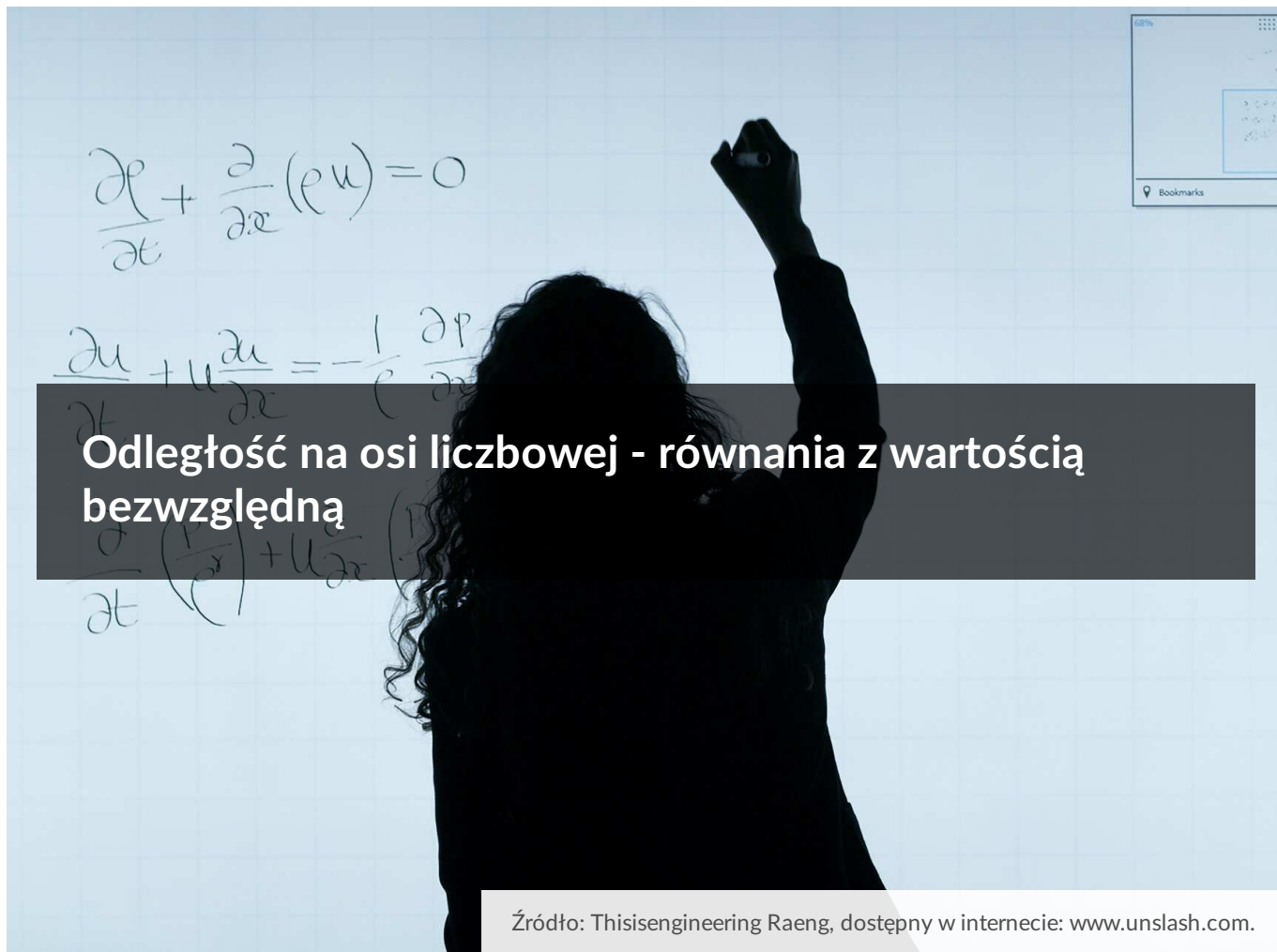




Odległość na osi liczbowej - równania z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W tym materiale pokażemy m.in. jak rozwiązywać zadania dotyczące wyznaczania takich liczb na osi liczbowej, które są położone w szczególny sposób względem pewnych dwóch ustalonych liczb.

