Największa/najmniejsza wartość funkcji kwadratowej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Największa/najmniejsza wartość funkcji kwadratowej

Źródło: Daniel Jerez, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Znalezienie największej (lub najmniejszej) wartości funkcji kwadratowej to jedno z najczęściej pojawiających się zadań na lekcji, sprawdzianie czy maturze. W ogólności funkcja kwadratowa to jedno z tych pojęć, które nieustannie jest wykorzystywane w szkole. Zazwyczaj wiadomo jakie jest równanie paraboli albo jaki jest jej wykres i własności. Ale czy tak naprawdę wiemy, jak wykorzystać zdobytą do tej pory wiedzę, aby wyznaczyć największa/najmniejszą wartość funkcji kwadratowej?

W tym materiale wykorzystamy własności funkcji kwadratowej do wyznaczania jej największej/najmniejszej wartości.

Twoje cele

- Wyznaczysz największą/najmniejszą wartość funkcji kwadratowej.
- Wyznaczysz największą/najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
- Zastosujesz poznane wzory do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

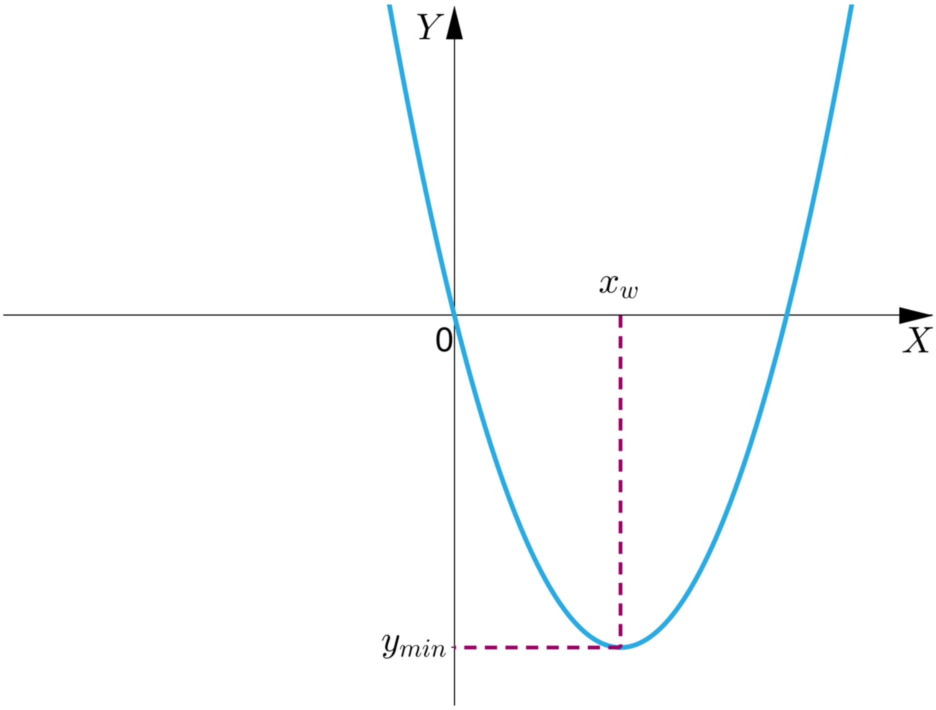
Wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$, możemy zapisać w postaci kanonicznej:
$f(x) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, gdzie $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ są współrzędnymi wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

