejnych wierszach. Zauważamy przy tym, że:

- wszystkie liczby występujące w tym samym wierszu mają tę samą cyfrę dziesiątek,
- cyfry jedności tych liczb są różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

| (c_1, c_2) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|--------------|----|----|----|----|-------|--|
| 1 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | Suma: $5 \cdot 10 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ |
| 2 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | Suma: $5 \cdot 20 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ |
| 3 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Suma: $5 \cdot 30 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ |
| 4 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | Suma: $5 \cdot 40 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ |
| 5 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | Suma: $5 \cdot 50 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ |
| | | | | | razem | $5 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 40 + 5 \cdot 50 + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ |

Na koniec dodajemy wszystkie otrzymane sumy i otrzymujemy

$$5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5).$$

Oznacza to, że suma wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest równa

$$5 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 \cdot (10 + 1) \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sposób II

Oznaczmy przez S sumę wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5.

Podobnie jak poprzednio wypisujemy wszystkie liczby w tabeli, przy czym do każdej z nich dopisujemy teraz drugą liczbę dwucyfrową, w następujący sposób: do liczby opisanej przez parę (c_1, c_2) dopisujemy liczbę opisaną przez parę $(6 - c_1, 6 - c_2)$.

| $(c_1, c_2), (6 - c_1, 6 - c_2)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 11, 55 | 12, 54 | 13, 53 | 14, 52 | 15, 51 |
| 2 | 21, 45 | 22, 44 | 23, 43 | 24, 42 | 25, 41 |
| 3 | 31, 35 | 32, 34 | 33, 33 | 34, 32 | 35, 31 |
| 4 | 41, 25 | 42, 24 | 43, 23 | 44, 22 | 45, 21 |
| 5 | 51, 15 | 52, 14 | 53, 13 | 54, 12 | 55, 11 |

Zauważmy, że:

- istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie: liczby wyznaczonej przez parę (c_1, c_2) do liczby wyznaczonej przez parę $(6 - c_1, 6 - c_2)$, a ponadto suma takich dwóch liczb jest w każdym przypadku równa 66,
- każda z liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest przyporządkowana do dokładnie jednej pary $(6 - c_1, 6 - c_2)$, gdzie c_1 oraz c_2 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Oznacza to, że dodając wszystkie liczby dwucyfrowe wpisane w ten sposób do tabeli:

- dodamy sumy par liczb wpisanych w 25 komórkach tabeli, czyli 25 razy liczbę 66,
- dokładnie dwa razy obliczymy każdy składnik sumy S .

Stąd

$$2S = 25 \cdot 66$$

a więc

$$S = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 66 = 25 \cdot 33 = 825.$$

Przykład 6

Obliczymy sumę S wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 (cyfry mogą się powtarzać).

Wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest dokładnie tyle, ile trzelementowych ciągów (c_1, c_2, c_3) , gdzie c_1, c_2 oraz c_3 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, z powtórzeniami. Tych liczb jest zatem $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Ich sumę obliczymy dwoma sposobami.

- sposób I

Sumujemy otrzymane liczby trzycyfrowe, dzieląc je na 5 grup ze względu na cyfrę setek. Zauważamy, że jest 25 liczb w każdej takiej grupie. Przy czym dla ustalonej cyfry setek dopisane do niej cyfry tworzą wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe zapisane wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5.

Zatem:

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 1, otrzymamy

$$\begin{aligned} 25 \cdot 100 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + \\ + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \end{aligned}$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 2, otrzymamy

$$25 \cdot 200 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) +$$

$$+5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 3, otrzymamy

$$25 \cdot 300 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) +$$

$$+5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 4, otrzymamy

$$25 \cdot 400 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) +$$

$$+5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 5, otrzymamy

$$25 \cdot 500 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) +$$

$$+5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5).$$

Oznacza to, że

$$S = 25 \cdot (100 + 200 + 300 + 400 + 500) + 5 \cdot 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) +$$

$$+5 \cdot 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) =$$

$$= 25 \cdot 111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 25 \cdot 111 \cdot 15 = 41625$$

Zauważmy, że w tej sumie otrzymaliśmy 25 razy każdą liczbę z ustaloną cyfrą na kolejnych miejscach zapisu dziesiętnego: jako cyfrę setek, jako cyfrę dziesiątek oraz jako cyfrę jedności. Mając to na uwadze, można było od razu zapisać sumę S w postaci

$$S = 25 \cdot (100 + 200 + 300 + 400 + 500) + 25 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 25 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5).$$

- sposób II

Wypisujemy wszystkie liczby trzycyfrowe zapisane wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 i do każdej z nich dopisujemy teraz drugą liczbę trzycyfrową, w następujący sposób: do liczby opisanej przez trójkę (c_1, c_2, c_3) dopisujemy liczbę opisaną przez trójkę $(6 - c_1, 6 - c_2, 6 - c_3)$.

Zauważmy, że:

- istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie: liczby wyznaczonej przez trójkę (c_1, c_2, c_3) do liczby wyznaczonej przez trójkę $(6 - c_1, 6 - c_2, 6 - c_3)$, a ponadto suma takich dwóch liczb jest w każdym przypadku równa 666,
- każda z liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1,2,3,4,5 jest przyporządkowana do dokładnie jednej trójki $(6 - c_1, 6 - c_2, 6 - c_3)$, gdzie c_1, c_2 oraz c_3 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Oznacza to, że dodając wszystkie wypisane w ten sposób liczby trzycyfrowe:

- dodamy sumy par liczb wpisanych w 125 przypadkach, czyli 125 razy liczbę 666,
- dokładnie dwa razy obliczymy każdy składnik sumy S .

