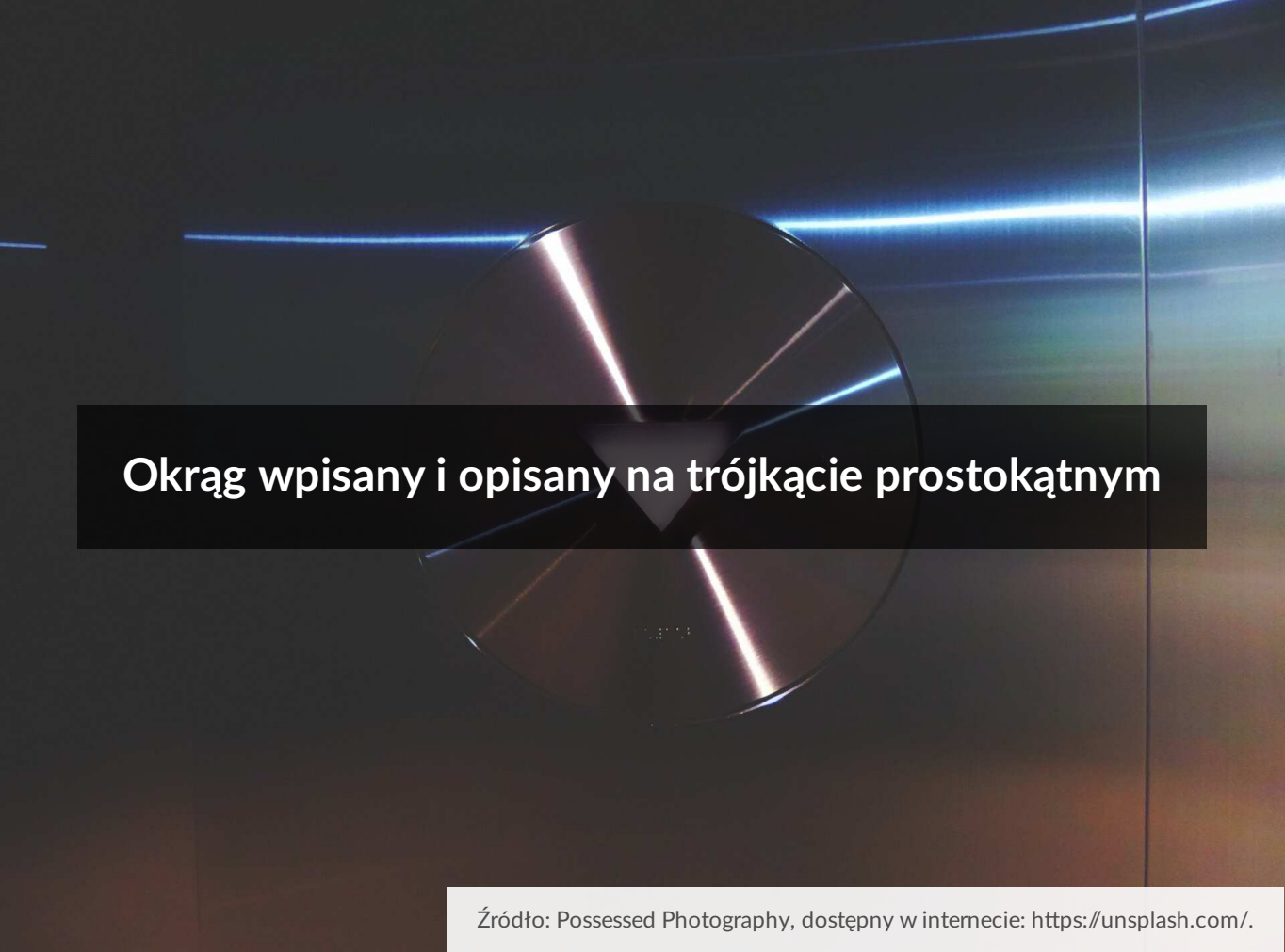




Okrąg wpisany i opisany na trójkącie prostokątnym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