Analizując postać kanoniczną funkcji kwadratowej otrzymujemy, że

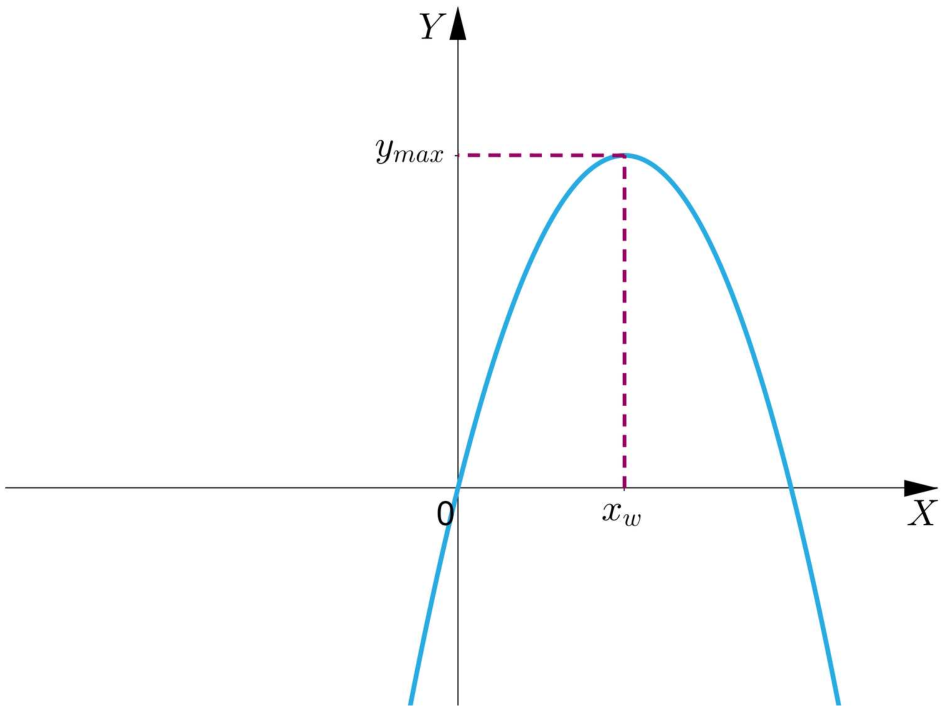
- dla $a > 0$ wartość wyrażenia $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ jest nieujemna. Jeśli $x = -\frac{b}{2a}$, to wartość tego wyrażenia jest najmniejsza - równa 0. Stąd najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$;
- dla $a < 0$ wartość wyrażenia $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ jest niedodatnia. Jeśli $x = -\frac{b}{2a}$, to wartość tego wyrażenia jest największa - równa 0. Stąd największa wartość funkcji kwadratowej $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$.

Istnienie najmniejszej lub największej wartości funkcji kwadratowej zależy od współczynnika a.

Jeśli $a > 0$, to funkcja $y = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość najmniejszą $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$.



Jeśli $a < 0$, to funkcja $y = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość największą $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$.



Przykład 1

Wyznaczymy najmniejszą wartość funkcji kwadatowej $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

$a > 0$, więc funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość najmniejszą $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x_w = -\frac{b}{2a}$.

Sprowadźmy trójmian do postaci kanonicznej:

$2x^2 + 4x - 1 = 2\left(x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 + 2 \cdot x + 1 - 1 - \frac{1}{2}\right) =$

$= 2\left(\left(x^2 + 2 \cdot x + 1\right) - 1 - \frac{1}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 - \frac{3}{2}\right) = 2(x+1)^2 - 3.$

Wykorzystaliśmy wzór skróconego mnożenia:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$f(x) = 2(x+1)^2 - 3,$

więc $x_w = -1$ i $y_{min} = -3$.

Odpowiedź

Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą (-3) dla $x = -1$.

Przykład 2

Wyznaczymy największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + x + 20$.

Rozwiązanie

$a < 0$, więc funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość największą $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x_w = -\frac{b}{2a}$.

Sprowadźmy trójmian do postaci kanonicznej. Wykorzystamy wzory $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

$x_w = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2}$ i $a < 0$, to $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(20) = 1 + 80 = 81$, to $y_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-81}{4(-1)} = \frac{81}{4}$.

Odpowiedź

Funkcja osiąga wartość największą $\frac{81}{4}$ dla $x = \frac{1}{2}$.

Przykład 3

Wyznaczymy współczynniki a, b, c we wzorze funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że dla $x = 1$ funkcja przyjmuje wartość największą równą 2, zaś dla $x = 2$ przyjmuje wartość 1.

Rozwiązanie

Funkcja przyjmuje wartość największą równą 2 dla argumentu równego 1.