Stąd

$$2S = 125 \cdot 666$$

a więc

$$S = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 666 = 125 \cdot 333 = 41625.$$

Zastosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania

Przykład 7

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Obliczymy, ile jest wszystkich wyników doświadczenia, polegającego na tym, że:

1. suma liczb wyrzuconych oczek jest parzysta.

W poniższej tabeli przedstawiamy wszystkie możliwe wyniki dwukrotnego rzutu kostką. Zaznaczamy te, dla których suma liczb wyrzuconych oczek jest parzysta.

| w_1/w_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| 1 | <i>x</i> | | <i>x</i> | | <i>x</i> | | 3 możliwości |
| 2 | | <i>x</i> | | <i>x</i> | | <i>x</i> | 3 możliwości |
| 3 | <i>x</i> | | <i>x</i> | | <i>x</i> | | 3 możliwości |
| 4 | | <i>x</i> | | <i>x</i> | | <i>x</i> | 3 możliwości |
| 5 | <i>x</i> | | <i>x</i> | | <i>x</i> | | 3 możliwości |
| 6 | | <i>x</i> | | <i>x</i> | | <i>x</i> | 3 możliwości |
| | | | | | | Razem: | $(3 + 3 + 3) + (3 + 3 + 3) = 3 \cdot 3 + 3$ |

Zatem wszystkich takich wyników jest 18.

Zauważmy przy okazji, że warto od razu podzielić wyniki pojedynczego rzutu ze względu na parzystość liczby wyrzuconych oczek:

| wynik pojedynczego rzutu | wyniki nieparzyste | wyniki parzyste |
|--------------------------|--------------------|-----------------|
| {1, 2, 3, 4, 5, 6} | {1, 3, 5} | {2, 4, 6} |

| wynik pojedynczego rzutu | wyniki nieparzyste | wyniki parzyste |
|--------------------------|--------------------|-----------------|
| {1, 2, 3, 4, 5, 6} | {1, 3, 5} | {2, 4, 6} |
| 6 możliwości | 3 możliwości | 3 możliwości |

Przy zliczaniu konkretnych możliwości skorzystamy z tego podziału oraz zastosujemy dwie poznane zasady: regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zauważmy, że aby suma liczb wyrzuconych oczek była parzysta, musimy w obu rzutach otrzymać liczby oczek tej samej parzystości. Oznacza to, że:

- do każdej z 3 nieparzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem musimy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 nieparzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \cdot 3 = 9$ możliwości,
- do każdej z 3 parzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem musimy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 parzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \cdot 3 = 9$ możliwości.

Wobec tego w sumie otrzymujemy $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ wyników, dla których suma liczb wyrzuconych oczek jest parzysta.

2. Iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą.

Aby iloczyn liczb wyrzuconych oczek był nieparzysty, w obu rzutach musimy otrzymać liczbę nieparzystą. Zatem do każdej z 3 nieparzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem musimy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 nieparzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \cdot 3 = 9$ możliwości.

3. Iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest parzysty.

Aby iloczyn liczb wyrzuconych oczek był parzysty, w co najmniej jednym z rzutów musimy otrzymać parzystą liczbę oczek. Oznacza to, że:

- do każdej z 3 parzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem możemy za drugim razem wyrzucić dowolną liczbę oczek, co daje łącznie $3 \cdot 6 = 18$ możliwości,
- do każdej z 3 nieparzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem możemy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 parzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \cdot 3 = 9$ możliwości.

Wobec tego w sumie otrzymujemy $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27$ wyników, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest parzysty.

Zauważmy przy okazji, że zbiór wszystkich wyników dwukrotnego rzutu kostką można rozbić na dwa podzbiory:

A – tych wyników, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest nieparzysty,

B – tych wyników, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest parzysty.

Wtedy

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

przy czym $|A \cup B| = 6 \cdot 6 = 36$ (tyle jest wszystkich możliwych wyników dwukrotnego rzutu kostką) oraz $|A| = 3 \cdot 3 = 9$ (tyle jest wyników dwukrotnego rzutu kostką, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest nieparzysty). Zatem

$$36 = 9 + |B|$$

stąd

$$|B| = 36 - 9 = 27$$

4. Iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest podzielny przez 6.

Tym razem zaznaczamy w tabeli te wyniki, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest podzielny przez 6.

| w_1/w_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|--------|---|
| 1 | | | | | | x | 1 możliwość |
| 2 | | | x | | | | 2 możliwości |
| 3 | | x | | x | | x | 3 możliwości |
| 4 | | | x | | | x | 2 możliwości |
| 5 | | | | | | x | 1 możliwość |
| 6 | x | x | x | x | x | x | 6 możliwości |
| | | | | | | Razem: | $1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 6 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$ |

Zatem wszystkich takich wyników jest 15.

Podsumowując zauważmy, że można wyniki pojedynczego rzutu podzielić na przypadki ze względu na to, jaką resztę z dzielenia przez 6 daje wyrzucona liczba oczek.