Zaprezentujemy również sposób zapisu powyższego problemu, który sprowadzi się do zapisania równania z wartością bezwzględną.

Równania tego typu będziemy rozwiązywać odwołując się do definicji i własności wartości bezwzględnej, stosując też **nierówność trójkąta**.

Twoje cele

- Rozwiążesz złożone zadania dotyczące odległości liczb na osi liczbowej.
- Wykorzystasz definicję wartości bezwzględnej do rozwiązania równania z jedną niewiadomą.
- Zastosujesz nierówność trójkąta do rozwiązywania równań z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Przykład 1

Wyznamy wszystkie liczby rzeczywiste x , których odległość na **osi liczbowej** od liczby (-1) jest 2 razy większa niż odległość od liczby 5.

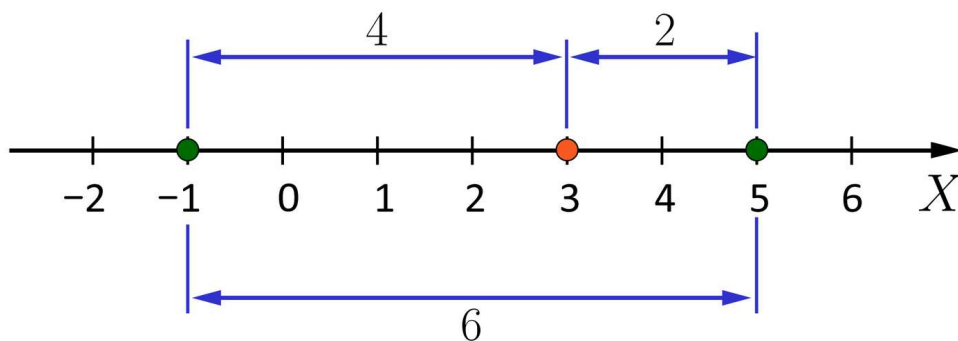
Rozwiązanie

Obliczamy, że odległość między liczbami (-1) oraz 5 jest równa $|-1 - 5| = |-6| = 6$.

Następnie dzielimy **oś liczbową** na trzy przedziały:
 $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 5 \rangle$ oraz $\langle 5, +\infty)$.

Zauważamy, że dla dowolnej liczby x z przedziału $(-\infty, -1)$ odległość od liczby (-1) jest mniejsza niż odległość od liczby 5, zatem w tym przedziale nie ma liczb spełniających zadany warunek.

W przedziale $\langle -1, 5 \rangle$ mamy znaleźć taką liczbę x , której odległość od lewego krańca tego przedziału jest 2 razy większa niż odległość od prawego krańca. Dzielimy więc długość tego przedziału (czyli liczbę 6) w stosunku 2 : 1 i dostajemy, że warunki zadania spełnia $x = 3$.



Powyższe rozwiązanie ma następującą interpretację algebraiczną.

Dla $x \in \langle -1, 5 \rangle$ odległość x od (-1) jest równa $x - (-1) = x + 1$, a odległość x od 5 jest równa $5 - x$.

W tym przedziale szukamy więc liczby x , która spełnia równanie $x + 1 = 2(5 - x)$.

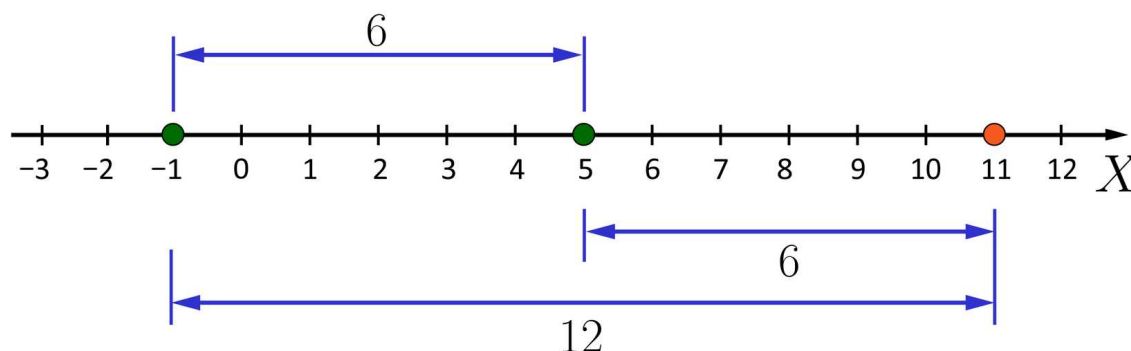
Przekształcamy otrzymane równanie do postaci $x + 2x = 10 - 1$, skąd $3x = 9$, czyli $x = 3 \in \langle -1, 5 \rangle$.