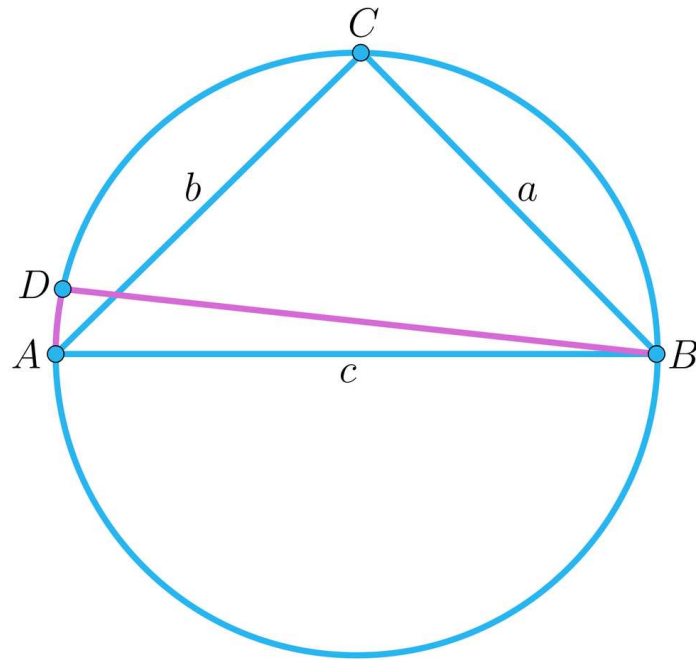


Okrąg wpisany i opisany na trójkącie prostokątnym

Źródło: Possessed Photography, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Kiedy pole trójkąta prostokątnego jest największe?

Rozważmy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości c . Jeśli przez a , b oznaczmy długości przyprostokątnych tego trójkąta, to można badać zagadnienie dotyczące wartości, jakie może przyjmować iloczyn $a \cdot b$. Geometrycznie oznacza to w istocie badanie pola tego trójkąta. Nietrudno zauważyć (patrz: poniższy rysunek), że pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej c jest największe wtedy, gdy trójkąt jest równoramienny.



Trójkąt prostokątny o największym polu.

Wtedy $|AC| = |BC| = \frac{c}{\sqrt{2}}$, a pole trójkąta jest równe $\frac{c^2}{4}$.

Z kolei pole to może być dowolnie małe, w szczególności, gdy wierzchołek D będzie leżał dowolnie blisko punktu A , jak na rysunku. Tym samym iloczyn $a \cdot b$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\left(0, \frac{c^2}{2}\right)$.

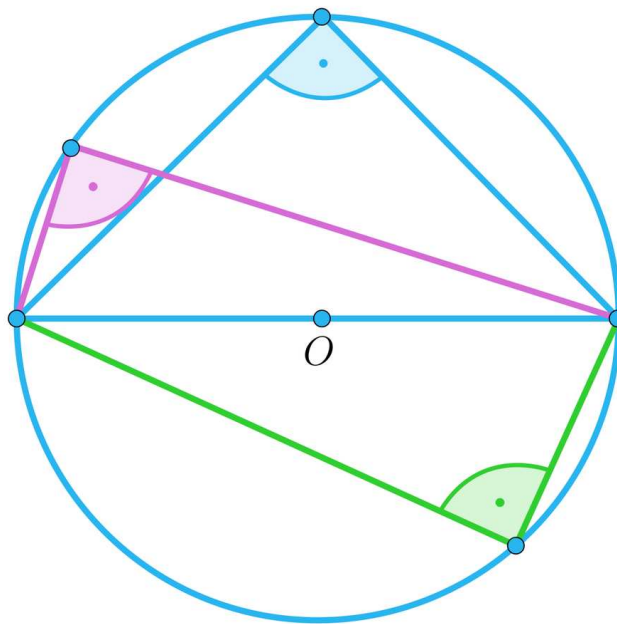
Twoje cele

- Udowodnisz twierdzenie o sumie długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt prostokątny.
- Wyprowadzisz wzór na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym

Wiemy, że w okręgu miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Prosta konsekwencją tego twierdzenia jest wniosek, iż każdy kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty, a w konsekwencji, że przeciwprostokątna dowolnego trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie.



