

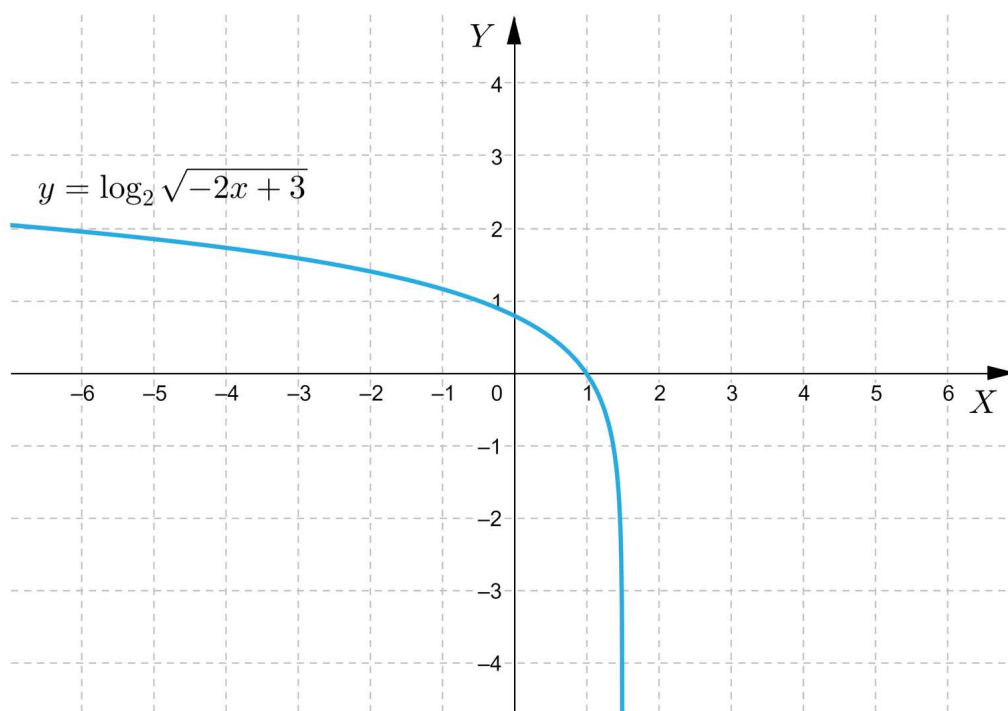


Własności funkcji złożonych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Własności funkcji złożonych

Źródło: dostępny w internecie: [Arek Socha](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.



W czasie spotkań z matematyką bardzo często natrafiamy na funkcje złożone. Jednym z najprostszych przykładów funkcji złożonej jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Możemy ją otrzymać w wyniku złożenia $h \circ g$ dwóch funkcji liniowych $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(x) = 2x$ i $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x + 1$. W przypadku funkcji liniowej współczynnik a mówi nam o monotoniczności funkcji. Trudniej jest określić tę własność dla bardziej złożonych funkcji np. $f(x) = \log_2 \sqrt{-2x + 3}$. Wykres tej funkcji złożonej znajduje się powyżej i jak widać jest to funkcja malejąca. Tutaj dowiesz się, jakie twierdzenia dają nam narzędzie do badania monotoniczności funkcji złożonych.

Twoje cele

- Dokonasz analizy własności składowych funkcji złożonej, aby pokazać daną własność funkcji złożonej.
- Zastosujesz twierdzenia dotyczące funkcji złożonych do wykazywania własności takich funkcji.

Przeczytaj

Definicja: funkcja złożona

Niech dane będą funkcje $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$. Dla każdego elementu $x \in X$ istnieje wówczas dokładnie jeden element $z \in Z$, taki że $z = g(f(x))$. Funkcje f i g wyznaczają więc nową funkcję $h : X \rightarrow Z$ określoną w następujący sposób: $h(x) = g(f(x))$ dla każdego $x \in X$. Funkcję h nazywamy superpozycją lub złożeniem funkcji f i g i oznaczamy symbolem $g \circ f$.