Wtedy:

- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 6 oczek, to liczba oczek wyrzuconych za drugim razem jest dowolna, co daje łącznie $1 \cdot 6 = 6$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 2 lub 4 oczka, to za drugim razem musimy wyrzucić 3 lub 6 oczek (czyli liczbę oczek, która dzieli się przez 3), co daje łącznie $2 \cdot 2 = 4$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 3 oczka, to za drugim razem musimy wyrzucić 2, 4 lub 6 oczek (czyli liczbę oczek, która dzieli się przez 2), co daje łącznie $1 \cdot 3 = 3$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 1 lub 5 oczek, to za drugim razem musimy wyrzucić 6 oczek (czyli liczbę oczek, która dzieli się przez 6), co daje łącznie $2 \cdot 1 = 2$ możliwości.

Zatem wszystkich takich wyników jest $1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 15$.

Przykład 8

W pudełku jest 17 kul, ponumerowanych od 1 do 17. Z tego pudełka losujemy dwa razy po jednej kuli, przy czym po losowaniu wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do pudełka.

Inaczej mówiąc: ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie, ze zwracaniem.

Obliczymy, ile jest wszystkich wyników doświadczenia.

1. Suma wylosowanych liczb jest parzysta.

Dzielimy wyniki pojedynczego losowania ze względu na parzystość wylosowanej liczby:

| | | |
|---|--|--|
| wynik pojedynczego losowania $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$ | wyniki nieparzyste $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ | wyniki parzyste $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ |
| 17 możliwości | 9 możliwości | 8 możliwości |

Zauważmy, że aby suma wylosowanych liczb była parzysta, musimy w obu rzutach otrzymać liczby tej samej parzystości. Oznacza to, że:

- do każdej z 9 liczb nieparzystych wylosowanych za pierwszym razem musimy za drugim razem ponownie wylosować jedną z 9 liczb nieparzystych, co daje łącznie $9 \cdot 9 = 81$ możliwości,
- do każdej z 8 liczb parzystych wylosowanych za pierwszym razem musimy za drugim razem ponownie wylosować jedną z 8 liczb parzystych, co daje łącznie $8 \cdot 8 = 64$ możliwości.

Wobec tego łącznie otrzymujemy $9 \cdot 9 + 8 \cdot 8 = 81 + 64 = 145$ wyników, dla których suma wylosowanych liczb jest parzysta.

2. Iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

Zbiór wszystkich wyników dwukrotnego losowania ze zwracaniem ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$ można rozbić na dwa podzbiory:

A – tych wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest nieparzysty,

B – tych wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

Wtedy

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

przy czym $|A \cup B| = 17 \cdot 17 = 289$ (tyle jest wszystkich możliwych wyników takiego losowania) oraz $|A| = 9 \cdot 9 = 81$ (tyle jest wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest nieparzysty).

Zatem $|B| = 289 - 81 = 208$, co oznacza, że jest 208 wyników tego doświadczenia, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

3. Iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6?

- sposób I

Posłużymy się metodą tabeli.

Rozpatrzmy najpierw wzorcową tabelę, w której opisane są przypadki odpowiadające wszystkim możliwym wynikom losowania ze względu na

resztę z dzielenia przez 6.

Zaznaczamy w niej te, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest podzielny przez 6.

| w_1/w_2 | reszta 1 | reszta 2 | reszta 3 | reszta 4 | reszta 5 | reszta 0 |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| reszta 1 | | | | | | x |
| reszta 2 | | | x | | | x |
| reszta 3 | | x | | x | | x |
| reszta 4 | | | x | | | x |
| reszta 5 | | | | | | x |
| reszta 0 | x | x | x | x | x | x |

Wszystkich takich wyników jest 15. Dzielimy teraz wyniki obu losowań na trzy podzbiory: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ oraz $\{13, 14, 15, 16, 17\}$. W zbiorczej tabeli zliczamy wszystkie możliwości w 9 przypadkach, dla każdego z nich odczytując liczbę możliwości ze wzorcowej tabeli.

| w_1/w_2 | $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ | $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ | $\{13, 14,$ |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------|
| $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ | 15 możliwości | 15 możliwości | 15 – moż |
| $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ | 15 możliwości | 15 możliwości | 15 – moż |
| $\{13, 14, 15, 16, 17\}$ | $15 - 6 = 9$ możliwości | $15 - 6 = 9$ możliwości | 4 mo: |

Mamy więc:

- 4 przypadki, które dają 15 wyników z iloczynem liczb podzielny przez 6,
- 4 przypadki, które dają 9 wyników z iloczynem liczb podzielny przez 6,
- oraz 1 przypadek, który daje 4 wyniki z iloczynem liczb podzielny przez 6.