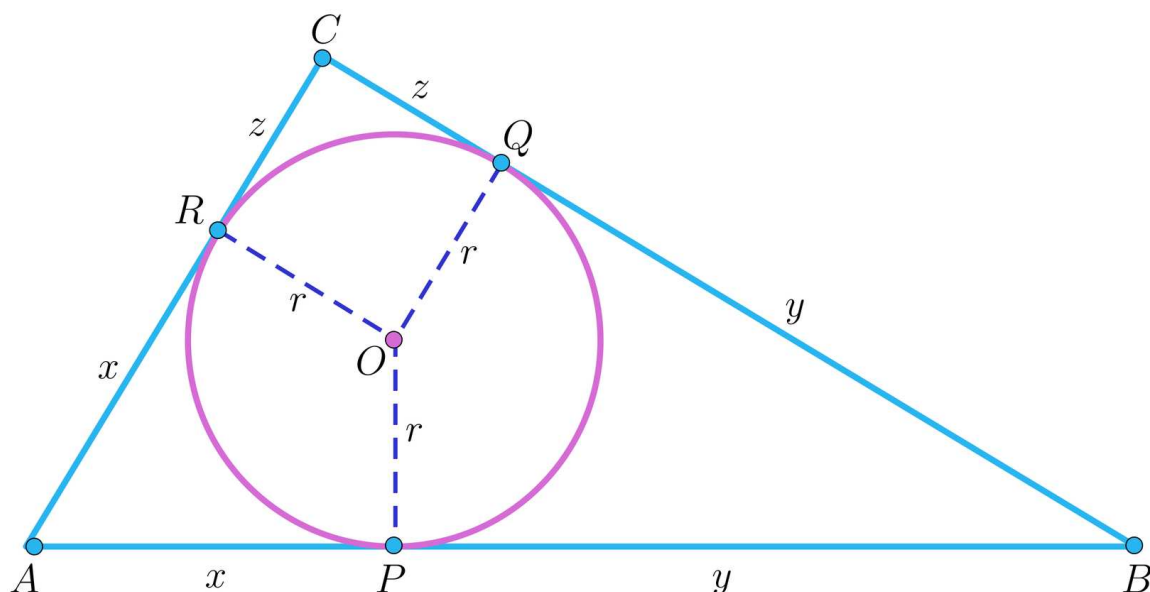
Trójkąty rozpięte na średnicy okręgu.

Twierdzenie: o okręgu opisanym na trójkącie prostokątnym

Promień R okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej c ma długość równą $R = \frac{1}{2}c$.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB . Przez P , Q , R oznaczmy punkty, w których okrąg o środku O i promieniu r , wpisany w ten trójkąt, jest styczny do odpowiednich boków trójkąta, jak na rysunku.



Promień okręgu wpisanego.

Z [zasadniczego twierdzenia planimetrii](#) (twierdzenia o odcinkach stycznych) wynika równość odpowiednich odcinków, co pozwala przyjąć oznaczenia: $|AP| = |AR| = x$, $|BP| = |BQ| = y$ oraz $|CQ| = |CR| = z$.

Czworokąt $CROQ$ jest kwadratem, zatem $z = r$.

Przyjmijmy: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Wtedy: $|AB| = c = x + y$, $|BC| = a = y + z$, $|AC| = b = x + z$, stąd $c = x + y = (b - z) + (a - z)$. Zatem $c = a + b - 2z$, czyli $z = \frac{a+b-c}{2}$. Ale $z = r$, stąd promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej c i przyprostokątnych a , b ma długość $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Ostatnia równość pozwala sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: o sumie średnic

Suma długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym jest równa sumie długości średnic dwóch okręgów: opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

Dowód

Niech R , r oznaczają odpowiednio promień okręgu opisanego i promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej c i przyprostokątnych a , b . Wtedy $r = \frac{a+b-c}{2}$. Ponieważ $c = 2R$, więc $r = \frac{a+b-2R}{2}$. Stąd $2r = a + b - 2R$, czyli $2R + 2r = a + b$. Co było do udowodnienia.

Przykład 1

Wyznamy teraz pole trójkąta prostokątnego w zależności od długości promieni R , r okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie

Na wstępie przyjmijmy, że przyprostokątne trójkąta mają długości a, b , a pole tego trójkąta oznaczmy przez P .