Własność: własności funkcji złożonej

1. złożenie funkcji jest działaniem łącznym,
2. złożenie funkcji nie jest działaniem przemennym,
3. złożenie dwóch funkcji różnowartościowych jest funkcją różnowartościową,
4. złożenie dwóch funkcji, które są „na” nie musi być „na”,
5. złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą,
6. złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą,
7. złożenie funkcji rosnącej (malejącej) z funkcją malejącą (rosnącą) jest funkcją malejącą,
8. złożenie dwóch funkcji parzystych jest funkcją parzystą.

Powyższe własności zostaną pokazane i dokładnie wyjaśnione w poniższych przykładach. Dodatkowo zostanie wprowadzone pojęcie funkcji tożsamościowej.

Przykład 1

Pokażemy, że złożenie funkcji jest działaniem łącznym tzn. że dla dowolnych funkcji f, g i h zachodzi: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Rozwiązanie:

Niech $h : S \rightarrow T, g : W \rightarrow X, f : Y \rightarrow Z, T \subset W, X \subset Y$.

Weźmy dowolny $x \in S$. Wówczas

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x).$$

Przykład 2

Pokażemy, że złożenie funkcji nie jest działaniem przemennym.

Niech funkcje f, g będą określone przy pomocy tabel:

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$$

Argumenty i wartości funkcji

Argumenty i wartości funkcji				
x	4	2	3	1
$f(x)$	2	3	1	4

oraz

$$g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

Argumenty i wartości funkcji				
x	3	4	1	2
$g(x)$	4	1	2	3

Znajdźmy złożenia $g \circ f$ oraz $f \circ g$.

Rozwiązanie:

Budujemy funkcję $g \circ f$.

Przepisujemy wiersz argumentów funkcji f z pierwszej tabelki. Dla argumentu 4 funkcja f przyporządkowuje wartość 2, która staje się argumentem funkcji g . Z drugiej tabelki dla argumentu 2 otrzymujemy wartość równą 3.

Analogicznie wypełniamy dalej tabelkę. Otrzymujemy złożenie $g \circ f$:

Argumenty i wartości funkcji				
x	4	2	3	1
$(g \circ f)(x)$	3	4	2	1

oraz $f \circ g$:

Argumenty i wartości funkcji				
x	3	4	1	2
$(f \circ g)(x)$	2	4	3	1

Widzimy, że otrzymaliśmy dwa różne przyporządkowania, czyli składanie funkcji nie jest przemienne.

Przykład 3

Jak myślisz, jak wygląda tabelka funkcji $e : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, która dla każdej funkcji $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ spełnia następujący warunek:

$$f \circ e = e \circ f = f?$$

Argumenty i wartości funkcji				
x				

Argumenty i wartości funkcji

$e(x)$				
--------	--	--	--	--

Rozwiązanie:

Jest to funkcja **tożsamościowa** albo inaczej identyczność „ id ”:

Argumenty i wartości funkcji

x	1	2	3	4
$e(x)$	1	2	3	4

Przykład 4

Znajdziemy funkcję h , która spełnia warunek: $f \circ h = e = id$, gdzie f i e są określone odpowiednimi tabelkami:

x	4	2	3	1
$f(x)$	1	3	4	2

 $\cdot$

x				
$h(x)$				

 $=$

x	1	2	3	4
$e(x)$	1	2	3	4

Rozwiązanie:

Jak pokazaliśmy, składanie funkcji nie jest przemienne.

Należy pamiętać, że zapis $f \circ h$ czytamy od strony prawej do lewej, czyli funkcja h (wewnętrzna) jest złożona z funkcją f (zewnętrzna).

W wyniku tego złożenia otrzymujemy funkcję tożsamościową e .

Dziedziną funkcji e jest zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$.

Wpisujemy te argumenty w wiersz pierwszy tabelki funkcji h .

Z tabelki funkcji e wynika, że $e(1) = 1$.

Szukamy teraz takiego argumentu funkcji zewnętrznej f , że $f(x) = 1$.

Z tabelki funkcji f odczytujemy $f(4) = 1$.

Stąd ponieważ argumenty funkcji zewnętrznej są wartościami funkcji wewnętrznej wynika, że $h(1) = 4$.

Zatem w wierszu drugim w kolumnie pierwszej tabelki funkcji h wpisujemy 4.