Łącznie otrzymujemy $4 \cdot 15 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 4 = 60 + 36 + 4 = 100$ wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

Uwaga. Można też było rozbudować zbiorczą tabelę do postaci.

| | | | |
|--------------------------|--------------------|-----------------------|------|
| w_1/w_2 | {1, 2, 3, 4, 5, 6} | {7, 8, 9, 10, 11, 12} | {13, |
| {1, 2, 3, 4, 5, 6} | 15 możliwości | 15 możliwości | |
| {7, 8, 9, 10, 11, 12} | 15 możliwości | 15 możliwości | |
| {13, 14, 15, 16, 17, 18} | 15 możliwości | 15 możliwości | |

Zauważmy, że wśród wszystkich wyznaczonych w niej $9 \cdot 15 = 135$ możliwości niepotrzebne nam są wszystkie te, w których przynajmniej raz wylosowano liczbę 18. Tych niepotrzebnych przypadków jest $18 + 18 - 1 = 35$, a więc jest $135 - 35 = 100$ wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

- sposób II

Podzielimy wyniki pojedynczego losowania na przypadki ze względu na to, jaką resztę z dzielenia przez 6 daje wylosowana liczba, przy czym grupujemy je jak poniżej:

| | | | |
|---|--|--|---|
| wynik pojedynczego losowania {1, 2, 3, ..., 16, 17} | wyniki podzielne przez 6 {6, 12} | wyniki podzielne przez 3 i niepodzielne przez 6 {3, 9, 15} | wyniki podzielne przez 2 i niepodzielne przez 6 {2, 4, 8, 10, 14, 16} |
| 17 możliwości | 2 możliwości | 3 możliwości | 6 możliwości |

Obliczamy, odwołując się do tych przypadków:

- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 6 lub 12, to liczba wylosowana za drugim razem jest dowolna, co daje łącznie $2 \cdot 17 = 34$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 3, 9 lub 15, to za drugim razem musimy wylosować liczbę parzystą, co daje łącznie $3 \cdot (2 + 6) = 24$ możliwości,

- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 2, 4, 8, 10, 14 lub 16, to za drugim razem musimy wylosować liczbę podzieloną przez 3, co daje łącznie $6 \cdot (2 + 3) = 30$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 1, 5, 7, 11, 13 lub 17, to za drugim razem musimy wylosować liczbę podzieloną przez 6, co daje łącznie $6 \cdot 2 = 12$ możliwości.

Łącznie otrzymujemy $2 \cdot 17 + 3 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 34 + 24 + 30 + 12 = 100$ wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

Przykład 9

Obliczymy, ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie:

1. cyfra jedności jest parzysta.

W zapisie każdej z takich liczb na miejscu cyfry tysięcy może wystąpić dowolna cyfra różna od zera (9 możliwości), na miejscu cyfry setek – dowolna cyfra (10 możliwości), na miejscu cyfry dziesiątek – dowolna cyfra (10 możliwości), a na miejscu cyfry jedności musi wystąpić jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6 lub 8 (5 możliwości). Do obliczenia wszystkich możliwości stosujemy regułę mnożenia:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500.$$

Uwaga. Czterocyfrowa liczba naturalna ma na miejscu cyfry jedności cyfrę parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy jest liczbą parzystą. Ponieważ czterocyfrowych liczb parzystych jest $\frac{1}{2} \cdot 9000 = 4500$, więc dokładnie tyle jest czterocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie cyfra jedności jest parzysta.

2. cyfra tysięcy jest parzysta.

W zapisie każdej z takich liczb na miejscu cyfry tysięcy może wystąpić jedna z cyfr: 2, 4, 6 lub 8 (4 możliwości), a na każdym z miejsc: cyfry setek, cyfry dziesiątek oraz cyfry jedności należy wstawić dowolnie wybraną cyfrę (za każdym razem mamy 10 możliwości).

Do obliczenia wszystkich możliwości stosujemy regułę mnożenia:

$$4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4000.$$

3. dokładnie jedna cyfra jest parzysta.

Rozpatrujemy przypadki:

- parzysta jest jedynie cyfra tysięcy:
wtedy na miejscu cyfry tysięcy musi wystąpić jedna z cyfr: 2, 4, 6 lub 8 (4 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5 możliwości).
Zatem wszystkich możliwości jest $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$,
- parzysta jest jedynie cyfra setek:
wtedy na miejscu cyfry setek musi wystąpić cyfra parzysta (5 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5 możliwości). Oznacza to, że wszystkich możliwości jest $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$,
- parzysta jest jedynie cyfra dziesiątek:
wtedy na miejscu cyfry dziesiątek musi wystąpić cyfra parzysta (5 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5 możliwości). Oznacza to, że wszystkich możliwości jest $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$,
- parzysta jest jedynie cyfra jedności:
wtedy na miejscu cyfry jedności musi wystąpić cyfra parzysta (5 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5 możliwości). Oznacza to, że wszystkich możliwości jest $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Ostatecznie stwierdzamy, że jest $500 + 3 \cdot 625 = 2375$ czterocyfrowych liczb naturalnych, w których dokładnie jedna cyfra jest parzysta.

4. cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek.

W zapisie każdej z szukanych liczb na miejscu cyfry tysięcy może wystąpić dowolna cyfra różna od zera (9 możliwości), a na miejscu cyfr jedności – dowolna cyfra (10 możliwości). Ponieważ cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek, więc na miejscu cyfry dziesiątek może wystąpić jedna z cyfr: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 i wtedy na miejscu cyfry setek wystąpi cyfra odpowiednio 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, tzn. możliwych jest 8 liczb dwucyfrowych utworzonych przez cyfrę setek i cyfrę dziesiątek: 97, 86, 75, 64, 53, 42, 31, 20.

Wynika z tego, że jest $9 \cdot 10 \cdot 8 = 720$ liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek.

Przykład 10

Obliczymy, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje 0, jest dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra nieparzysta.

Szkic rozwiązania.

