Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do rozwiązywania równań

Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Na poprzednich lekcjach zapoznałeś się z sześcioma wzorami pozwalającymi obliczać sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów. Wzory te są podstawą do wyznaczania bardzo wielu kolejnych wzorów ważnych w trygonometrii. Na tej lekcji pokażemy, jak poznane wzory stosować do rozwiązywania równań trygonometrycznych. Będziemy się opierać także na twierdzeniach opisujących rozwiązywanie równań postaci: $\sin x = a, \ \cos x = a, \ \operatorname{tg} x = a$.

Twoje cele

- Nauczysz się stosować wzory na sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów do rozwiązywania równań trygonometrycznych.
- Przypomnisz sobie, jak rozwiązujemy równania typu: $\sin x = a, \ \cos x = a, \ \operatorname{tg} x = a$.

Przeczytaj

Każde równanie trygonometryczne staramy się sprowadzić do równania postaci: $\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a$. Zatem przypomnimy podstawowe twierdzenie o rozwiązywaniu równań trygonometrycznych.

Twierdzenie: o rozwiązywaniu równań trygonometrycznych

1. Jeżeli $a \in \langle -1, 1 \rangle$ i x_0 jest jednym z rozwiązań równania $\sin x = a$, to każde rozwiązanie tego równania ma postać: $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
2. Jeżeli $a \in \langle -1, 1 \rangle$ i x_0 jest jednym z rozwiązań równania $\cos x = a$, to każde rozwiązanie tego równania ma postać: $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
3. Jeżeli $a \in \mathbb{R}$ i x_0 jest jednym z rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = a$, to każde rozwiązanie ma postać: $x = x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zaprezentujemy teraz przykłady, pokazujące jak za pomocą wzorów na funkcje trygonometryczne sumy lub różnicy argumentów sprowadzić równanie do postaci: $\sin x = a$ lub $\cos x = a$ lub $\operatorname{tg} x = a$, a następnie w tej postaci je rozwiązać.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \sqrt{3}.$$

Rozwiązanie:

Zapiszmy na początek założenia:

$$1- \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq 0,$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0,$$

$$\cos\frac{x}{2} \neq 0.$$

Założeń nie będziemy teraz rozwiązywać. Gdy otrzymamy rozwiązanie wyjściowego równania sprawdzimy, czy spełniają wszystkie założenia.

Skorzystamy ze wzoru na tangens sumy argumentów:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Zauważamy, że $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, zatem korzystając z twierdzenia o rozwiązywaniu równań trygonometrycznych otrzymujemy:

$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k.$

Sprawdzamy założenia i podajemy rozwiązanie:

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Skorzystajmy ze wzoru na sinus sumy argumentów x i $2x$ i zapiszmy równanie w postaci:

$\sin(2x + x) = -\frac{1}{2}$

$\sin 3x = -\frac{1}{2}$

Podstawmy $y = 3x$. Otrzymujemy wówczas równanie:

$\sin y = -\frac{1}{2}$.

Znajdujemy jedno rozwiązanie tego równania: $y_0 = -\frac{\pi}{6}$.

Korzystając z twierdzenia o rozwiązywaniu równań trygonometrycznych otrzymujemy rozwiązania równania $\sin y = -\frac{1}{2}$:

$y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $y = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Powracamy do zmiennej x i otrzymujemy:

$3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

A zatem rozwiązaniami równania $\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = -\frac{1}{2}$ są:

$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie: $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) - 2\sin\frac{\pi}{7} \cdot \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{7} - x\right) + 2\cos\frac{\pi}{7} \cdot \sin x} = \sqrt{3}$.

Zaczniemy od zapisu dziedziny:

$\sin\left(\frac{\pi}{7} - x\right) + 2\cos\frac{\pi}{7} \cdot \sin x \neq 0.$

Rozpiszemy równanie wykorzystując wzory na cosinus i sinus różnicy argumentów:

$\frac{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin x-2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin x}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin x+2\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin x}=\sqrt{3}.$

Po wykonaniu działań otrzymujemy:

$\frac{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin x}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{7}}=\sqrt{3}.$

Teraz wykorzystamy wzory na cosinus i sinus sumy argumentów, aby zwinąć wyrażenia w liczniku i mianowniku do nowej postaci:

$\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)}=\sqrt{3}.$

Zauważmy, że równanie możemy zapisać jako:

$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)}=\sqrt{3}$, czyli $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zatem rozwiązaniami są:

$x+\frac{\pi}{7}=\frac{\pi}{6}+\pi k$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Po sprawdzeniu warunku z dziedziny otrzymujemy ostatecznie:

$x=\frac{\pi}{42}+\pi k$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1.$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na sinus różnicy argumentów oraz cosinus sumy argumentów rozpiszmy lewą stronę równania:

$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x=1.$

Wyznaczając wartości funkcji trygonometrycznych dla znanych argumentów dostajemy równanie:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=1$

$\sqrt{2}(\cos x-\sin x)=1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{1}{2}.$

Liczby $\frac{\sqrt{2}}{2}$ zapisujemy za pomocą funkcji trygonometrycznych:

$\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{2}$.

Teraz możemy wykorzystać wzór na cosinus sumy argumentów, aby lewą stronę zwinąć do postaci:

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Rozwiązaniami równania są:

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ lub $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ostatecznie rozwiązania przyjmują postać:

$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$ lub $x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Słownik

twierdzenie o rozwiązywaniu równań trygonometrycznych

1. Jeżeli $a \in \langle -1, 1\rangle$ i x_0 jest jednym z rozwiązań równania $\sin x = a$, to każde rozwiązanie tego równania ma postać: $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
2. Jeżeli $a \in \langle -1, 1\rangle$ i x_0 jest jednym z rozwiązań równania $\cos x = a$, to każde rozwiązanie tego równania ma postać: $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
3. Jeżeli $a \in \mathbb{R}$ i x_0 jest jednym z rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = a$, to każde rozwiązanie tego równania ma postać: $x = x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie zrób polecenia podane niżej.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie: $\cos 7x + \cos 9x = 0$.

Polecenie 3

Rozwiąż równanie: $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wszystkimi rozwiązaniami równania $\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 1$ są:

- $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $x = \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $x = \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ćwiczenie 2

Wskaż wszystkie równania, które mają taki sam zbiór rozwiązań jak równanie: $\sin 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x \cdot \sin 2x = \frac{3}{4}$.

- $\sin 5x \cdot \cos 6x + \cos 5x \cdot \sin 6x = -\frac{3}{4}$
- $\sin 6x \cdot \cos 3x - \cos 6x \cdot \sin 3x = \frac{3}{4}$
- $4 \sin 5x \cdot \cos 6x + 4 \cos 5x \cdot \sin 6x = 3$
- $4 \sin 7x \cdot \cos 4x - 4 \cos 7x \cdot \sin 4x = 3$

Ćwiczenie 3

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wszystkimi rozwiązaniami równania $\cos x = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ są liczby:

- $2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{3k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ćwiczenie 4

Spośród podanych rozwiązań równania wybierz jedno i wstaw w lukę w tekście.

Wszystkimi rozwiązaniami równania $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \sqrt{3}$ są liczby ______, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ | $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ | $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ | $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Ćwiczenie 5

Każdemu równaniu przypisujemy najmniejsze rozwiązanie dodatnie. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

- $\sin 11x \cdot \cos 9x - \cos 11x \cdot \sin 9x = 1$
- $\cos 11x \cdot \cos 10x - \sin 11x \cdot \sin 10x = 1$
- $\sin 2x \cdot \cos 3x + \cos 2x \cdot \sin 3x = 1$
- $\cos 11x \cdot \cos 2x + \sin 11x \cdot \sin 2x = 1$

Ćwiczenie 6

Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. Jeżeli x_0 jest rozwiązaniem równania $5\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=7\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, to

- $\operatorname{tg} x_0 = 12\sqrt{3}$.
- $\operatorname{tg} x_0 = 6\sqrt{3}$.
- $\operatorname{tg} x_0 = -12\sqrt{3}$.
- $\operatorname{tg} x_0 = -6\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 7

Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x = 1$ przy założeniu, że $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x \neq 1$.

Ćwiczenie 8

Rozwiąż równanie: $\sin 3x = 2\sin x \cos 2x$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do rozwiązywania równań

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania typu: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.
- stosuje wzory na sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów do rozwiązywania równań trygonometrycznych.
- analizuje równania trygonometryczne, rozpatruje przypadki rozwiązań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- analiza materiału źródłowego (porównawcza);
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do rozwiązywania równań” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Zastosowanie wzoru na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów do rozwiązywania równań”.