Zatem jedynym rozwiązaniem jest w tym przypadku liczba 3.

W przedziale $\langle 5, +\infty)$ mamy znaleźć taką liczbę x , której odległość od lewego krańca tego przedziału jest 2 razy mniejsza niż odległość od (-1) . Wynika stąd, że liczba 5 jest

środkiem odcinka o końcach (-1) oraz 5 , gdzie $x > 5$.

Wobec tego $x - 5 = 5 - (-1)$, skąd $x = 11$.



Interpretacja algebraiczna powyższego fragmentu rozwiązania jest następująca.

Dla $x \in \langle 5, +\infty)$ odległość x od (-1) jest równa $x - (-1) = x + 1$, a odległość x od 5 jest równa $x - 5$. W tym przedziale szukamy więc liczby x , która spełnia równanie $x + 1 = 2(x - 5)$. Przekształcamy otrzymane równanie do postaci $2x - x = 1 + 10$, skąd $x = 11 \in \langle 5, +\infty)$.

Zatem jedynym rozwiązaniem jest w tym przypadku liczba 11.

Oznacza to, że są dwie liczby: 3 oraz 11, których odległość od (-1) na **osi liczbowej** jest 2 razy większa niż odległość od 5.

Uwaga. Warunek podany w treści zadania można sformułować następująco.

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , które są rozwiązaniem równania

$$|x + 1| = 2|x - 5|.$$

Przedstawimy poniżej dwa algebraiczne sposoby rozwiązania tego równania.

Sposób I:

Korzystając z definicji **wartości bezwzględnej**, otrzymujemy:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{dla } x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{dla } x < -1 \end{cases}$$

oraz

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{dla } x \geq 5 \\ -x + 5, & \text{dla } x < 5 \end{cases}$$

Zatem rozpatrujemy trzy następujące przypadki:

(1) $x \in (-\infty, -1)$; wtedy $|x + 1| = -x - 1$ oraz $|x - 5| = -x + 5$,

(2) $x \in \langle -1, 5)$; wtedy $|x + 1| = x + 1$ oraz $|x - 5| = -x + 5$,

(3) $x \in \langle 5, +\infty)$; wtedy $|x + 1| = x + 1$ oraz $|x - 5| = x - 5$.

Wobec tego:

- w przypadku (1) otrzymujemy równanie
 $-x - 1 = 2(-x + 5)$,
 skąd $-x + 2x = 10 + 1$,
 czyli $x = 11$.
 Jednakże $11 \notin (-\infty, -1)$, więc w tym przypadku dane równanie nie ma rozwiązań.
- w przypadku (2) otrzymujemy równanie
 $x + 1 = 2(-x + 5)$,
 skąd $x + 2x = 10 - 1$,
 $3x = 9$,
 czyli $x = 3$.
 Ponieważ $3 \in \langle -1, 5 \rangle$, więc dane równanie ma rozwiązanie $x = 3$.
- w przypadku (3) otrzymujemy równanie
 $x + 1 = 2(x - 5)$,
 skąd $1 + 10 = 2x - x$,
 czyli $x = 11$.
 Ponieważ $11 \in \langle 5, +\infty \rangle$, więc dane równanie ma rozwiązanie $x = 11$.

Oznacza to, że równanie $|x + 1| = 2|x - 5|$ ma dwa rozwiązania: $x = 3$ oraz $x = 11$.

