



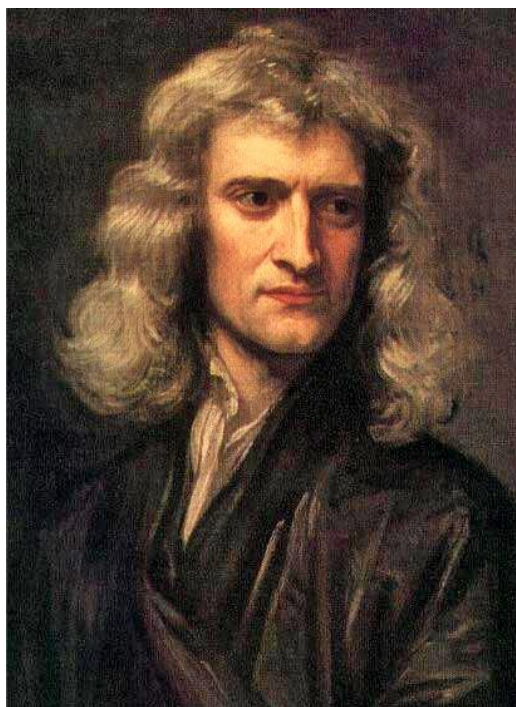
Symbol Newtona

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Carlos Irineu da Costa, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Tematem tego materiału jest wyrażenie, zwane symbolem Newtona i jego zastosowanie.



Isaac Newton

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

Na pewno postać Isaaca Newtona, siedemnastowiecznego angielskiego fizyka, matematyka, astronoma, filozofa i alchemika, kojarzy ci się z trzema zasadami dynamiki i prawem powszechnego ciążenia. Ale czy wiesz, że Newton podobno był bardzo drobiazgowy? W dzieciństwie nosił ze sobą notes, w którym zapisywał między innymi złe uczynki, które popełnił. Na przykład kradzież wiśni z ogrodu sąsiada, czy pieczenie ciasta w niedzielę.

Newton w trakcie swojego życia miał się różnych zajęć. Wykładał optykę, był członkiem parlamentu. Jako nadzorca mennicy otrzymał zadanie przetopienia i ponownego wybicia srebrnych monet,

zorientował się, że są one fałszowane (czyli ich masa została zmniejszona). Przeprowadził śledztwo i doprowadził do ukarania fałszerzy.

Twoje cele

- Obliczysz wartość symbolu Newtona.
- Udowodnisz niektóre własności symbolu Newtona.

Przeczytaj

Pojęcie silni – przypomnienie

Niech n będzie liczbą naturalną.

Przypomnijmy, że symbol $n!$ (czytamy: n silnia) to:

- 1, gdy $n = 0$ lub $n = 1$
- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$, gdy $n \geq 2$

Przykład 1

Możemy zapisać:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n$$

Symbol Newtona

Definicja: Symbol Newtona

Symbolem Newtona (współczynnikiem dwumianowym Newtona) nazywamy liczbę $\binom{n}{k}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$.

Zapis $\binom{n}{k}$ czytamy: n po k lub n nad k .

Symbol Newtona wyraża się wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Symbol Newtona można też wyrazić **wzorem rekurencyjnym**:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \text{ lub } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{dla } 0 < k < n \end{cases}$$

Przykład 2

Możemy zapisać:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

Przykład 3

Możemy zapisać:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4! \cdot 3!} = \frac{210}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$\binom{10}{9} = \frac{10!}{9! \cdot (10-9)!} = \frac{9! \cdot 10}{9! \cdot 1!} = 10$$

Symbol Newtona można też obliczyć z „uproszczonego” wzoru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \text{ gdy } 0 < k < n$$

Przykład 4

Korzystając z „uproszczonego” wzoru na symbol Newtona obliczymy $\binom{8}{3}$ i $\binom{10}{7}$.

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 120$$

Własności symbolu Newtona

Poznamy teraz kilka podstawowych twierdzeń związanych z symbolem Newtona.

