



Kąty między ścianami w czworościanie

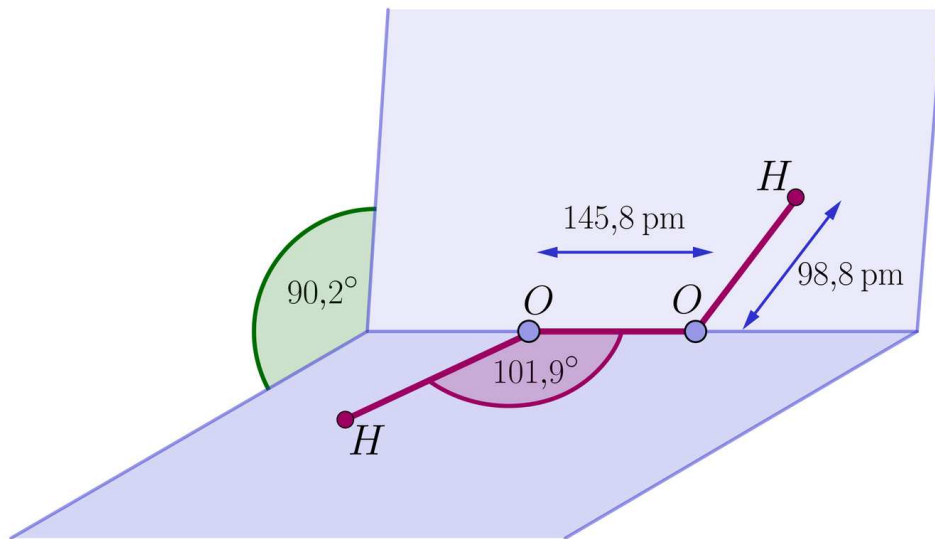
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty między ścianami w czworościanie

Źródło: Michel Catalisano, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Czy wiesz, że kąty dwuściennie występują również w naturze? Przykładem jest cząsteczka nadtlenu wodoru, która w określonych warunkach występuje w postaci różnych konformerów, jest to struktura zbudowana z tak samo połączonych ze sobą atomów, jednak różniących się położeniem przestrzennym z uwagi na rotację wokół pojedynczych wiązań. W wyniku rotacji cząsteczka przyjmuje różne konformacje i tak poniżej przedstawiono strukturę nadtlenu wodoru w fazie stałej. Występujący w niej kąt dwuścienny jest właśnie wynikiem zmiany konformacyjnej i sprawia, że cząsteczka ta znajduje się w najniższej energetycznie konformacji, co jest kluczowe dla uporządkowania przestrzennego, jakie cechuje kryształy. W fazie gazowej, jak i w fazie ciekłej cząsteczka nadtlenu wodoru zmienia swoją konformację. Przykładowo w cieczy w układzie zaczynają odgrywać istotną rolę oddziaływania wodorowe i to one determinują zmianę konformacyjną, która prowadzi w tym przypadku do zmiany położenia przestrzennego atomów, co prowadzi do eliminacji kąta dwuściennego.



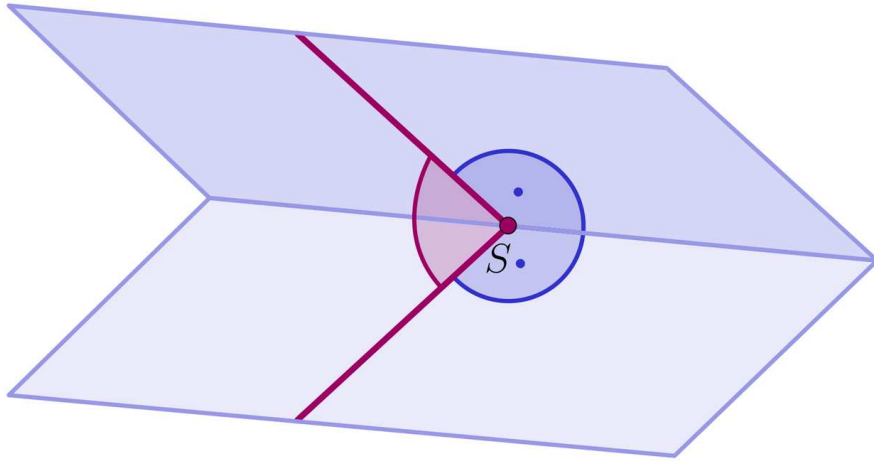
Cząsteczka nadtlenu wodoru w stanie stałym