Sposób II:

Ponieważ obie strony równania

$$|x + 1| = 2|x - 5|$$

są nieujemne, więc to równanie można zapisać w następującej postaci równoważnej

$$|x + 1|^2 = (2|x - 5|)^2.$$

Otrzymane równanie dalej przekształcamy równoważnie (korzystając m.in. z własności [wartości bezwzględnej](#) oraz ze wzorów skróconego mnożenia).

$$(x + 1)^2 = 2^2 \cdot (x - 5)^2$$

$$(x + 1)^2 = (2(x - 5))^2$$

$$(x + 1)^2 = (2x - 10)^2$$

$$(2x - 10)^2 - (x + 1)^2 = 0$$

$$((2x - 10) - (x + 1)) \cdot ((2x - 10) + (x + 1)) = 0$$

$$(2x - 10 - x - 1) \cdot (2x - 10 + x + 1) = 0$$

$$(x - 11) \cdot (3x - 9) = 0.$$

Stąd $x - 11 = 0$ lub $3x - 9 = 0$, czyli $x = 11$ lub $x = 3$.

Oznacza to, że równanie $|x + 1| = 2|x - 5|$ ma dwa rozwiązania: $x = 3$ i $x = 11$.

Przykład 2

a) Wyznamy na [osi liczbowej](#) wszystkie liczby rzeczywiste x , których suma odległości od liczb (-5) oraz 2 jest równa 8 .

Rozwiązanie

Obliczamy, że odległość między liczbami (-5) oraz 2 jest równa $|-5 - 2| = |-7| = 7$.

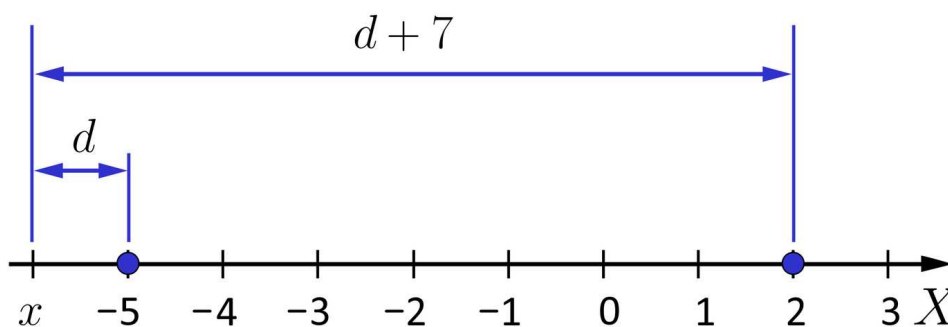
Następnie dzielimy **oś liczbową** na trzy przedziały:

$(-\infty, -5)$, $\langle -5, 2 \rangle$ oraz $\langle 2, +\infty \rangle$.

Zauważamy, że dla dowolnej liczby x z przedziału $\langle -5, 2 \rangle$ suma odległości od krańców tego przedziału jest równa 7 , a więc jest mniejsza niż 8 . Zatem w tym przedziale nie ma liczb spełniających zadany warunek.

W przedziale $(-\infty, -5)$ mamy znaleźć taką liczbę x , której suma odległości od prawego krańca tego przedziału oraz od 2 jest równa 8 .

Jeżeli odległość x od (-5) oznaczmy przez d , to odległość od 2 jest równa $d + 7$.



Stąd liczba dodatnia d jest rozwiązaniem równania $d + d + 7 = 8$, skąd $2d + 7 = 8$, $2d = 1$, czyli $d = \frac{1}{2}$. Oznacza to, że $x = -5 - \frac{1}{2} = -5\frac{1}{2}$.

