



Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Stosunków długości boków w trójkącie prostokątnym używano już w starożytnej Grecji, w dziełach Euklidesa i Archimidesa. Do rozwoju trygonometrii w matematyce przyczynili się takie osoby jak Mikołaj Kopernik, czy Isaac Newton.

Funkcja cosinus jest określona w trójkącie prostokątnym jako stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta oraz przeciwprostokątnej. W materiale wprowadzimy wiedzę teoretyczną, rozwiążemy przykłady a następnie ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

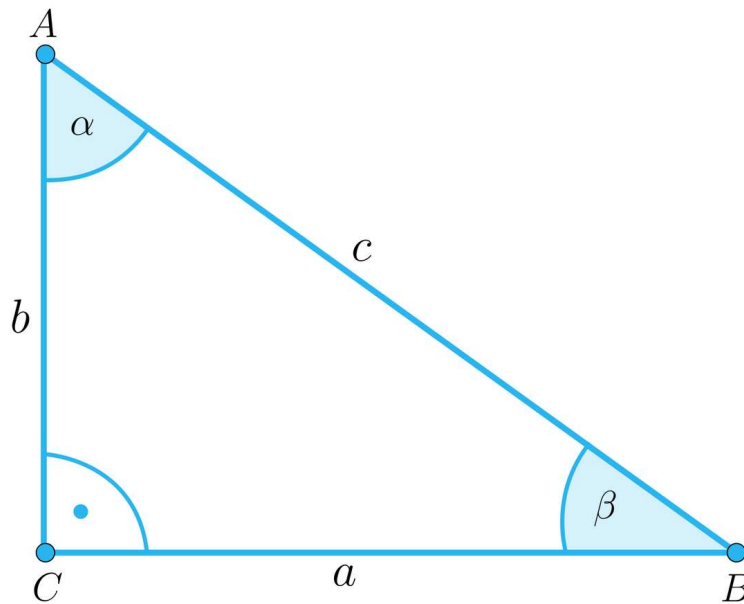
- Zdefiniujesz funkcję cosinus w trójkącie prostokątnym.
- Obliczysz wartości funkcji cosinus kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.
- Zastosujesz definicję funkcji cosinus do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Wprowadźmy definicję funkcji **cosinus kąta ostrego** w trójkącie prostokątnym.

Definicja: cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy iloraz długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.



Do oznaczenia funkcji cosinus używa się skrótu **cos**.

Wzór funkcji cosinus zapisujemy słownie:

$$\text{cosinus kąta ostrego} = \frac{\text{długość przyprostokątnej leżącej przy kącie}}{\text{długość przeciwprostokątnej}}$$

Zapisując za pomocą symboli matematycznych, mamy, że:

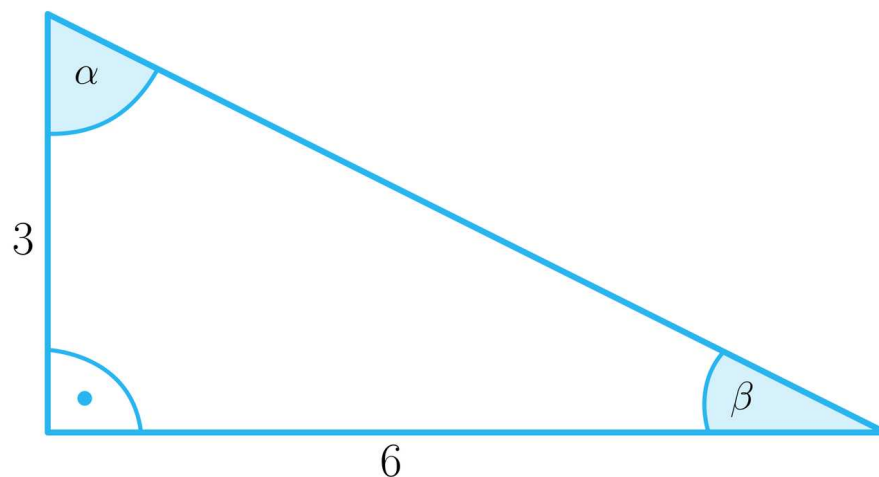
$$\cos \alpha = \frac{b}{c},$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}.$$

Powyższą definicję zastosujemy do wyznaczania wartości cosinusów kątów ostrych w trójkątach prostokątnych.

Przykład 1

Wyznamy wartości cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym z rysunku.

**Rozwiązanie:**

Oznaczmy długość przeciwprostokątnej jako x .

Z twierdzenia Pitagorasa mamy, że $3^2 + 6^2 = x^2$.