Podzielimy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jak poniżej, zgodnie z warunkami podanymi w zadaniu.

| cyfry do wyboru | cyfra 4 | cyfry nieparzyste (np) | pozostałe cyfry |
|---------------------------------|-----------|------------------------|-----------------|
| $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ | $\{4\}$ | $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ | $\{2, 6, 8\}$ |
| 9 elementów | 1 element | 5 elementów | 3 elementy |

Najpierw wybierzemy dwa miejsca, na których ustawimy odpowiednio: cyfrę 4 oraz cyfrę nieparzystą.

Możliwe wybory opiszemy, wskazując miejsce w czteroelementowym ciągu, zgodne z przyporządkowaniem do odpowiedniego rzędu. Wybory te ilustruje poniższa tabelka.

| Miejsce dla cyfry 4/ miejsce dla cyfry nieparzystej | rząd tysięcy | rząd setek | rząd dziesiątek | rząd jedności |
|---|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| rząd tysięcy | | (np, 4 , -, -) | (np, -, 4 , -) | (np, -, -, 4) |
| rząd setek | (4 , np, -, -) | | (-, np, 4 , -) | (-, np, -, 4) |

| | | | |
|------------------------|---------------|---------------|---------------|
| rząd dziesiątek | (4, -, np, -) | (-, 4, np, -) | (-, -, np, 4) |
| rząd jedności | (4, -, -, np) | (-, 4, -, np) | (-, -, 4, np) |

Takich możliwości jest więc $4 \cdot 3$, bo wybieramy te dwa miejsca bez powtórzeń (nie jest, oczywiście, możliwe, żeby na tym samym miejscu zapisana była cyfra 4 i jednocześnie cyfra nieparzysta).

W każdym z tych 12 przypadków pozostaje nam wstawić konkretne cyfry w trzy miejsca (cyfra 4 swoje miejsce już zajęła):

- jedno dla cyfry nieparzystej – jest 5 takich możliwości,
- dwa pozostałe miejsca; w każde z nich musimy wstawić cyfrę parzystą ze zbioru $\{2, 6, 8\}$ – jest $3 \cdot 3 = 9$ takich możliwości.

Zatem w sumie mamy $3 \cdot 4 = 12$ rozłącznych przypadków wyboru miejsc dla cyfr wyróżnionych w treści zadania (jak w tabelce), a w każdym z nich mamy $5 \cdot 3 \cdot 3$ możliwości wstawienia odpowiednich cyfr.

Korzystając z reguły mnożenia, ostatecznie otrzymujemy

$$(3 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 3 \cdot 3) = 12 \cdot 45 = 540$$

liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje 0, jest dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra nieparzysta.

Uwaga. Powyższe zliczanie możemy też rozłożyć na trzy etapy:

- (1) wybór miejsca dla cyfry 4 i zapisanie tej cyfry (4 możliwości),
- (2) wybór miejsca dla cyfry nieparzystej i zapisanie tej cyfry ($3 \cdot 5$ możliwości),
- (3) zapisanie cyfr na pozostałych dwóch miejscach ($3 \cdot 3$ możliwości).

Ponieważ wyborów tych dokonujemy niezależnie, to korzystając z reguły mnożenia, obliczamy, że szukanych liczb jest

$$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 540.$$

Zliczając w poprzednim przykładzie wszystkie możliwości wyboru miejsc, na których należało ustawić cyfrę 4 oraz cyfrę nieparzystą, opisywaliśmy wybór dwóch miejsc z czterech dostępnych, bez powtórzeń.

W kolejnych przykładach zajmiemy się obliczaniem wszystkich możliwych wyborów dokonywanych w pewnych sytuacjach, przy czym za każdym razem bez powtórzeń.

Przykład 11

Obliczymy, ile jest:

1. liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje cyfra 0.

Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

(1) zapisanie cyfry dziesiątek (9 możliwości),

(2) zapisanie cyfry jedności, różnej od cyfry dziesiątek (8 możliwości).

Zatem szukanych liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje cyfra 0, jest

$9 \cdot 8 = 72$. Wybory i wszystkie utworzone w ich wyniku liczby można przedstawić w tabeli.

| c_1/c_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 2 | 21 | | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 3 | 31 | 32 | | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 4 | 41 | 42 | 43 | | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 5 | 51 | 52 | 53 | 54 | | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 6 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | | 67 | 68 | 69 |

| | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | | 78 | 79 |
| 8 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | | 89 |
| 9 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | |

2. liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje ani cyfra 0, ani cyfra 5.

Zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

- (1) zapisanie cyfry setek (8 możliwości),
- (2) zapisanie cyfry dziesiątek, różnej od cyfry setek (7 możliwości),
- (3) zapisanie cyfry jedności, różnej od cyfry setek i od cyfry dziesiątek (6 możliwości).

Zatem szukanych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje ani cyfra 0, ani cyfra 5, jest

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

3. liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których nie występuje żadna z cyfr: 0,2,4.