Współrzędne wierzchołka paraboli: $x_w = 1$ i $y_{\max} = 2$.

Możemy zapisać wzór funkcji w postaci kanonicznej:

$f(x) = a(x-1)^2 + 2$,

ponieważ $f(2) = 1 \to 1 = a(2-1)^2 + 2 \;\to\; 1 = a + 2 \;\to\; a = -1$.

Wyznaczymy współczynniki b i c, zapisując wzór funkcji w postaci ogólnej: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(x) = -(x-1)^2 + 2 = -\left(x^2 - 2x + 1\right) + 2 =$

$= -x^2 + 2x - 1 + 2 = -x^2 + 2x + 1$

Porównując zapisy $f(x) = ax^2 + bx + c$ oraz $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ widzimy, że $b = 2$ i $c = 1$.

Odpowiedź

$a = -1, b = 2, c = 1$.

Gdy ograniczamy się do rozpatrywania wartości funkcji kwadratowej w danym przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$, to poszukujemy wartości najmniejszej i największej pośród liczb: $f(x_w)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, gdy $x_w \in \langle x_1, x_2 \rangle$, a gdy x_w nie należy do tego przedziału funkcja przyjmuje wartość największą/najmniejszą na krańcach tego przedziału.

Przykład 4

Wyznaczymy najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 16x + 29$ w przedziale $\langle -3, 1 \rangle$.

Rozwiązanie

Zapisujemy wzór funkcji $f(x) = 2x^2 + 16x + 29$ w postaci kanonicznej:

$$f(x) = 2x^2 + 16x + 29 = 2\left(x^2 + 8x + 16\right) - 3 = 2(x+4)^2 - 3,$$

stąd $x_w = -4$ i $y_w = -3$.

Funkcja w zbiorze liczb rzeczywistych przyjmuje wartość najmniejszą równą (-3) dla $x = -4$, bo $a > 0$. Nie jest to najmniejsza wartość funkcji w podanym przedziale, bo $x = -4$ nie należy do przedziału $\langle -3, 1 \rangle$.

Wartości największej lub najmniejszej poszukujemy wśród liczb $f(-3)$ i $f(1)$.

$$f(-3) = 2(-3+4)^2 - 3 = 2 \cdot 1^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$f(1) = 2(1+4)^2 - 3 = 2 \cdot 5^2 - 3 = 2 \cdot 25 - 3 = 50 - 3 = 47$$

Odpowiedź

W przedziale $\langle -3, 1 \rangle$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą (-1) dla $x = -3$, a wartość największą 47 dla $x = 1$.

Przykład 5

Sprawdzimy, dla jakich wartości zmiennej $x \in \langle 0, 2 \rangle$ funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ przyjmuje wartość największą, a dla jakiej najmniejszą.

Rozwiązanie

Ponieważ $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 = -3 < 0$, to wyrażenie w mianowniku nie przyjmuje wartości równej zero, czyli dla każdego $x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 \neq 0$.

Oznaczamy wyrażenie w mianowniku jako $g(x) = x^2 - x + 1$ i zapiszmy w postaci kanonicznej:

$$g(x) = x^2 - x + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

$x_w = \frac{1}{2}$ i $y_w = \frac{3}{4}$, więc dla $x = \frac{1}{2}$ funkcja $g(x)$ przyjmuje wartość najmniejszą $(a = 1 > 0)$ równą $\frac{3}{4}$, więc iloraz $\frac{1}{g(x)}$ jest największy równy $\frac{4}{3}$.

Poszukajmy teraz wartości najmniejszej na krańcach przedziału $\langle 0, 2 \rangle$:

$f(0) = \frac{1}{0^2 - 0 + 1} = 1$ i $f(2) = \frac{1}{2^2 - 2 + 1} = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź

Funkcja przyjmuje wartość największą $\frac{4}{3}$ dla $x = \frac{1}{2}$, a najmniejszą $\frac{1}{3}$ dla $x = 2$.

Przykład 6

Funkcja kwadratowa f przyjmuje w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ największą wartość dla argumentów 0 i 3. Parabola, będąca wykresem tej funkcji ma ramiona skierowane ku górze. Uzasadnimy, że w przedziale $\langle -2, 5 \rangle$ funkcja f przyjmuje największą wartość dla argumentów -2 i 5.