Z równania wynika, że $x^2 = 45$, zatem $x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ lub $x = -\sqrt{45} = -3\sqrt{5}$.

Ponieważ $x > 0$, więc $x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Z definicji funkcji cosinus otrzymujemy, że:

$$\cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \beta = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

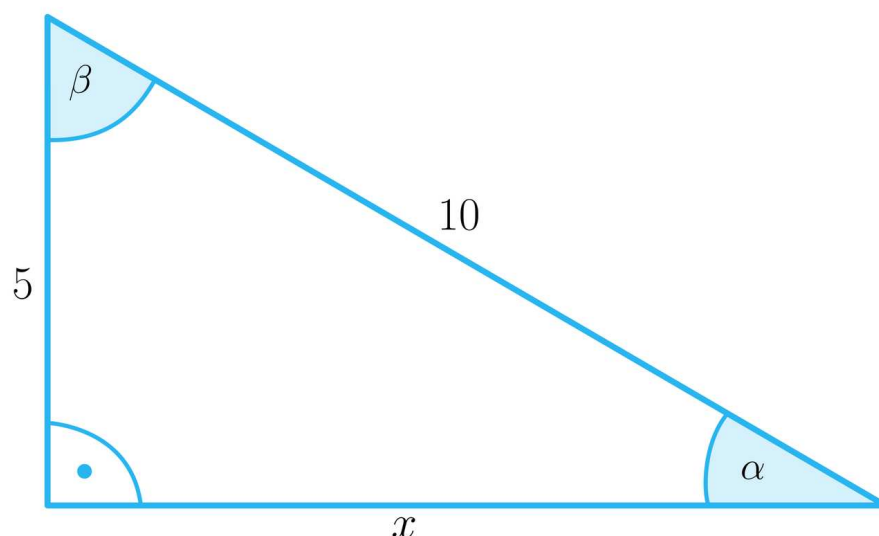
Zauważmy, że wartość funkcji cosinus dowolnego kąta ostrego jest zawsze dodatnia i mniejsza od 1.

Przykład 2

Wyznamy wartość cosinusa mniejszego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, jeżeli jedna przyprostokątna trójkąta ma długość 5, a przeciwprostokątna długość 10.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt prostokątny i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku:

**Rozwiązanie:**

Niech x oznacza długość drugiej przyprostokątnej. Wtedy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, rozwiązujemy równanie:

$$x^2 + 5^2 = 10^2.$$

Zatem $x^2 = 75$, wobec tego

$$x = 5\sqrt{3} \text{ lub } x = -5\sqrt{3}.$$

Ponieważ x jest długością boku, zatem $x = 5\sqrt{3}$.

W dowolnym trójkącie kąt o najmniejszej mierze leży naprzeciwko najkrótszego boku, zatem mniejszym kątem ostrym jest kąt o mierze α .

Wobec tego

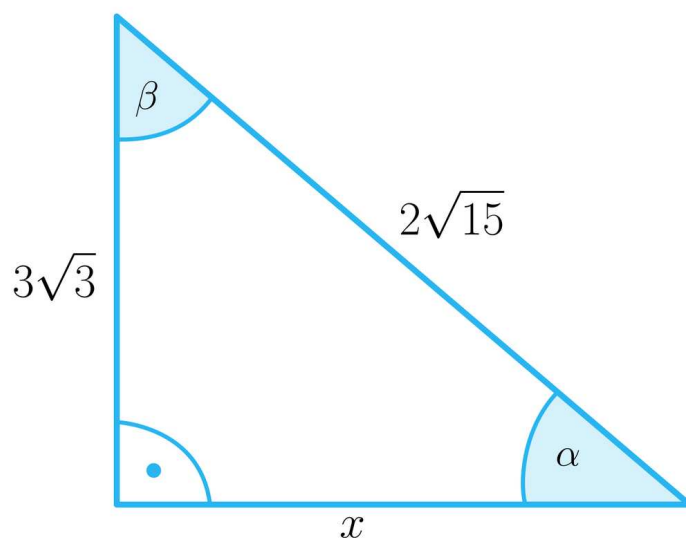
$$\cos \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia $\sqrt{3 - 2\cos^2 \alpha}$, jeżeli α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, leżącym przy dłuższej przyprostokątnej, wiedząc że krótsza przyprostokątna trójkąta ma długość $3\sqrt{3}$, a przeciwprostokątna ma długość $2\sqrt{15}$.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt prostokątny i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku:



Rozwiązanie:

Niech x oznacza długość dłuższej przyprostokątnej.

Wówczas, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zapisujemy i rozwiązujemy równanie:

$$x^2 + (3\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{15})^2.$$

Zatem $x^2 = 33$, czyli $x = \sqrt{33}$.