Twoje cele

- Obliczysz miary kątów pomiędzy ścianami w czworościanie.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne do wyznaczania miar kątów dwuściennych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że w celu wyznaczenia kąta pomiędzy ścianami (zwanego **kątem dwuściennym**) znajdujemy najpierw wspólną krawędź tych dwóch ścian. Następnie do wybranego punktu na tej krawędzi prowadzimy dwa odcinki, jeden zawarty w pierwszej ścianie, drugi – w drugiej, tak aby były one prostopadłe do tej krawędzi. Kąt pomiędzy tymi odcinkami to kąt liniowy kąta dwuściennego (czyli kąt pomiędzy tymi ścianami).



Zastanówmy się, czy zawsze z trójkąta równobocznego o boku długości a i trzech trójkątów równoramiennych o podstawie długości a i ramionach długości b możemy zbudować ostrosłup prawidłowy trójkątny. Zauważmy, że spodek wysokości takiego ostrosłupa pokrywa się z punktem przecięcia wysokości w trójkącie równobocznym. Zatem, aby można było złożyć z tych trójkątów ostrosłup, to długość krawędzi bocznej musi być dłuższa od dwóch trzecich długości wysokości podstawy:

$$b > \frac{a\sqrt{3}}{3}, \text{ czyli } a < \sqrt{3}b.$$

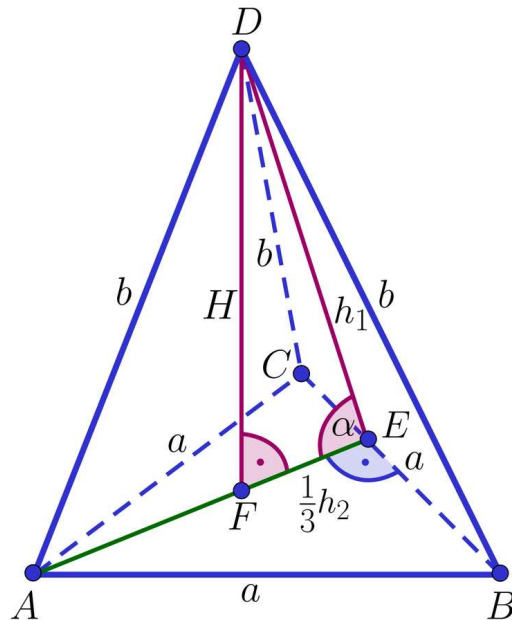
Wyznamy kąt pomiędzy ścianami tego ostrosłupa.

Przykład 1

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o długości krawędzi podstawy a oraz długości krawędzi bocznej b wyznaczmy kąt pomiędzy ścianą boczną a płaszczyzną podstawy.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku.



W celu wyznaczenia kąta pomiędzy ścianą boczną a podstawą obieramy punkt E będący środkiem krawędzi BC . Zauważmy, że odcinki DE i AE są wysokościami trójkątów CBD i CBA , ponieważ pierwszy trójkąt jest równoramienny a drugi równoboczny więc spodki obu wysokości dzielą odcinek BC na pół w punkcie E . Wysokości te są oczywiście prostopadłe do krawędzi BC .

Z trójkąta prostokątnego BED wyznaczamy długość wysokości DE :

$$h_1 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Ponieważ $a < \sqrt{3}b$, więc $4b^2 - a^2 > 0$.

Wysokość trójkąta równobocznego ABC ma długość $h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ponadto $|EF| = \frac{1}{3}h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Z trójkąta prostokątnego DFE wyznaczamy:

$$\cos \alpha = \frac{|EF|}{|DE|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