Wiemy, że $2R + 2r = a + b$. Podnosząc stronami zapisaną równość do kwadratu otrzymujemy $4R^2 + 8Rr + 4r^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ale $a^2 + b^2 = c^2 = (2R)^2 = 4R^2$ oraz $\frac{1}{2}a \cdot b = P$, czyli $a \cdot b = 2P$.

Zatem $4R^2 + 8Rr + 4r^2 = 4R^2 + 4P$. Stąd $P = r^2 + 2Rr$.

Przykład 2

Rozważmy trójkąt prostokątny opisany na okręgu o promieniu r i wpisany w okrąg o promieniu $R = 3r$. Wyznamy długości przyprostokątnych a, b tego trójkąta.

Rozwiązanie

Ponieważ $r = \frac{a+b-c}{2}$ oraz $c = 2R = 2 \cdot (3r) = 6r$, więc $a + b = 8r$. Korzystając z wyniku uzyskanego w Przykładzie 1. możemy zapisać, że $\frac{1}{2}ab = r^2 + 2 \cdot (3r)r$. Stąd $ab = 14r^2$.

Możemy teraz zapisać układ równań z niewiadomymi a, b :
$$\begin{cases} ab = 14r^2 \\ a + b = 8r \end{cases}$$

Z drugiego z równań wynika, że $b = 8r - a$, stąd $a \cdot (8r - a) = 14r^2$. Rozwiążemy teraz równanie kwadratowe z niewiadomą a i parametrem r postaci $a^2 - 8r \cdot a + 14r^2 = 0$.

Jego wyróżnik jest równy $\Delta = 64r^2 - 4 \cdot 14r^2 = 8r^2$.

Stąd $a_1 = \frac{8r+2\sqrt{2}r}{2} = (4 + \sqrt{2})r$, $a_2 = \frac{8r-2\sqrt{2}r}{2} = (4 - \sqrt{2})r$.

Odpowiednio $b_1 = 8r - a_1 = 8r - (4 + \sqrt{2})r = (4 - \sqrt{2})r$ oraz

$b_2 = 8r - a_2 = 8r - (4 - \sqrt{2})r = (4 + \sqrt{2})r$.

Pozostaje zauważyć, że trójkąt spełniający warunki zadania jest wyznaczony jednoznacznie: jedna z jego przyprostokątnych ma długość $(4 - \sqrt{2})r$, a druga $(4 + \sqrt{2})r$.

Stosunek długości promienia okręgu opisanego na trójkącie do długości promienia wpisanego w dany trójkąt prostokątny

Z [nierówności Eulera](#) wynika, że jeśli R jest promieniem okręgu opisanego na dowolnym trójkącie, a r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, to $R \geq 2r$, gdzie równość

zachodzi tylko dla trójkąta równobocznego. Zatem $\frac{R}{r} \geq 2$. Warto zbadać iloraz promieni tych okręgów w przypadku trójkąta prostokątnego. W szczególności pozwoli to stwierdzić, że problem postawiony w Przykładzie 2. był dobrze określony. Rozważmy trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej c . Wtedy $c = 2R$, a każda z przyprostokątnych ma długość $a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R \cdot \sqrt{2}$. Promień okręgu wpisanego jest więc równy $r = \frac{R\sqrt{2} + R\sqrt{2} - 2R}{2} = R(\sqrt{2} - 1)$. Zatem iloraz $\frac{R}{r}$ ma wartość $\frac{R}{R(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} + 1$ i jest to najmniejsza wartość, jaką może przyjąć ten iloraz w przypadku trójkąta prostokątnego. Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie: o ilorazie promieni okręgów w trójkącie prostokątnym

Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, a r niech będzie promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wtedy $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

Z powyższych rozważań wynika w szczególności, że w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej c najmniejsza odległość między środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie i środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa $\frac{(\sqrt{2}-1) \cdot c}{2}$.