Dłuższa przyprostokątna ma długość $\sqrt{33}$, zatem kąt ostry leżący przy tym boku ma miarę α .

Wobec tego:

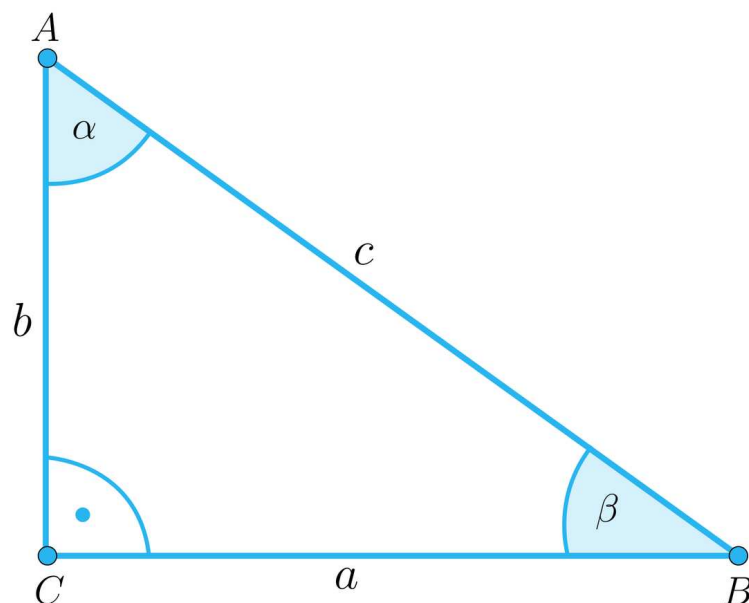
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{495}}{30}.$$

Wartość wyrażenia $\sqrt{3 - 2 \cos^2 \alpha}$ wynosi

$$\sqrt{3 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{495}}{30}\right)^2} = \sqrt{3 - 2 \cdot \frac{495}{900}} = \sqrt{\frac{171}{90}} = \frac{\sqrt{190}}{10}.$$

Przykład 4

Wyznamy długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 12, jeżeli wiadomo, że cosinus jednego kąta ostrego jest trzy razy większy od cosinusa drugiego kąta ostrego.



Z warunków zadania wynika, że $\cos \alpha = 3 \cos \beta$ oraz $c = 12$.

Z trójkąta prostokątnego z rysunku mamy, że $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ oraz $\cos \beta = \frac{a}{c}$.

Po podstawieniu do zależności $\cos \alpha = 3 \cos \beta$ mamy, że:

$$\frac{b}{c} = 3 \cdot \frac{a}{c}, \text{ czyli } b = 3a.$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy, że $c^2 = a^2 + (3a)^2$, więc $c = \sqrt{10}a$.

Otrzymujemy równanie $12 = \sqrt{10}a$, zatem $a = \frac{6\sqrt{10}}{5}$.

Zatem przyprostokątne mają długości:

$$a = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

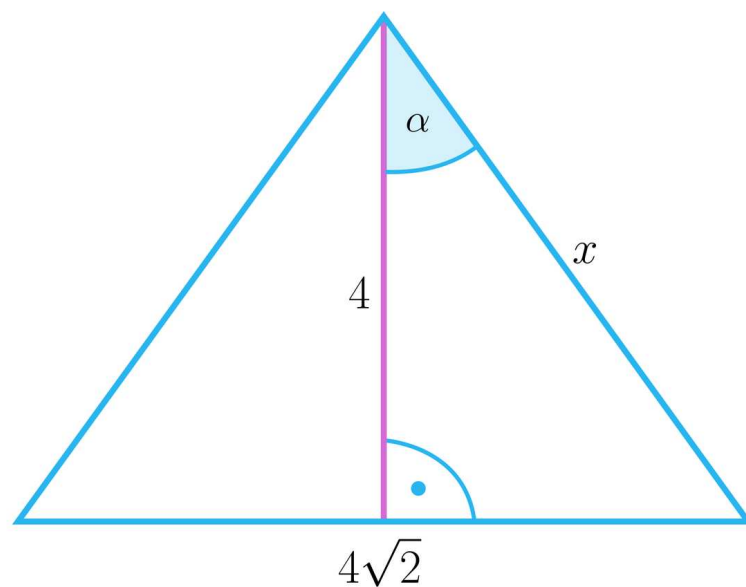
$$b = 3 \cdot \frac{6\sqrt{10}}{5} = \frac{18\sqrt{10}}{5}.$$