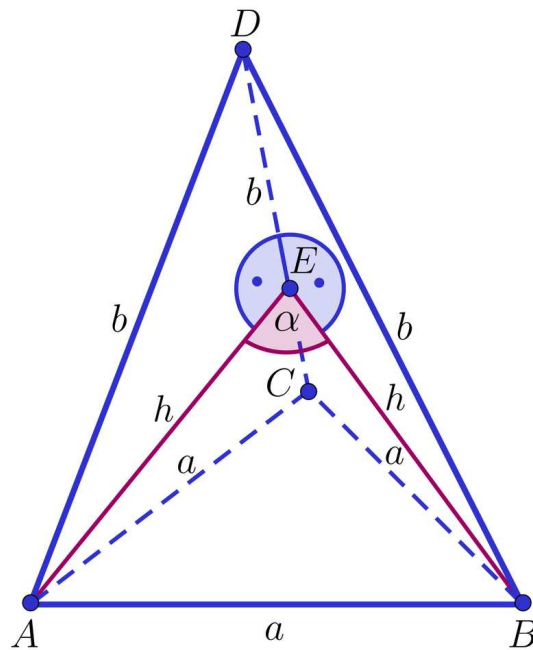
Znając długości odcinków a i b możemy wyznaczyć miarę kąta α .

Przykład 2

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o długości krawędzi podstawy a oraz długości krawędzi bocznej b wyznaczmy kąt pomiędzy ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku.



Trójkąty ACD i BCD są przystające, więc wysokości prowadzone z wierzchołków A i B przetną się punkcie E leżącym na krawędzi CD . Z poprzedniego przykładu wiemy, że wysokość ściany bocznej opuszczona z punktu D ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$. Zatem pole ściany bocznej wynosi $P = \frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2}$. Pole to jest również równe $P = \frac{1}{2}bh$, czyli

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2},$$

$$h = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}.$$

Korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABE otrzymujemy:

$$a^2 = 2h^2 - 2h^2 \cos \alpha,$$

$$a^2 = 2h^2(1 - \cos \alpha),$$

$$a^2 = \frac{a^2(4b^2 - a^2)}{2b^2}(1 - \cos \alpha),$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2b^2}{4b^2 - a^2},$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{2b^2}{4b^2 - a^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}.$$

Znając długości odcinków a i b możemy wyznaczyć miarę kąta α .

Przykład 3

Uzasadnimy, że w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt pomiędzy ścianami bocznymi jest większy od 60° .

Rozwiązanie

Zauważmy, że z warunku $0 < a < \sqrt{3}b$ wynika, że $4b^2 > 4b^2 - a^2 > 4b^2 - 3b^2 = b^2$, więc

$$\frac{1}{2} = \frac{2b^2}{4b^2} < \frac{2b^2}{4b^2 - a^2},$$

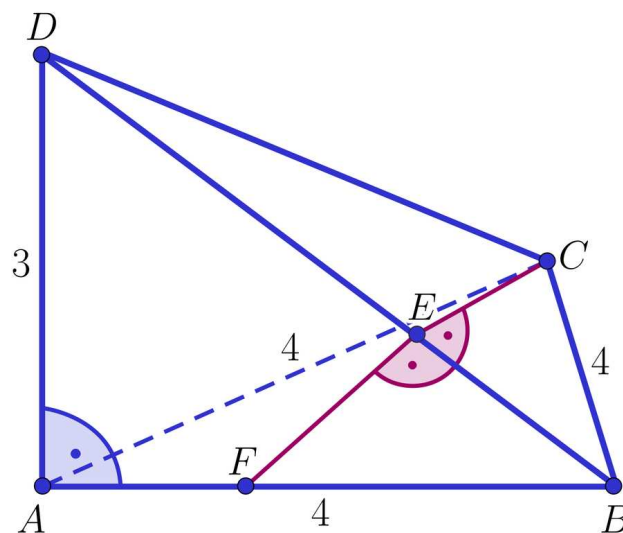
Stąd cosinus kąta pomiędzy ścianami bocznymi $\cos \alpha = 1 - \frac{2b^2}{4b^2 - a^2} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, więc $\alpha > 60^\circ$.

Przykład 4

Dany jest czworościan $ABCD$, którego podstawą jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 4, a krawędź AD o długości 3 jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Wyznamy kąt pomiędzy ścianami ABD i BCD .