Zliczanie rozkładamy na cztery etapy:

- (1) zapisanie cyfry tysięcy (7 możliwości),
- (2) zapisanie cyfry setek, różnej od cyfry tysięcy (6 możliwości),
- (3) zapisanie cyfry dziesiątek, różnej od cyfry tysięcy i od cyfry setek (5 możliwości),
- (4) zapisanie cyfry jedności, różnej od każdej z trzech cyfr zapisanych wcześniej (4 możliwości),

Zatem szukanych liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których nie występuje żadna z cyfr: 0, 2, 4, jest

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

4. liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Zliczanie rozkładamy na pięć etapów:

- (1) zapisanie cyfry dziesiątek tysięcy (7 możliwości),
- (2) zapisanie cyfry tysięcy, różnej od cyfry dziesiątek tysięcy (6 możliwości),

(3) zapisanie cyfry setek, różnej od cyfr: tysięcy oraz dziesiątek tysięcy (5 możliwości),

(4) zapisanie cyfry dziesiątek, różnej od każdej z trzech cyfr zapisanych wcześniej (4 możliwości),

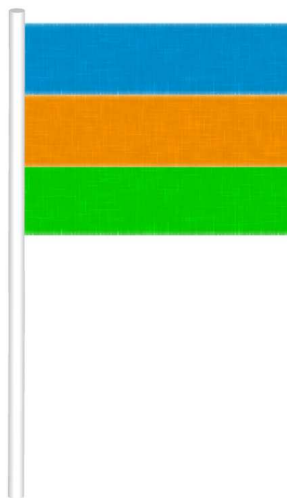
(5) zapisanie cyfry jedności, różnej od każdej z czterech cyfr zapisanych wcześniej (3 możliwości).

Zatem szukanych liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, jest:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

Przykład 12

Flagę, taką jak pokazana na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowych pasów kolorowej tkaniny. Kolory pasów górnego, środkowego i dolnego mają być parami różne. Obliczmy, ile takich różnych flag można utworzyć, mając do dyspozycji tkaniny w sześciu różnych kolorach.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zliczanie liczby flag rozkładamy na trzy etapy:

- (1) wybór koloru dla górnego pasa (6 możliwości),
- (2) wybór koloru dla środkowego pasa (5 możliwości),
- (3) wybór koloru dla dolnego pasa (4 możliwości).

Zatem liczba wszystkich możliwych takich flag jest równa

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Wariacje bez powtórzeń

W ostatnich przykładach mieliśmy do czynienia z doświadczeniami polegającymi na wyborze kolejno pewnej liczby elementów z ustalonego zbioru, przy czym wybierane elementy nie mogły się powtarzać.

Założmy, że mamy do czynienia z doświadczeniem polegającym na wyborze kolejno k elementów ze zbioru n - elementowego, bez powtórzeń (k jest liczbą całkowitą spełniającą układ nierówności $1 \leq k \leq n$).

Rozumując podobnie jak w tych przykładach, rozłożmy doświadczenie na k etapów. Wtedy w kolejnych etapach od pierwszego do ostatniego (o numerze k) liczby możliwości będą równe odpowiednio $n, n - 1, n - 2$ aż do $n - (k - 1)$. Stosując regułę mnożenia, stwierdzamy, że wszystkich możliwych wyników takiego doświadczenia jest

$$\underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}_{k \text{ czynników}}$$

Doświadczenie polegające na wyborze kolejno k - elementów ze zbioru n - elementowego, bez powtórzeń, gdzie k jest liczbą całkowitą spełniającą warunek $1 \leq k \leq n$, nazywa się zwyczajowo k - **wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru n - elementowego**.

Modelem dla tego typu doświadczenia jest k – wyrazowy ciąg o elementach wybranych ze zbioru n – elementowego bez powtórzeń.

Na podstawie spostrzeżenia poczynionego powyżej formułujemy twierdzenie.

Własność: liczba k – wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n – elementowego

Liczba wszystkich k – wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest równa

$$\underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}_{k \text{ czynników}}$$

Ważne!

Uwaga. Iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

nazywa się silnią liczby n i oznacza się symbolem $n!$, co czytamy „ n silnia”.

Zauważmy, że jeśli liczbę

$$\underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}_{k \text{ czynników}}$$

pomnożymy i jednocześnie podzielimy przez iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do $n - k$, czyli przez liczbę $(n - k)!$, to stwierdzimy, że liczba wszystkich k – wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n – elementowego jest równa

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k)!}{(n - k)!} =$$

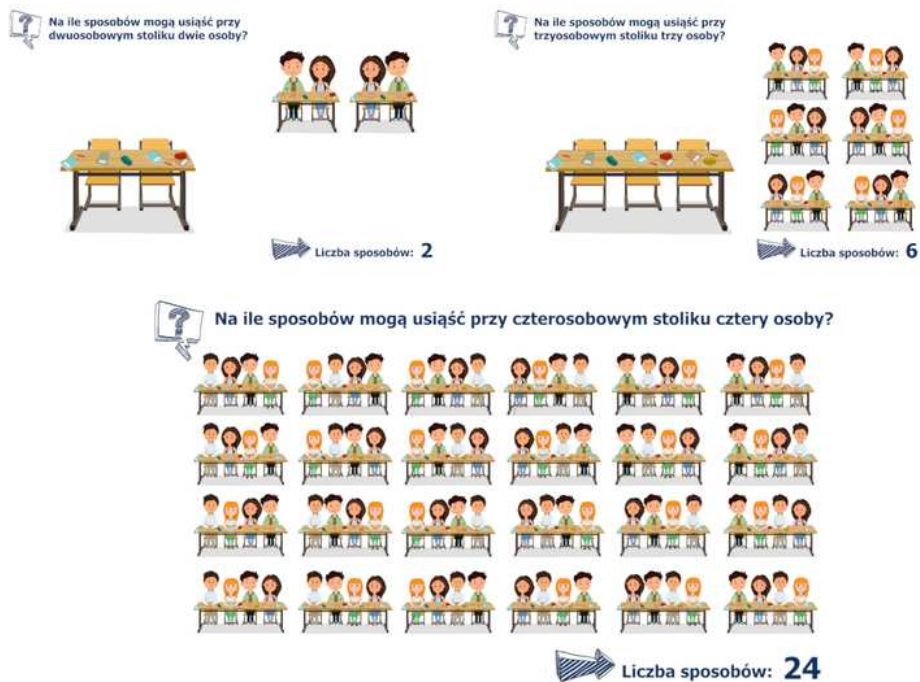
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład 13