Analogicznie szukamy pozostałych wartości funkcji wewnętrznej h .

x	4	2	3	1
$f(x)$	1	3	4	2

 $\cdot$

x	1	2	3	4
$h(x)$	4	1	2	3

 $=$

x	1	2	3	4
$e(x)$	1	2	3	4

Przykład 5

Pokażemy, że złożenie dwóch funkcji różnowartościowych jest **funkcją różnowartościową**.

Niech dane będą dwie dowolne funkcje różnowartościowe $f : X \rightarrow Y$ i $g : Z \rightarrow W$, $Y \subset Z$.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$.

Rozwiązanie:

Funkcja f jest różnowartościowa, a więc $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ponieważ $Y \subset Z$, to $f(x_1), f(x_2) \in Z$.

Funkcja g jest różnowartościowa, stąd $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$.

Pokazaliśmy, że dla każdego $x_1, x_2 \in X$, warunek $x_1 \neq x_2$ pociąga za sobą $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, czyli złożenie jest różnowartościowe.

Przykład 6

Pokażemy, że złożenie dwóch funkcji, które są „na” nie musi być „na”.

Weźmy funkcje: $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, \infty \rangle$, $f(x) = x^2 - 1$, która jest „na” oraz funkcję $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 2$, również „na”.

Rozwiązanie:

Istnieje złożenie $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(f(x)) = 2(x^2 - 1) + 2 = 2x^2$.

Istnieje taki element $y = -1 \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = 2x^2 \neq -1$.

Przykład 7

Pokażemy, że złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą.

Niech dane będą dwie dowolne funkcje rosnące $f : X \rightarrow Y$ i $g : Z \rightarrow W$, $Y \subset Z$.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$.

Rozwiązanie:

Funkcja f jest funkcją rosnącą, a więc $f(x_1) < f(x_2)$.

Ponieważ $Y \subset Z$, to $f(x_1), f(x_2) \in Z$.

Funkcja g jest rosnąca, zatem $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$.

Pokazaliśmy, że dla każdego $x_1, x_2 \in X$, warunek $x_1 < x_2$ pociąga za sobą $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, czyli złożenie jest **funkcją rosnącą**.

Przykład 8

Pokażemy, że złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą.

Niech dane będą dwie dowolne funkcje malejące $f : X \rightarrow Y$ i $g : Z \rightarrow W, Y \subset Z$.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$.

Rozwiązanie:

Funkcja f jest **funkcją malejącą**, a więc $f(x_1) > f(x_2)$.

Ponieważ $Y \subset Z$, to $f(x_1), f(x_2) \in Z$.

Funkcja g jest również malejąca, zatem $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$.

Pokazaliśmy, że dla każdego $x_1, x_2 \in X$, warunek $x_1 < x_2$ pociąga za sobą $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, czyli złożenie jest funkcją rosnącą.

Przykład 9

Pokażemy, że złożenie funkcji rosnącej (malejącej) z funkcją malejącą (rosnącą) jest funkcją malejącą.

Niech dana będzie funkcja rosnąca $f : X \rightarrow Y$ i funkcja malejąca $g : Z \rightarrow W, Y \subset Z$.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$.

Rozwiązanie:

Funkcja f jest funkcją rosnącą, a więc $f(x_1) < f(x_2)$.

Ponieważ $Y \subset Z$, to $f(x_1), f(x_2) \in Z$.

Funkcja g jest malejąca, zatem z warunku $f(x_1) < f(x_2)$ wynika $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$.

Pokazaliśmy, że dla każdego $x_1, x_2 \in X$, warunek $x_1 < x_2$ pociąga za sobą $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$, czyli złożenie jest funkcją malejącą.

Przypadek złożenia funkcji malejącej z funkcją rosnącą pokazuje się analogicznie.

Przykład 10

Pokażemy, że złożenie dwóch funkcji parzystych jest **funkcją parzystą**.

Niech dane będą dwie dowolne funkcje parzyste $f : X \rightarrow Y$ i $g : Z \rightarrow W$ oraz $Y \subset Z$.

Weźmy dowolne $x, -x \in X$. Wówczas

Rozwiązanie:

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Stąd wynika, że złożenie $g \circ f : X \rightarrow W$ jest funkcją parzystą.