Rozwiązanie

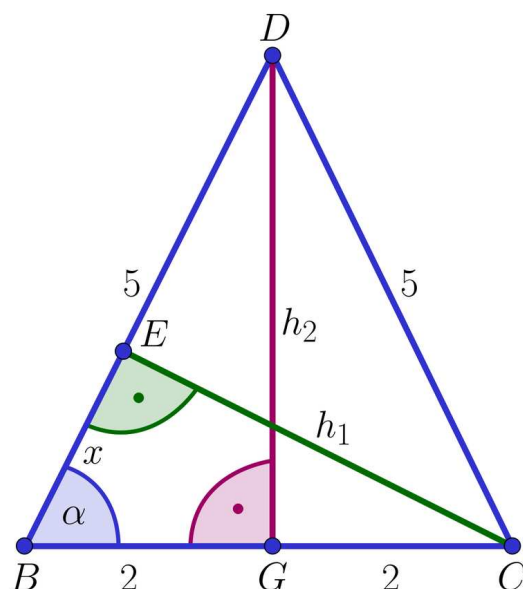
Sporządzamy rysunek pomocniczy:



Z trójkątów prostokątnych ABD i ACD wyznaczamy $|BD| = |CD| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Zatem trójkąt BCD jest trójkątem ostrokatnym.

Wspólną krawędzią ścian ABD i BCD jest BD . Zaznaczamy wysokość ściany BCD opuszczoną z wierzchołka C . Wysokość ta przecina krawędź BD w punkcie E . Wyznaczamy odcinek EF prostopadły do krawędzi BD . Punkt F leży na krawędzi AB lub jej przedłużeniu. W celu wyznaczenia kąta dwuściennego pomiędzy ścianami ABD i BCD należy wyznaczyć miarę kąta płaskiego CEF .

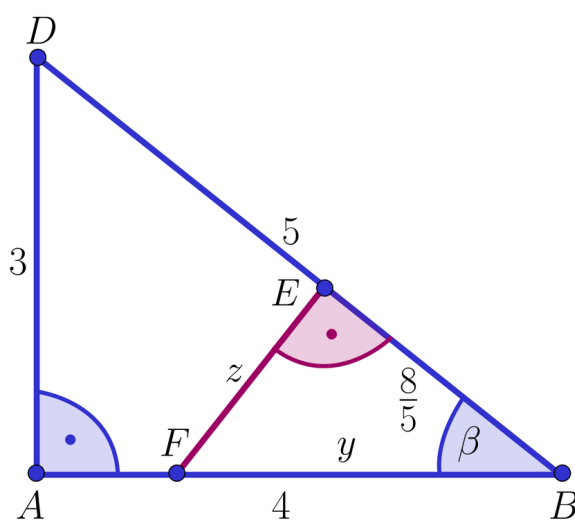
Rozważmy ścianę BCD :



Z trójkąta prostokątnego BGD obliczamy $h_2 = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$. Trójkąt BEC jest podobny do trójkąta BGD (cecha kąt-kąt-kąt). Zatem $\frac{h_1}{4} = \frac{h_2}{5}$, czyli $h_1 = \frac{4\sqrt{21}}{5}$.

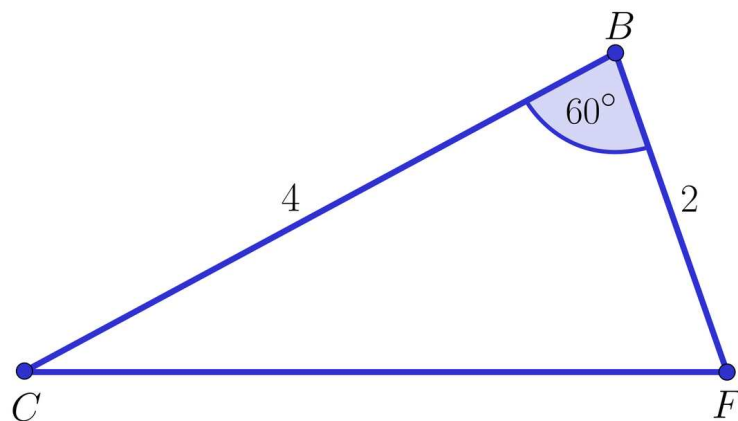
Ponadto $\frac{x}{4} = \frac{2}{5}$, czyli $x = \frac{8}{5}$.

Rozważmy ścianę ABD :



Trójkąt BEF jest podobny do trójkąta BAD (cecha kąt-kąt-kąt). Stąd $\frac{8}{5y} = \frac{4}{5}$, czyli $y = 2$. Ponadto $\frac{z}{y} = \frac{3}{5}$, czyli $\frac{z}{2} = \frac{3}{5}$, więc $z = \frac{6}{5}$.