Twierdzenie: Własność 1 symbolu Newtona

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leq k \leq n$ spełniona jest równość:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dowód

Zauważmy, że $k = n - (n - k)$. Zatem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Przykład 5

Korzystając z powyższego twierdzenia możemy zapisać:

$$\binom{10}{2} = \binom{10}{10-2} = \binom{10}{8}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2}$$

$$\binom{n}{7} = \binom{n}{n-7}, \text{ gdy } n \geq 7$$

Twierdzenie: Własność 2 symbolu Newtona

Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ i każdej liczby naturalnej k takiej, że $1 \leq k \leq n$ spełniona jest równość:

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Dowód

Oznaczmy przez L – lewą stronę dowodzonej równości, przez P – prawą stronę równości.

Korzystamy z definicji symbolu Newtona.

$$L = k \cdot \binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Przekształcamy odpowiednio zapisaną równość.

$$L = \frac{k \cdot (n-1)! \cdot n}{k! \cdot ((n-1)-(k-1))!} = \frac{n \cdot k}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!}$$

Korzystamy z tego, że $\frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$ i skracamy przez k .

$$L = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$L = P$$

Przykład 6

Korzystając z powyższego twierdzenia, obliczymy $4 \binom{6}{4}$ oraz $5 \binom{10}{5}$.

$$4 \binom{6}{4} = 6 \binom{6-1}{4-1} = 6 \binom{5}{3} = 6 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 6 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 60$$

$$5 \binom{10}{5} = 10 \binom{9}{4} = 10 \cdot \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = 1260$$

Twierdzenie: Własność 3 symbolu Newtona

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leq k \leq n$ zachodzi równość:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dowód

Oznaczmy przez L – lewą stronę dowodzonej równości, przez P – prawą stronę równości.

$$L = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}$$

Rozszerzamy pierwszy składnik przez $k+1$, a drugi przez $n-k$, aby w konsekwencji uzyskać wspólny mianownik ułamków.

$$L = \frac{n! \cdot (k+1)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)}$$

Wykorzystujemy własności silni.

$$L = \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

Dodajemy ułamki.

$$L = \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

Wyłączamy $n!$ przed nawias i korzystamy z własności silni.

$$L = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

$$L = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$L = P$$

Przykład 7

Korzystając z powyższego twierdzenia, można zapisać:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$$

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} = \binom{11}{3}$$

$$\binom{n}{6} + \binom{n}{7} = \binom{n+1}{7}$$

Związek symbolu Newtona z trójkątem Pascala

Zauważmy, że kolejnym wyrazom trójkąta Pascala można przyporządkować odpowiednie symbole Newtona. W trójkącie Pascala każdy wyraz (poza skrajnym) jest sumą dwu wyrazów stojących bezpośrednio nad nim.

Schemat ten odpowiada zależności

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

zapisanej we wzorze rekurencyjnym.

0																		$\binom{0}{0}$
1																		$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
2																		$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
3																		$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
4																		$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
5																		$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Wiemy już, że suma wyrazów w n -tym wierszu trójkąta Pascala jest równa 2^n .

Wynika stąd ważna własność symbolu Newtona:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Przykład 8

Rozwiążemy równanie

$$4 \cdot \left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \right] = 8^x$$

Przekształcając lewą stronę równania, skorzystamy ze wzoru na sumę kolejnych symboli Newtona.

$$4 \cdot 2^5 = 8^x$$

Liczby 4 i 8 zapisujemy jako potęgi liczby 2.

$$2^2 \cdot 2^5 = 2^{3x}$$

$$2^7 = 2^{3x}$$

Porównujemy wykładniki potęg o tych samych podstawach.

$$7 = 3x$$

$$x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba $2\frac{1}{3}$.

Słownik

symbol Newtona

to liczba $\binom{n}{k}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Staraj się najpierw samodzielnie rozwiązać prezentowane tam problemy, a następnie porównaj z przedstawionym materiałem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DWL9KgJRe>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej symbolu Newtona.

Polecenie 2

Wykaż, że $\binom{k+n}{k+1} - \binom{k+n-1}{k+1} = \binom{k+n-1}{k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ i $0 < k < n$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Liczba $M = \binom{10}{10} - \binom{10}{1} + 2 \cdot \binom{10}{8} - \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ jest równa:

☐ 78

☐ 57

☐ 87

☐ 96

Ćwiczenie 2



Określ, które równości są prawdziwe dla liczb naturalnych $n > 1$, $k > 1$ i $k \leq n$.