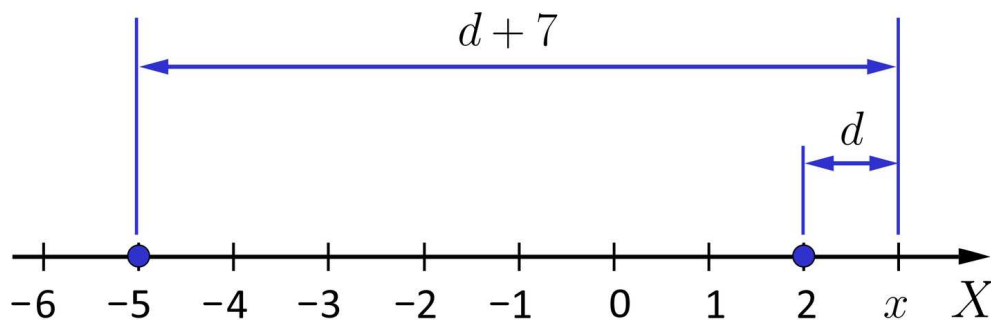
Interpretacja algebraiczna powyższego fragmentu rozwiązania jest następująca: dla $x \in (-\infty, -5)$ odległość x od (-5) jest równa $-5 - x$ (powyżej oznaczyliśmy tę odległość przez d), a odległość x od 2 jest równa $2 - x$.

W tym przedziale szukamy więc liczby x , która spełnia równanie $-5 - x + 2 - x = 8$. Przekształcamy otrzymane równanie do postaci $-5 + 2 - 8 = 2x$, skąd $2x = -11$, czyli $x = -\frac{11}{2} = -5\frac{1}{2}$.

Zatem jedynym rozwiązaniem jest w tym przypadku liczba $-5\frac{1}{2}$.

W przedziale $\langle 2, +\infty \rangle$ mamy znaleźć taką liczbę x , której suma odległości od lewego krańca tego przedziału oraz od (-5) jest równa 8 .

Jeżeli tym razem przez d oznaczmy odległość x od 2 , to odległość x od (-5) jest równa $d + 7$. Stąd – dokładnie tak samo, jak poprzednio – liczba dodatnia d jest rozwiązaniem równania $d + d + 7 = 8$. Wobec tego $d = \frac{1}{2}$. Oznacza to, że $x = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$.



Interpretacja algebraiczna powyższego fragmentu rozwiązania jest następująca: dla $\langle 2, +\infty \rangle$ odległość x od 2 jest równa $x - 2$, a odległość x od (-5) jest równa $x - (-5) = x + 5$. W tym przedziale szukamy więc liczby x , która spełnia równanie $x - 2 + x + 5 = 8$, skąd $2x = 5$, czyli $x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.
Zatem jedynym rozwiązaniem jest w tym przypadku liczba $2\frac{1}{2}$.

Oznacza to, że są dwie liczby: $2\frac{1}{2}$ oraz $-5\frac{1}{2}$, których suma odległości na **osi liczbowej** od (-5) jest równa 8.

Uwaga. Warunek podany w treści zadania można sformułować następująco.
Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , które są rozwiązaniem równania $|x + 5| + |x - 2| = 8$.

Korzystając z definicji **wartości bezwzględnej** otrzymujemy:

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{dla } x \geq -5 \\ -x - 5, & \text{dla } x < -5 \end{cases}$$

oraz

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{dla } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

Zatem rozpatrujemy trzy następujące przypadki:

- (1) $x \in (-\infty, -5)$; wtedy $|x + 5| = -x - 5$ oraz $|x - 2| = -x + 2$,
- (2) $x \in \langle -5, 2 \rangle$; wtedy $|x + 5| = x + 5$ oraz $|x - 2| = -x + 2$,
- (3) $x \in \langle 2, +\infty \rangle$; wtedy $|x + 5| = x + 5$ oraz $|x - 2| = x - 2$.

Wobec tego:

- w przypadku (1) otrzymujemy równanie $-x - 5 + (-x + 2) = 8$,
skąd $-x - 5 - x + 2 = 8$, $-2x = 11$,
czyli $x = -\frac{11}{2} = -5\frac{1}{2}$.
Ponieważ $-5\frac{1}{2} \in (-\infty, -5)$, więc dane równanie ma rozwiązanie $x = -5\frac{1}{2}$.
- w przypadku (2) otrzymujemy równanie $x + 5 + (-x + 2) = 8$,

$$\text{skąd } x + 5 - x + 2 = 8,$$

$$\text{czyli } 7 = 8.$$

Otrzymana równość jest sprzeczna, więc w tym przypadku równanie nie ma rozwiązań.