Rozważmy trójkąt BCF :



Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy $|CF|^2 = 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 12$, więc $|CF| = 2\sqrt{3}$. Oznaczamy kąt CEF przez γ . Wówczas z twierdzenia cosinusów dla trójkąta CEF otrzymujemy:

$$|CF|^2 = |CE|^2 + |EF|^2 - 2 \cdot |CE| \cdot |EF| \cos \gamma,$$

$$12 = \frac{336}{25} + \frac{36}{25} - \frac{48\sqrt{21}}{25} \cos \gamma,$$

$$48\sqrt{21} \cos \gamma = 72,$$

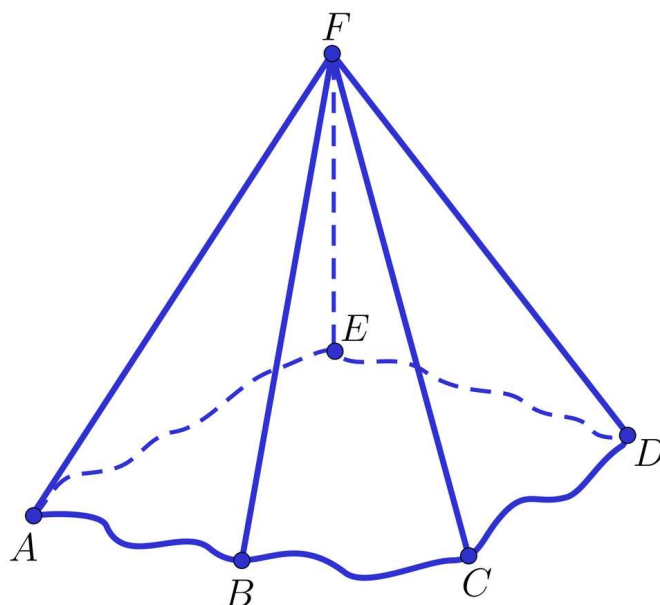
$$\cos \gamma = \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{42} \approx 0,3273.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy $\gamma \approx 71^\circ$.

Ciekawostka

W matematyce definiuje się też pojęcie kąta wielościennego. Jest to część przestrzeni domknięta skończoną liczbą kątów płaskich takich, że wszystkie kąty mają wspólny wierzchołek i każde dwa następne kąty mają wspólne ramię.

Na przykład wierzchołek F wyznacza kąt ograniczony przez kąty płaskie AFB , BFC , CFD , DFE oraz EFA . Możemy też powiedzieć, że ten kąt jest wyznaczony przez pięć płaszczyzn przecinających się w punkcie F , które tworzą jego ściany.



Każdy z czterech wierzchołków czworościanu wyznacza **kąt trójsienny**.

Słownik

kąt dwuścienny

suma dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednego z dwóch obszarów, które te półpłaszczyzny wycinają z przestrzeni.

kąt liniowy kąta dwuściennego

kąt płaski będący częścią wspólną kąta dwuściennego oraz płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.

kąt trójsienny

część przestrzeni ograniczona przez powierzchnię wyznaczoną przez trzy półproste o wspólnym początku nieleżące w jednej płaszczyźnie; półproste te nazywamy krawędziami kąta trójsiennego, a ich wspólny początek wierzchołkiem kąta trójsiennego

Animacja 3D

Polecenie 1

Przeanalizuj dokładnie poniższą animację 3D. Zastanów się, dysponując jakimi danymi można wyznaczyć długości odpowiednich odcinków i ostatecznie miarę kąta dwuściennego pomiędzy ścianami bocznymi w czworościanie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DNsTppUeb>

Film przedstawia procedure wyznaczania kąta dwuściennego między dwoma ścianami w czworościanie.

Polecenie 2

Wyznacz miarę kąta dwuściennego pomiędzy dwiema ścianami czworościanu foremnego.

Polecenie 3

W czworościanie $ABCD$ kąty płaskie BAD , CAD i CAB mają miarę α , gdzie $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Wykaż, że cosinus kąta dwuściennego pomiędzy sąsiednimi ścianami wynosi $1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż zdania prawdziwe.

☐

Kąt płaski wyznaczony przez dwie krawędzie czworościanu o wspólnym wierzchołku nazwiemy kątem dwuściennym.