☐ $\binom{k+1}{n} = \frac{k+1}{n} \cdot \binom{k}{n-1}$

☐ $k \binom{n}{k} = (n-k+1) \cdot \binom{n}{k-1}$

☐ $\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k} \cdot \binom{n}{k-1}$

☐ $k \binom{n-1}{k-1} = n \binom{n}{k}$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij obliczenia, korzystając ze wzoru $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \boxed{} = \boxed{} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} = 3 + \boxed{} + 4 = \boxed{}$$

$$\boxed{3} \quad \boxed{10} \quad \boxed{\binom{3}{2}} \quad \boxed{\binom{3}{1}} \quad \boxed{\binom{4}{1}} \quad \boxed{8} \quad \boxed{\binom{4}{2}} \quad \boxed{4}$$

Ćwiczenie 4



Rozwiąż równanie i wpisz odpowiednią liczbę.

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{4} = 0, n = \boxed{}$$

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{3} = 0, n = \boxed{}$$

$$4\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} = 0, n = \boxed{}$$

$$\binom{n}{n-2} = n, n = \boxed{}$$

Ćwiczenie 5



Ustaw w odpowiedniej kolejności obliczenie współczynnika $W = \binom{7}{4}$ za pomocą wzoru

$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$, gdzie n, k to liczby naturalne takie, że $n > 1, 2 \leq k < n$.

$$W = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1}$$



$$W = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \binom{4}{1}$$



$$W = \binom{7}{4} = \frac{7}{4} \cdot \binom{6}{3}$$



$$W = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \binom{3}{0}$$



$$W = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \binom{5}{2}$$



$$W = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot 1$$



$$W = \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} = 35$$



Ćwiczenie 6



Liczba n jest liczbą naturalną większą od 2 i k jest liczbą naturalną mniejszą od 20. Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie liczby.

Wiadomo, że $\binom{n+1}{2} - 20 = 1$ wtedy liczba n jest równa .

Jeśli $n \cdot (n+1) \cdot (n+1) = 180$ to liczba $\binom{n+1}{2}^2$ jest równa .

Jeśli $\binom{20}{20-n} = \text{}$ to $\binom{20}{n} = 190$.

Liczby postaci $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ zwane są liczbami Catalana. Zatem $C_6 - C_5 =$.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wykaż, że $\frac{1}{4} \cdot \binom{2n+2}{3} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Symbol Newtona

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartość symbolu Newtona
- udowadnia niektóre własności symbolu Newtona

- dobiera odpowiedni sposób do rozwiązania problemu teoretycznego
- stosuje zdobytą wiedzę w zadaniach nietypowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- biały kruk
- loteria

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel rozpoczyna zajęcia od przytoczeniu kilku ciekawostek z życia Newtona, może też zaprezentować krótką prezentację przybliżającą tę postać.
2. Następnie informuje uczniów, że znalazł niezwykle rękopis („biały kruk”), w którym opisane są nieznane dotąd symbole. Rękopis trudno było odcyfrować, zatem przepisał wiadomości w nim zawarte, uwspółcześniając je. I przekazuje je uczniom w wersji elektronicznej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z treścią „białego kruka” – czyli z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
2. Każda grupa przygotowuje przy tym 2 zadania, wykorzystujące uzyskane wiadomości.
3. Zadania zapisane na kartkach wrzucają do pudła, przygotowanego wcześniej przez nauczyciela.
4. Teraz przedstawiciel każdej z grup losuje jedno zadanie i rozwiązuje je na tablicy. Przy czym w przypadku wątpliwości uczeń może zwrócić się dwukrotnie z prośbą o pomoc do swojej grupy.
5. Jeśli zadanie zostanie dobrze rozwiązane – grupa otrzymuje „plusy” lub jest nagradzana w inny sposób.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wspólnie formułują temat lekcji i cele, które ich zdaniem osiągnęli.
2. Uczniowie indywidualnie rozwiązują dowolne 2 spośród proponowanych ćwiczeń.
3. Dyskusja – w rozwiązaniu jakiego typu problemów (nie tylko matematycznych) można wykorzystać symbol Newtona.
4. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, wskazując na ważne elementy zajęć, komentuje też trudności i problemy, z którymi borykali się uczniowie rozwiązując zadania. Dokonuje samooceny i oceny koleżeńskej pracy pozostałych uczniów.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Podzbiory zbioru skończonego (treść rozszerzona)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako wprowadzenie do kombinatoryki.