Przykład 5

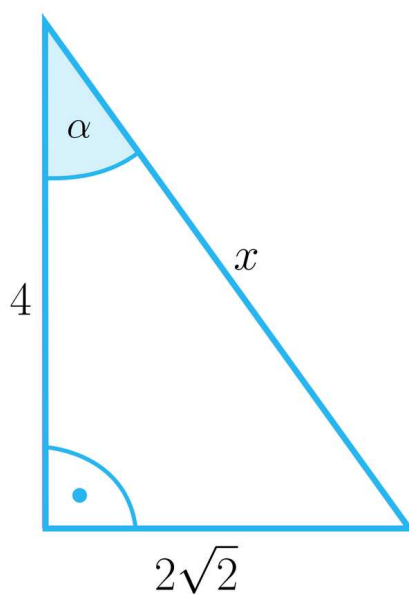
W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $4\sqrt{2}$, a wysokość opuszczona na tę podstawę ma długość 4. Obliczymy cosinus kąta pomiędzy wysokością tego trójkąta a ramieniem.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt równoramienny i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku:



Do wyznaczenia wartości $\cos \alpha$ rozpatrujemy trójkąt prostokątny:



Jeżeli przez x oznaczmy długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, to korzystając z twierdzenia Pitagorasa rozwiązujemy równanie:

$$(2\sqrt{2})^2 + 4^2 = x^2.$$

Zatem $x^2 = 24$, czyli $x = 2\sqrt{6}$.

Wobec tego

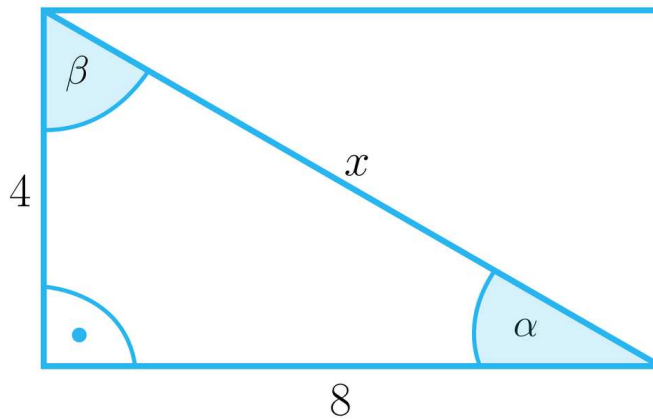
$$\cos \alpha = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Przykład 6

Dany jest prostokąt o bokach długości 4 i 8. Wyznamy cosinusy kątów, jakie tworzy przekątna tego prostokąta z jego bokami.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostokąt i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku:



Zauważmy, że przekątna prostokąta dzieli go na dwa przystające trójkąty prostokątne.

Jeżeli długość przekątnej prostokąta oznaczmy jako x , to korzystając z twierdzenia Pitagora rozwiązujemy równanie:

$$4^2 + 8^2 = x^2,$$

zatem

$$x^2 = 80$$

$$x = 4\sqrt{5}.$$

Wobec tego:

$$\cos \alpha = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \beta = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Słownik

cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

iloraz długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna ma długość 5, a druga jest o 1 krótsza od przeciwprostokątnej. Wyznacz cosinusy kątów ostrych w tym trójkącie.

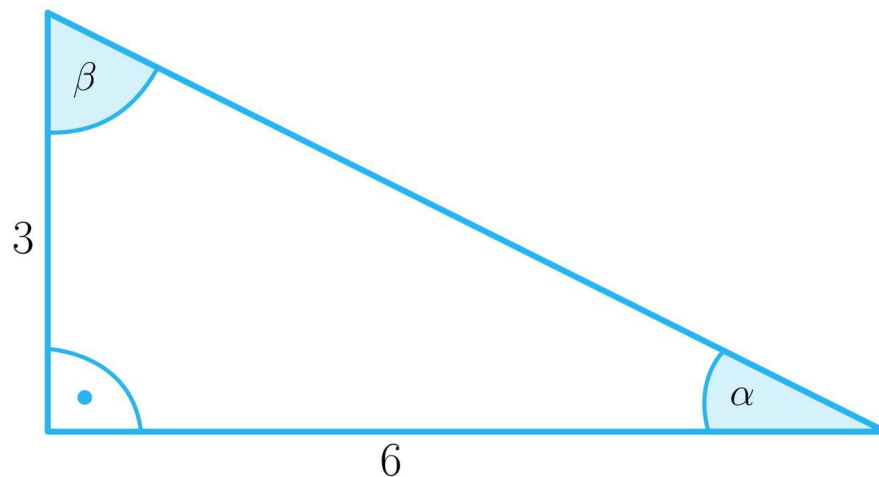
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest trójkąt prostokątny jak na rysunku poniżej.