Rozwiązanie

Funkcja kwadratowa f przyjmuje w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ największą wartość dla argumentów 0 i 3. Oznacza to, że $f(0) = f(3)$.

Ponadto otrzymujemy, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji f są skierowane do góry oraz $x_w = \frac{0+3}{2} = 1,5$.

Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta opisana wzorem $x = 1,5$ oraz odległość argumentu $x = -2$ od osi symetrii jest taka sama jak odległość argumentu $x = 5$:

$|1,5 - (-2)| = |5 - 1,5|$

$|3,5| = |3,5|$

$3,5 = 3,5.$

Stąd otrzymujemy, że

$f(-2) = f(5).$

Ponieważ ramiona paraboli są skierowane do góry, to w przedziale $\langle -2, 5 \rangle$ funkcja f przyjmuje największą wartość dla argumentów -2 i 5.

Przykład 7

Fynkcja f dana wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ określona w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$, przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 2$. Uzasadnimy, że $a > 0$ i $b < 0$.

Rozwiązanie

Z treści zadania wiemy, że w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ funkcja f osiąga najmniejszą wartość dla argumentu $x = 2$. Oznacza to, że ramiona paraboli, na której leży wykres funkcji f są skierowane do góry ($a > 0$) oraz jej wierzchołek leży na prostej $x = 2$.

Zauważmy, że wzór na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, to

$x_w = \frac{-b}{2a}$.

Korzystając z faktu, że wierzchołek znajduje się na prostej $x = 2$ dostajemy, że

$2 = \frac{-b}{2a}$.

Z powyższej równości wyznaczymy współczynnik b.

$2 = \frac{-b}{2a} / \cdot 2a$

$4a = -b$

Z wcześniejszych rozważań wiemy, że $a > 0$. Stąd otrzymujemy, że

$-b > 0 \Leftrightarrow b < 0$.

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla wszystkich liczb rzeczywistych, gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$

postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, gdzie $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ i $\Delta = b^2 - 4ac$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą rozwiązania zadań, w których oblicza się największą/najmniejszą wartość funkcji, a następnie rozwiąż polecenia i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDfDyDd44

Film pokazuje metody wyznaczania największej i najmniejszej wartości funkcji kwadratowej.

Polecenie 2

Funkcja f jest funkcją kwadratową. Liczby 3 i (-1) są jej miejscami zerowymi oraz $f(0) = -3$. Wyznacz wartość najmniejszą tej funkcji.

Polecenie 3

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 - 3x + 10$ w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Największa/najmniejsza wartość funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, najmniejsze i największe wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza najmniejsze/ największe wartości funkcji kwadratowej;
- wyznacza najmniejsze i największe wartości funkcji kwadratowej, w danym przedziale domkniętym;
- wyznacza argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- wyznacza argument dla danej wartości funkcji i odwrotnie;
- rozwiązuje zadania, wykorzystując własności funkcji kwadratowej;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- projektor multimedialny;
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają definicję funkcji kwadratowej.
2. Uczniowie przypominają własności funkcji kwadratowej.
3. Uczniowie na tablicy rysują przykładowe wykresy funkcji kwadratowej dla $a > 0$ i $a < 0$.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, w drodze dyskusji określają, kiedy funkcja kwadratowa przyjmuje wartość najmniejszą/największą, podają wzory określające tą wartość.
2. Wnioski zapisują na tablicy.
3. Uczniowie, w parach, analizują przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj oraz zapoznają się z animacją, następnie określają sposób wyznaczenia wartości największej i wartości najmniejszej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
4. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.
5. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek i wyjaśniając wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie formułują wnioski do zapamiętania.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie zadań pod animacją oraz ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- Zależności między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej
- Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej. Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci ogólnej
- Współrzędne wierzchołka paraboli

Wskazówki metodyczne:

„Animację” można również wykorzystać w realizacji lekcji „Najmniejsza/największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym”.