- w przypadku (3) otrzymujemy równanie

$$x + 5 + x - 2 = 8,$$

$$\text{skąd } 2x = 8 - 5 + 2, 2x = 5$$

$$\text{czyli } x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Ponieważ $2\frac{1}{2} \in \langle 2, +\infty \rangle$, więc dane równanie ma rozwiązanie $x = 2\frac{1}{2}$.

Oznacza to, że równanie $|x + 5| + |x - 2| = 8$ ma dwa rozwiązania: $x = -5\frac{1}{2}$ oraz $x = 2\frac{1}{2}$.

b) Wyznamy na **osi liczbowej** wszystkie liczby rzeczywiste x , których suma odległości od liczb -8 oraz 17 jest równa 24 .

Rozwiązanie

Obliczamy, że odległość między liczbami (-8) oraz 17 jest równa

$$|-8 - 17| = |-25| = 25.$$

Następnie dzielimy **oś liczbową** na trzy przedziały:

$$(-\infty, -8), \langle -8, 17 \rangle \text{ oraz } \langle 17, +\infty \rangle.$$

Zauważmy, że:

- dla dowolnej liczby x z przedziału $\langle -8, 17 \rangle$ suma odległości od krańców tego przedziału jest równa 25 , a więc jest większa niż 24 . Zatem w tym przedziale nie ma liczb spełniających zadany warunek.
- dla $x \in (-\infty, -8)$ odległość x od 17 jest większa niż długość przedziału $\langle -8, 17 \rangle$, czyli jest większa niż 25 . Wynika stąd, że dla $x \in (-\infty, -8)$ suma odległości x od liczb (-8) oraz 17 jest większa niż 25 , a więc jest większa niż 24 . Wobec tego również w tym przedziale nie ma liczb spełniających zadany warunek.
- dla $x \in \langle 17, +\infty \rangle$ odległość x od (-8) jest większa niż długość przedziału $\langle -8, 17 \rangle$, czyli jest większa niż 25 . Wynika stąd, że dla $x \in \langle 17, +\infty \rangle$ suma odległości x od liczb (-8) oraz 17 jest większa niż 25 , czyli jest większa niż 24 . Oznacza to, że również w tym przedziale nie ma liczb spełniających zadany warunek.

Ostatecznie stwierdzamy, że nie istnieje taka liczba rzeczywista x , której suma odległości od liczb (-8) oraz 17 jest równa 24 .

Uwaga. Warunek podany w treści zadania można sformułować następująco.

Wyznamy wszystkie liczby rzeczywiste x , które są rozwiązaniem równania

$$|x + 8| + |x - 17| = 24.$$

Powyżej wykazaliśmy, że to równanie nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

Czytelnik zechce sprawdzić, rozwiązując to równanie z wykorzystaniem definicji **wartości bezwzględnej**, że w żadnym z trzech przedziałów: $(-\infty, -8)$, $(-8, 17)$ oraz $(17, +\infty)$ nie znajdzie rozwiązania.

Pokażemy teraz, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Zauważmy, że obie strony tej nierówności są nieujemne, zatem możemy ją przekształcić równoważnie do postaci

$$|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2.$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia oraz z własności **wartości bezwzględnej** dostajemy

$$(a + b)^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2$$

$$2ab \leq 2|a||b|$$

$$ab \leq |a||b|.$$

Zauważmy następnie, że prawa strona otrzymanej nierówności jest liczbą nieujemną. Zatem:

- jeżeli $ab < 0$, to nierówność jest prawdziwa,
 - jeżeli $ab \geq 0$, to:
 - albo obie liczby a i b są nieujemne; wtedy $|a||b| = ab$,
 - albo obie liczby a i b są niedodatnie; wtedy $|a||b| = (-a)(-b) = ab$.
- Wykazaliśmy, więc że w tym przypadku zachodzi równość $ab = |a||b|$.

Oznacza to, że dla każdego a i każdego b otrzymana nierówność jest prawdziwa, przy czym równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geq 0$.