Słownik

twierdzenie Eulera

w trójkącie kwadrat odległości między środkami okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy $R^2 - 2Rr$, gdzie R, r są odpowiednio promieniami tych okręgów

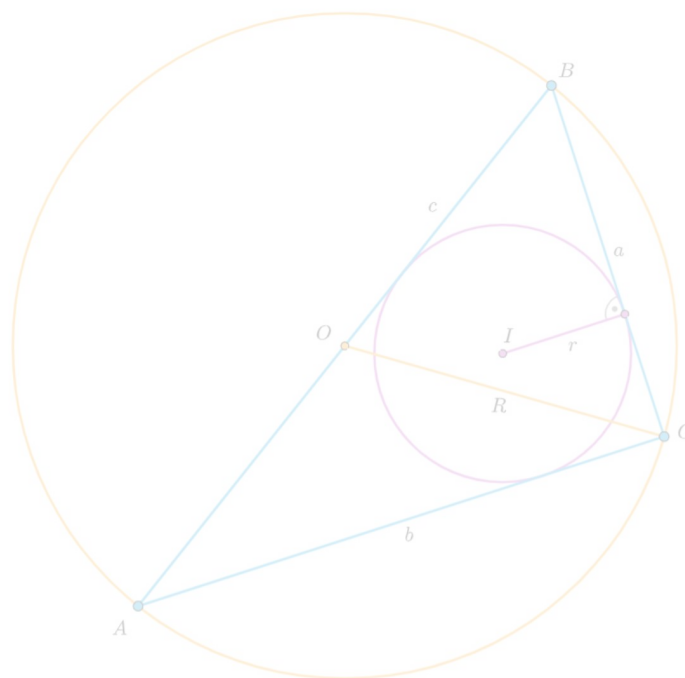
zasadnicze twierdzenie planimetrii

odcinki stycznych poprowadzone do danego okręgu z punktu leżącego na zewnątrz okręgu, wyznaczone przez ten punkt i punkty styczności, mają równe długości

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną. Ustal położenie wierzchołków trójkąta w taki sposób, aby iloraz $\frac{R}{r}$ długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt był najmniejszy. Sformułuj hipotezę dotyczącą wartości tego ilorazu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dt1SIFgcK>

Polecenie 2

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a+b-c}{2}$ dla różnych położenia wierzchołków trójkąta. Porównaj otrzymaną wartość z długością promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt. Sformułuj odpowiednią hipotezę.

Polecenie 3

Ustal położenie wierzchołków trójkąta tak, aby iloraz $\frac{R}{r}$ był równy 4. Oblicz stosunek $a : r$ długości krótszej przyprostokątnej do promienia okręgu wpisanego w trójkąt. Rozwiąż zagadnienie algebraicznie i porównaj otrzymane wyniki.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Różnica promieni okręgów opisanego na trójkącie prostokątnym i wpisanego w ten trójkąt jest równa 3. Pole trójkąta jest równe 24. Oblicz obwód tego trójkąta.

Ćwiczenie 2



Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60, a obwód tego trójkąta jest równy 40. Wyznacz długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych odpowiednio 5, 12 wpisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy

☐ 4.

☐ 3.

☐ 2.

☐ $\frac{5}{2}$.

Ćwiczenie 4



W trójkącie prostokątnym promień okręgu opisanego jest równy R , a promień okręgu wpisanego jest równy r . Wyznacz długości przyprostokątnych tego trójkąta. Rozstrzygnij, kiedy zadanie ma rozwiązanie.

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Niech R , r oznaczają odpowiednio promień okręgu opisanego i promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o polu równym $9r^2$. Wtedy

☐ $R = 9r$.

☐ $R = 2r$.

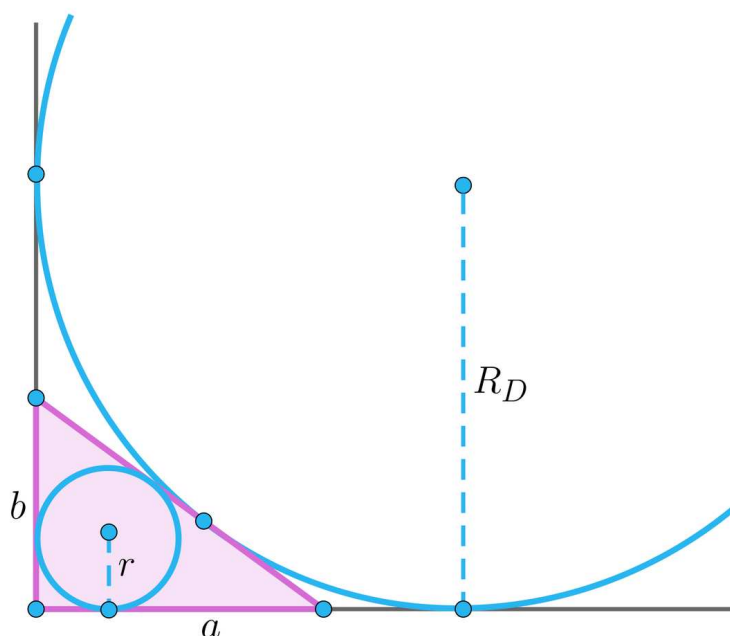
☐ $R = 3r$.