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Suma cosinusów kątów ostrych w trójkącie z rysunku wynosi:

☐ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

☐ $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

☐ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 2



Połącz w pary długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego z wartościami cosinusów kątów ostrych α i β w tym trójkącie.

$$a = 1, b = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$a = 3, b = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$a = 2, b = 3$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$a = 2, b = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}, \cos \beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

Ćwiczenie 3



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości 4 i przeciwprostokątnej długości 10:

cosinus mniejszego kąta ostrego wynosi $\frac{1}{3}$

druga przyprostokątna ma długość $2\sqrt{21}$

Dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości 3 i przeciwprostokątnej długości 9:

druga przyprostokątna ma długość $6\sqrt{2}$

cosinus większego kąta ostrego wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

cosinus większego kąta ostrego wynosi $\frac{\sqrt{21}}{5}$

cosinus mniejszego kąta ostrego wynosi $\frac{2}{5}$

Ćwiczenie 4



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 2 i 5, to iloczyn cosinusów kątów ostrych tego trójkąta wynosi .

Jeżeli przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 1 i 4, to suma cosinusów kątów ostrych w tym trójkącie wynosi .

Jeżeli przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 i 5, to iloczyn cosinusów kątów ostrych w tym trójkącie wynosi .

$$\frac{10\sqrt{29}}{29}$$

$$\frac{3\sqrt{34}}{34}$$

$$\frac{5\sqrt{17}}{17}$$

$$\frac{10\sqrt{29}}{29}$$

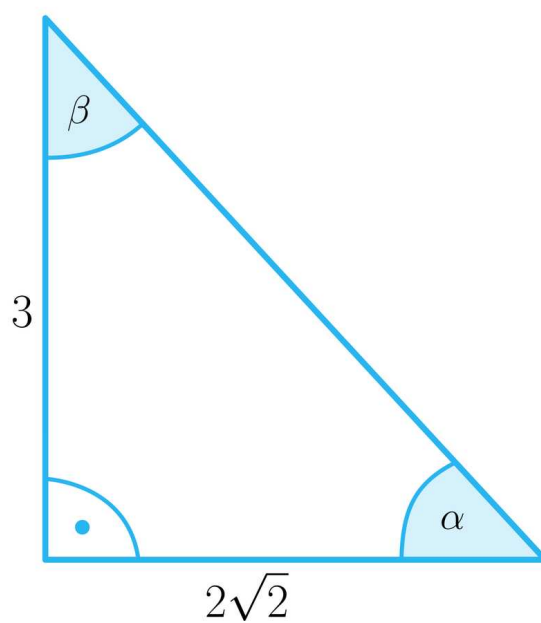
$$\frac{15}{34}$$

$$\frac{10}{29}$$

Ćwiczenie 5



Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β .



Uporządkuj podane wielkości w kolejności rosnącej.

$$\cos \beta$$



$$\cos \alpha$$



$$\cos \alpha + \cos \beta$$

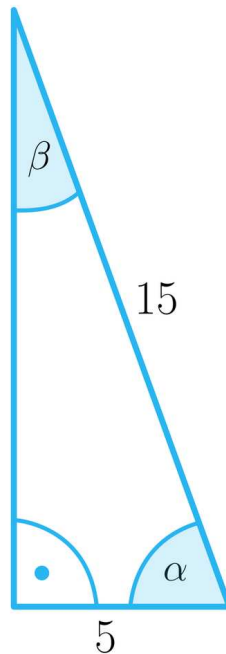


$$\cos \alpha \cdot \cos \beta$$



Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β . Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.



☐ Wartość $\cos \beta$ wynosi $\frac{1}{3}$.

☐ Iloczyn cosinusów kątów ostrych w tym trójkącie wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

☐ Dłuższa przyprostokątna ma długość $10\sqrt{2}$.

☐ Dłuższa przyprostokątna ma długość $5\sqrt{10}$.

Ćwiczenie 7



W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 3 dłuższa od drugiej, a stosunek ich długości wynosi $\frac{7}{4}$. Wyznacz cosinusy kątów ostrych w tym trójkącie.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że suma cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest zawsze większa od 1.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym;
- oblicza wartości funkcji cosinus kątów ostrych w trójkącie prostokątnym;
- stosuje definicję funkcji cosinus do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;

- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Prezentacja multimedialna”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum.
5. Uczniowie rozwiązują zadania indywidualnie wykonując ćwiczenia nr 6, 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym”).

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Prezentacja multimedialna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązywać zadania dotyczące wyznaczania wartości cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.