Korzystając z twierdzenia o liczbie wszystkich wariacji bez powtórzeń, obliczymy, że

1. liczba wszystkich sposobów, na jakie Jaś i Małgosia mogą usiąść na dwóch spośród siedmiu wolnych miejsc w kinie, jest równa $7 \cdot 6 = 42$, co można też zapisać jako $\frac{7!}{5!}$.
2. liczba wszystkich możliwych trzyliterowych napisów o różnych literach wybranych ze zbioru $\{a, e, j, k, m\}$ jest równa $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Tę liczbę można też zapisać jako $\frac{5!}{2!}$.
3. liczba wszystkich możliwych sposobów rozmieszczenia 4 różnych kul w 6 różnych pudełkach tak, żeby w każdym pudełku znalazła się co najwyżej jedna kula, jest równa $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$, co można też zapisać jako $\frac{6!}{2!}$.
4. liczba wszystkich możliwych wyborów 3 osób, kolejno: przewodniczącego, zastępcy i skarbnika do samorządu 32 – osobowej klasy to $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$. Otrzymany wynik można też zapisać w postaci $\frac{32!}{29!}$.
5. liczba wszystkich możliwych sposobów wylosowania kolejno 5 kart (jedna po drugiej) z brydżowej talii 52 kart to $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311875200$. Otrzymany wynik można też zapisać jako $\frac{52!}{47!}$.
6. liczba wszystkich możliwych sposobów, na które grupa 6 dziewczynek może zająć miejsca w sześciuosobowym rzędzie, to $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Ten wynik można też zapisać w postaci $6!$.
7. liczba wszystkich możliwych napisów otrzymanych z przestawiania liter wyrazu „płot” to $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Otrzymany wynik można też zapisać jako $4!$.

Permutacje



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RW4nBPEBs8nsr](https://preview/resource/RW4nBPEBs8nsr)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia czym są permutacje i w jakich okolicznościach możemy je stosować.

W poprzednim przykładzie:

- w podpunkcie 6) rozpatrywaliśmy sześciowyrazową wariację bez powtórzeń zbioru sześcioelementowego,
- w podpunkcie 7) rozpatrywaliśmy czterowyrazową wariację bez powtórzeń zbioru czteroelementowego.

W przypadku $k = n$ wariację bez powtórzeń nazywamy **permutacją zbioru n -elementowego**.

Zatem **permutacją zbioru n -elementowego** nazywamy każdy ciąg utworzony ze wszystkich wyrazów tego zbioru, a liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$.

Przykład 14

Obliczymy, ile jest wszystkich takich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których zapisie:

1. cyfra 1 zapisana jest na pierwszym miejscu od lewej.

Zapisujemy cyfrę 1 na pierwszym miejscu od lewej. Pozostaje nam rozmieścić pozostałe 4 cyfry na 4 miejscach, co można zrobić na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby. Oznacza to, że są 24 takie liczby.

2. między cyframi 1 oraz 2 zapisane są trzy inne cyfry.

Z treści zadania wynika, że cyfry 1 oraz 2 muszą zająć dwa skrajne miejsca, a pozostałe trzy cyfry trzeba wpisać na trzech miejscach między nimi. Wobec tego cyfry 1 i 2 zapiszemy na dwa sposoby, a w każdym z tych przypadków cyfry 3, 4, 5 zapiszemy na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sposobów. Zatem wszystkich takich liczb jest $2 \cdot 6 = 12$.

3. cyfry 1 oraz 2 nie są zapisane obok siebie.

- sposób I

Zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

- wybór miejsca dla cyfry 1 i zapisanie tej cyfry,
- wybór miejsca dla cyfry 2 i zapisanie tej cyfry,
- zapisanie pozostałych trzech cyfr.

Mamy dwa istotnie różne przypadki:

- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na jednym z dwóch skrajnych miejsc, to cyfrę 2 będziemy mogli zapisać na jednym z trzech miejsc, a wtedy pozostałe trzy cyfry rozmieszczamy na trzech dostępnych miejscach na $3!$ sposobów. W tym przypadku mamy więc $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$ sposobów zapisu takich liczb.
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu drugim, trzecim lub czwartym, to cyfrę 2 będziemy mogli zapisać na jednym z dwóch miejsc, a wtedy pozostałe trzy cyfry rozmieszczamy na trzech dostępnych miejscach na $3!$ sposobów. W tym przypadku mamy więc $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ sposobów zapisu takich liczb.

Wobec tego wszystkich takich liczb jest $36 + 36 = 72$.