Słownik

funkcja różnowartościowa

funkcja jest różnowartościowa, jeśli dla każdego $x_1, x_2 \in X$ warunek $x_1 \neq x_2$ pociąga za sobą

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

funkcja „na”

funkcja jest „na”, jeśli dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że

$$f(x) = y$$

funkcja rosnąca

funkcja jest rosnąca, jeśli dla każdego $x_1, x_2 \in X$ warunek $x_1 < x_2$ pociąga za sobą

$$f(x_1) < f(x_2)$$

funkcja malejąca

funkcja jest malejąca, jeśli dla każdego $x_1, x_2 \in X$ warunek $x_1 < x_2$ pociąga za sobą

$$f(x_1) > f(x_2)$$

funkcja parzysta

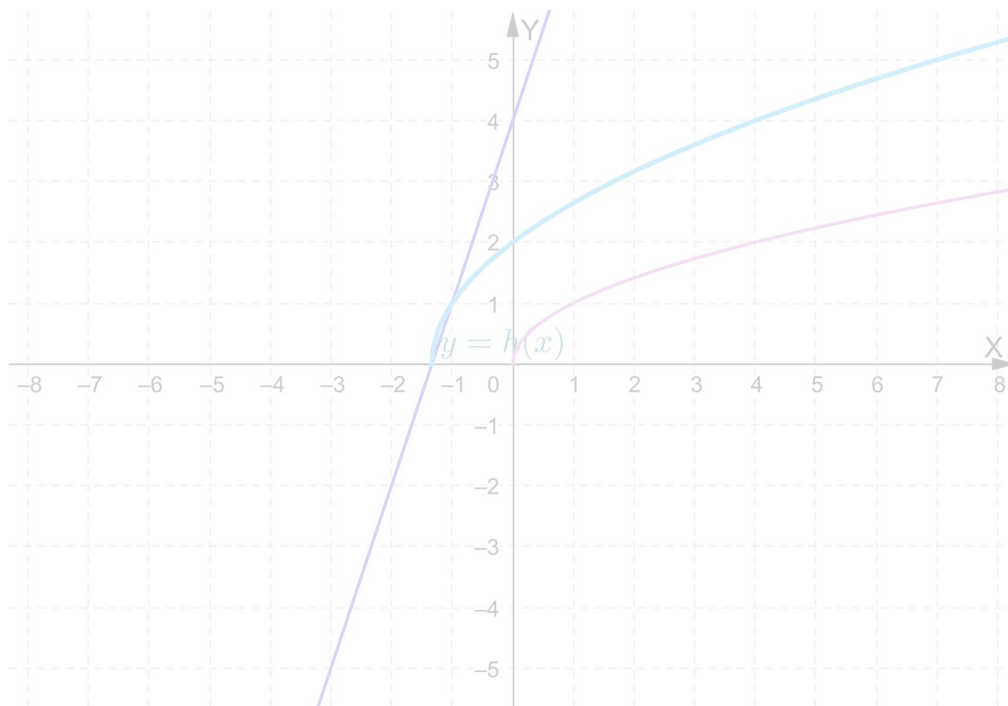
funkcja jest parzysta, jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi $-x \in X$ i

$$f(-x) = f(x)$$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Wybierz funkcję zewnętrzną (spośród funkcji $g_1 - g_4$) oraz funkcję wewnętrzną (spośród funkcji $f_1 - f_4$). Określ monotoniczność wybranych funkcji a następnie określ monotoniczność funkcji złożonej. Wyciągnij wnioski.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D7XIjCM95>

Polecenie 2

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 \sqrt{-2x + 3}$. Określ monotoniczność funkcji f .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dane są funkcje określone przy pomocy tabel:

$f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	4	2	3	1
$f(x)$	3	1	4	2

$g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	3	4	1	2
$g(x)$	1	3	2	4

$h : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
------------------------------	--	--	--	--

Argumenty i wartości funkcji

x	3	4	1	2
$h(x)$	2	1	4	3

Wybierz poprawną odpowiedź. Złożenie $k = h \circ g \circ f$ jest określone przez tabelkę:

x	4	2	3	1
$k(x)$	4	1	2	3

☐

x	3	4	2	1
$k(x)$	2	4	1	3

☐

x	3	4	1	2
$k(x)$	4	1	2	3

☐

x	1	2	3	4
$k(x)$	1	3	2	4

☐

Ćwiczenie 2



Dane są funkcje określone przy pomocy tabelki:

$f_1 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	3	4	1	2
$f_1(x)$	1	2	4	3

$f_2 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	3	4	1	2
$f_2(x)$	4	3	2	1

$f_3 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
------------------------------	--	--	--	--

Argumenty i wartości funkcji				
x	3	4	1	2
$f_3(x)$	2	1	4	3

$f_4 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	2	4	3	1
$f_4(x)$	1	4	2	3

oraz

$g_1 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	4	2	3	1

Argumenty i wartości funkcji				
$g_1(x)$	4	3	1	2

$g_2 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	3	4	1	2
$g_2(x)$	4	3	2	1

$g_3 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji				
x	2	4	1	3
$g_3(x)$	4	1	3	2

$g_4 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$

Argumenty i wartości funkcji

x	1	2	3	4
$g_4(x)$	4	3	2	1

Połącz parami tabelki funkcji $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ z tabelkami funkcji $g_j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tak, aby zachodziło $f_i \circ g_j = id$, pamiętając, że złożenie nie jest przemienne i czytamy je od prawej strony do lewej.

$f_2 \circ$

g_3

$f_3 \circ$

g_2

$f_1 \circ$

g_4

$f_4 \circ$

g_1

Ćwiczenie 3



Dana jest funkcja złożona określona wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x + 1)$.

Wskaż wszystkie prawidłowe odpowiedzi:

☐ Funkcja jest nierosnąca.

☐ Funkcja jest rosnąca.

☐ Funkcja jest różnowartościowa.

☐ Funkcja jest malejąca.

Ćwiczenie 4



Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6-2x}}$ jest funkcją różnowartościową.

Ćwiczenie 5



Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \log_2 \sqrt{4-3x}$. Określić monotoniczność funkcji f .

Ćwiczenie 6



Pokaż, że złożenie dwóch funkcji nieparzystych jest funkcją nieparzystą.

Ćwiczenie 7



Pokaż, że złożenie funkcji nieparzystej (parzystej) z funkcją parzystą (nieparzystą) jest funkcją parzystą.

Ćwiczenie 8



Zbadaj, czy funkcja $f(x) = |2x^5 + 3x^3 - x|$ jest funkcją parzystą czy nieparzystą.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Kuna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności funkcji złożonych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) posługuje się złożeniami funkcji;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje obywatelskie.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dokonuje analizy własności składowych funkcji złożonych, aby pokazać daną własność złożenia;
- stosuje twierdzenia dotyczące funkcji złożonych do wykazywania własności złożań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dywanik pomysłów;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel razem z uczniami przypomina definicję funkcji złożonej. Pokazuje diagramy albo je rysuje.
2. Prowadząc rozmowę kierowaną nauczyciel skłania uczniów do przypomnienia własności funkcji: różnowartościowość, „na”, monotoniczność, parzystość i nieparzystość.
3. Następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
4. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Wybrany uczeń przypomina własność łączności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych. Nauczyciel przedstawia Przykład 1.
2. Wybrany uczeń przypomina prawo przemienności dodawania i mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych i rozwiązuje Przykład 2 przy tablicy.
3. Uczniowie analizują Przykłady 3 i 4, następnie rozwiązania są dyskutowane na forum klasy.
4. Uczniowi metodą dywanika pomysłów proponują rozwiązania Przykładów 5-7, porównują je z zaproponowanymi w materiale.

5. Uczniowie analizują przykłady złożzeń funkcji przedstawionych w symulacji interaktywnej.
6. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 4-6 w sekcji „Sprawdź się”, nauczyciel wyjaśnia zgłaszane wątpliwości.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem przykładów, które pojawiły się na lekcji.

Praca domowa:

Uczniowie:

- analizują przykłady 8-10 z sekcji „Przeczytaj”,
- wykonują polecenie 2 pod symulacją interaktywną,
- rozwiązują ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”, których nie zdążyli wykonać podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Pojęcie funkcji. Zależności funkcyjne](#)

Wskazówki metodyczne:

Polecenie związane z symulacją i samą symulację można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału o własnościach funkcji złożonych. Symulację interaktywną można wykorzystać w lekcji „Wykresy funkcji złożonych”.