☐ $R = 4r$.

Ćwiczenie 7



Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków tego trójkąta i przedłużeń dwóch pozostałych jego boków. Dany jest trójkąt prostokątny opisany na okręgu o promieniu r . Okrąg dopisany do tego trójkąta i styczny do przeciwprostokątnej ma promień R_D , jak na rysunku.



Uzasadnij, że pole danego trójkąta jest równe $r \cdot R_D$.

Ćwiczenie 8



Oceń prawdziwość poniższych zdań, zaznaczając prawdę lub fałsz przy każdym stwierdzeniu.

	Prawda	Fałsz
Istnieje trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równy 2.	☐	☐
Istnieje trójkąt prostokątny, w którym różnica długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równa 1,5.	☐	☐
Istnieje trójkąt prostokątny, w którym suma długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest równa 3,5.	☐	☐
Stosunek pola koła opisanego do pola koła wpisanego w trójkąt prostokątny jest zawsze większy niż 3.	☐	☐
Istnieje trójkąt prostokątny, w którym różnica pól koła opisanego i koła wpisanego w ten trójkąt jest mniejsza od 40.	☐	☐

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg wpisany i opisany na trójkącie prostokątnym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie trójkąta opisanego na okręgu;
- stosuje pojęcie trójkąta wpisanego w okrąg;
- stosuje twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku;
- przeprowadza dowody geometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje przygotowany wcześniej rysunek okręgu i prosi o narysowanie dowolnego trójkąta prostokątnego wpisanego w ten okrąg. Następnie formułuje problem określenia zbioru wartości iloczynu $a \cdot b$ długości przyprostokątnych. Uczniowie rysują różne trójkąty wpisane w dany okrąg i zastanawiają się nad rozwiązaniem problemu. Następnie formułują i zapisują w notatnikach rozwiązanie problemu.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia o kątach wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku. Następnie uczniowie przeprowadzają dowód twierdzenia, że każdy trójkąt, którego bokiem jest średnica okręgu, jest prostokątny – wybrany uczeń zapisuje szkic dowodu na tablicy.
2. Uczniowie formułują twierdzenie o długości promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym.
3. Nauczyciel prosi o uruchomienie symulacji interaktywnej i rozwiązanie przedstawionych tam problemów.
4. Następnie nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia o odcinkach stycznych i prezentuje przygotowany wcześniej rysunek trójkąta z zaznaczonymi punktami styczności okręgu wpisanego i długościami odpowiednich odcinków stycznych. Prosi o zapisanie równości między odcinkami stycznych i bokami trójkąta i formułuje problem dotyczący wyznaczenia długości promienia okręgu wpisanego, który to problem uczniowie rozwiązują w parach. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązania na forum klasy.

5. Następnie nauczyciel podaje twierdzenie o sumie średnic i prosi uczniów o uzasadnienie tego twierdzenia.
6. Nauczyciel podaje problemy do rozwiązania. Uczniowie rozwiązują je w parach. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązania na forum klasy.
7. Na koniec nauczyciel prezentuje zagadnienie relacji między promieniami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt prostokątny. Uczniowie, korzystając z obserwacji modelu w symulacji formułują rozwiązanie – wybrany uczeń zapisuje je na tablicy.
8. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne na czas (od ćwiczenia łatwiejszego do trudniejszych spośród: 2, 3, 5, 6 i 8). Grupa, która rozwiąże poprawnie ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy, wątpliwości omawiane.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

- Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć: 1, 4 i 7.

Materiały pomocnicze:

[Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny](#)

[Okrąg opisany na trójkącie](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać przy realizacji tematu o okręgach opisanych i wpisanych w dowolny trójkąt.