- sposób II

Zauważamy, że wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. W zapisie każdej z tych liczb cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie albo nie są zapisane obok siebie. Dla ustalenia, ile jest liczb w drugim przypadku, wystarczy więc obliczyć, ile jest takich liczb, w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie. Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

- wybór dwóch miejsc dla cyfr 1, 2 oraz zapisanie tych cyfr,
- zapisanie pozostałych trzech cyfr.

Mamy cztery możliwości wyboru sąsiednich miejsc dla cyfr 1, 2: pierwsze i drugie lub drugie i trzecie, lub trzecie i czwarte, lub czwarte i piąte.

W każdym z tych czterech przypadków cyfry 1, 2 możemy zapisać na wybranych miejscach na dwa sposoby. W drugim etapie zapisujemy pozostałe trzy cyfry na trzech dostępnych miejscach, co można zrobić na $3!$ sposobów. Oznacza to, że wszystkich takich liczb pięciocyfrowych, w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie, jest $4 \cdot 2 \cdot 3! = 48$. Stąd wszystkich takich liczb pięciocyfrowych, w których cyfry 1, 2 nie są zapisane obok siebie, jest $120 - 48 = 72$.

Uwaga. Zliczanie wszystkich możliwych liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie, można przeprowadzić w następujący sposób:

Dwie sąsiadujące cyfry 1, 2 zapisujemy jako jeden nowy obiekt, który oznaczamy jako np. x . Następnie obliczamy liczbę możliwych rozmieszczeń 4 elementów: bloku x oraz cyfr 3, 4, 5, – takich rozmieszczeń jest $4! = 24$.

W każdym z nich trzeba jeszcze zamienić x na zapisane obok siebie cyfry 1, 2, co można zrobić na 2 sposoby. Ostatecznie stwierdzamy, że wszystkich możliwych liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie, jest $2 \cdot 24 = 48$.

1. cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2 (patrząc od lewej).

- sposób I

Numerujemy od lewej miejsca, na których można zapisać cyfry takiej liczby pięciocyfrowej: (1), (2), (3), (4), (5).

Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

- wybór miejsc dla cyfr 1, 2 oraz zapisanie tych cyfr,
- zapisanie pozostałych trzech cyfr.

Ponieważ numer miejsca dla cyfry 1 musi być mniejszy od numeru miejsca dla cyfry 2, więc:

- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (1), to dla cyfry 2 zostają do wyboru 4 miejsca,
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (2), to dla cyfry 2 zostają do wyboru 3 miejsca,
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (3), to dla cyfry 2 zostają do wyboru 2 miejsca,
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (4), to dla cyfry 2 zostaje do wyboru 1 miejsce,
- cyfry 1 nie można zapisać na miejscu (5).

Oznacza to, że jest dokładnie $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ możliwości wyboru miejsc i zapisania cyfr 1, 2. W każdym z tych przypadków pozostaje nam zapisać cyfry 3, 4, 5 na pozostałych trzech miejscach, co można zrobić na $3! = 6$ sposobów. Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2 (patrzac od lewej) jest $10 \cdot 6 = 60$.

- sposób II

Rozbijemy zbiór liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 na dwa podzbiory:

A – tych liczb, w których cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2,

B – tych liczb, w których cyfra 2 jest zapisana przed cyfrą 1.

Ponieważ:

- zbiory te są rozłączne, więc $|A \cup B| = |A| + |B|$,
- wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, więc $|A \cup B| = |A| + |B| = 120$.

Zauważmy, że:

- wybierając dowolną liczbę ze zbioru A i zamieniając w jej zapisie miejscami cyfry 1, 2, otrzymamy pewną (dokładnie jedną) liczbę ze zbioru B ,
- wybierając dowolną liczbę ze zbioru B i zamieniając w jej zapisie miejscami cyfry 1, 2, otrzymamy pewną (dokładnie jedną) liczbę ze zbioru A .

Wobec tego zbiory A i B są równoliczne, co oznacza, że $|A| = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2 (patrzac od lewej), jest $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.

Ćwiczenie 1



- 13
- 36
- 42
- 49

Ćwiczenie 2



- 5
- 6
- 9
- 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



- 3
- 6
- 8
- 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



- 60
- 45
- 15
- 12

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

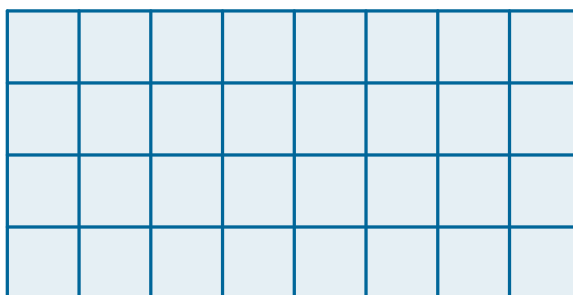


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Rozpatrujemy wszystkie prostokąty, których boki zawierają się w liniach siatki dzielącej prostokąt o wymiarach 4 i 8 na kwadraty jednostkowe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 25



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 26



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 27



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 28



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 29



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 30



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 31



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 32



Mamy do dyspozycji trzy pudełka: białe, czarne i żółte. W białym jest 7 kul, ponumerowanych od 1 do 7, w czarnym jest 5 kul, ponumerowanych od 1 do 5, a w żółtym są 4 kule, ponumerowane od 1 do 4. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Ile jest wszystkich możliwości wylosowania w ten sposób trójki liczb, których iloczyn jest podzielny przez 5?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 33



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 34



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 35

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 36



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 37



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 38



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.