☐

W celu zaznaczenia kąta pomiędzy ścianami znajdujemy najpierw wspólną krawędź tych dwóch ścian. Następnie do wybranego punktu na tej krawędzi prowadzimy dwa odcinki, jeden zawarty w pierwszej ścianie, drugi - w drugiej, tak aby były one prostopadłe do tej krawędzi.

☐

Istnieje ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego krawędź podstawy ma długość $\sqrt{3}$ a krawędź boczna ma długość 1.

☐

Wszystkie kąty dwuścienne pomiędzy ścianami czworościanu mają takie same miary.

☐

Istnieje ostrosłup trójkątny, którego krawędź podstawy ma długość 1 a krawędź boczna ma długość $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2



Wpisz poprawną odpowiedź (liczbę całkowitą).

Dany jest sześcián $ABCDEFGH$. Miara kąta pomiędzy ścianami ACD i ACH czworościanu $ACDH$ wynosi około °.

Ćwiczenie 3



Wysokością czworościanu $ABCD$ o podstawie trójkąta równobocznego ABC jest krawędź AD . Niech α oznacza kąt pomiędzy ścianą BCD a podstawą czworościanu. Natomiast β kąt pomiędzy krawędziami AB i BD . Wówczas:

☐ $2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{3} \operatorname{tg} \beta = 0$

☐ $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \beta = 0$

☐ $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta = 0$

Ćwiczenie 4



Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o długości krawędzi podstawy 6 i objętości $3\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta pomiędzy ścianą boczną a płaszczyzną podstawy.

Ćwiczenie 5



Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o polu podstawy $36\sqrt{3}$ i polu powierzchni bocznej 144. Wyznacz miarę kąta pomiędzy ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 6



Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, gdzie $ABCD$ jest kwadratem o przekątnej długości d . Kąt nachylenia ściany bocznej ACH do podstawy ACD czworościanu $ACDH$ wynosi α . Udowodnij, że przekątna prostopadłościanu $ABCDEFGH$ ma długość $\frac{d\sqrt{3\cos^2\alpha+1}}{2\cos\alpha}$.

Ćwiczenie 7



Dany jest czworościan $ABCD$, w którym podstawa ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym ACB . Wiedząc, że $|AC| = |BC| = 2$ i $|AD| = |BD| = |CD| = \sqrt{5}$ oblicz miarę kąta dwuściennego pomiędzy ścianami ABC i ABD oraz ABC i ACD .

Ćwiczenie 8



Dany jest czworościan $ABCD$ o podstawie trójkąta prostokątnego ABC , w którym kąt ABC jest kątem prostym oraz $|AB| = 2|BC|$. Ściana ABD jest trójkątem równobocznym. Natomiast ściana BCD jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym BCD . Oblicz miarę kąta pomiędzy ścianami ABD i BCD .

Dla nauczyciela

Autor: Adrian Karpowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty pomiędzy ścianami w czworościanie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastopach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza miary kątów pomiędzy ścianami w czworościanie,
- stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania miar kątów dwuściennych.

Strategie nauczania:

konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- burza mózgów;
- pokaz.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu;
- projektor multimedialny;
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Przed lekcją uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”. Zapisują swoje uwagi do tekstu.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat i cele lekcji.
2. Nauczyciel prowadzi rozmowę z uczniami na temat materiału zamieszczonego w sekcji „Przeczytaj”. Zostają wyjaśnione wszelkie wątpliwości, jakie pojawiły się podczas lektury tego tekstu. Nauczyciel stara się, aby sami uczniowie nawzajem wyjaśniali swoje wątpliwości.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje animację 3D, w której przedstawione jest jak wyznaczyć kąt dwusieczny w czworoboku, który nie musi być ostrosłupem trójkątnym prawidłowym. Uczniowie zastanawiają się w parach nad rozwiązaniem Polecenia 2 i Polecenia 3. Wybrane osoby prezentują rozwiązanie.
2. Cała klasa zastanawia się nad rozwiązaniem zadania 7 i 8. Pomysły prezentowane są na forum klasy. Przedstawione zostają rozwiązania tych zadań.

Faza podsumowująca:

Podsumowanie lekcji. Omówienie ewentualnych pytań dotyczących omawianego materiału.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 1 – 6.

Materiały pomocnicze:

[Czworościan](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja 3D może zostać wykorzystana na lekcji o odcinkach w czworoboku.