Prawdziwe jest więc twierdzenie.

Twierdzenie: nierówność trójkąta

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

przy czym równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geq 0$.

Uwaga.

- Ponieważ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość $|x - y| = |x + (-y)|$,
więc korzystając z nierówności trójkąta otrzymujemy, że $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

- Przyjmując $a = x - z$ oraz $b = z - y$ możemy nierówność trójkąta sformułować następująco
dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność
 $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

Przykład 3

Korzystając z **nierówności trójkąta**, wykażemy, że równanie

$$|x + 8| + |x - 17| = 24$$

nie ma rozwiązań.

Dowód

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość

$$|x - 17| = |17 - x|.$$

Korzystając z **nierówności trójkąta** otrzymujemy stąd, że

$$|x + 8| + |x - 17| = |x + 8| + |17 - x| \geq |x + 8 + 17 - x| = |25| = 25.$$

Wobec tego zakładając, że istnieje liczba x , która spełnia równanie

$$|x + 8| + |x - 17| = 24 \text{ otrzymujemy}$$

$$24 = |x + 8| + |x - 17| \geq 25,$$

co jest sprzeczne. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

W kolejnych przykładach przejdziemy do rozwiązywania innych typów równań z **wartością bezwzględną**.

Przykład 4

Wyznamy wszystkie liczby rzeczywiste, które spełniają równanie:

$$a) ||x + 4| - 5| = 2.$$

Rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie dane równanie, korzystając w własności **wartości bezwzględnej**.

$$||x + 4| - 5| = 2,$$

$$\text{skąd } |x + 4| - 5 = 2 \text{ lub } |x + 4| - 5 = -2,$$

$$\text{zatem } |x + 4| = 2 + 5 = 7 \text{ lub } |x + 4| = -2 + 5 = 3,$$

$$\text{czyli } (x + 4 = 7 \text{ lub } x + 4 = -7) \text{ lub } (x + 4 = 3 \text{ lub } x + 4 = -3).$$

Wobec tego równanie ma cztery rozwiązania: 3, (-1), (-7) oraz (-11).

$$b) ||x - 2| - 3| = 4.$$

Rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie dane równanie, korzystając w własności **wartości bezwzględnej**.

$$||x - 2| - 3| = 4,$$

$$\text{skąd } |x - 2| - 3 = 4 \text{ lub } |x - 2| - 3 = -4,$$

$$\text{zatem } |x - 2| = 7 \text{ lub } |x - 2| = -1.$$

Drugie z otrzymanych równań jest sprzeczne (nie istnieje liczba rzeczywista, której **wartość bezwzględna** jest ujemna), a to oznacza, że $x - 2 = 7$ lub $x - 2 = -7$.

Wynika z tego, że zbiór rozwiązań danej nierówności jest dwuelementowy: $x \in \{-5, 9\}$.

$$\text{c) } \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{81 - 18x + x^2} = 12 - x.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwe są równości:

- $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x + 2)^2} = |x + 2|,$
- $\sqrt{81 - 18x + x^2} = \sqrt{(x - 9)^2} = |x - 9|.$

Wynika stąd, że dane równanie jest równoważne równaniu $|x + 2| + |x - 9| = 12 - x$.

Korzystając z definicji **wartości bezwzględnej** otrzymujemy:

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{dla } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

oraz

$$|x - 9| = \begin{cases} x - 9, & \text{dla } x \geq 9 \\ -x + 9, & \text{dla } x < 9 \end{cases}$$

Zatem rozpatrujemy trzy następujące przypadki:

- (1) $x \in (-\infty, -2)$; wtedy $|x + 2| = -x - 2$ oraz $|x - 9| = -x + 9$,
- (2) $x \in [-2, 9)$; wtedy $|x + 2| = x + 2$ oraz $|x - 9| = -x + 9$,
- (3) $x \in [9, +\infty)$; wtedy $|x + 2| = x + 2$ oraz $|x - 9| = x - 9$.

Wobec tego:

- w przypadku (1) otrzymujemy równanie $-x - 2 + (-x + 9) = 12 - x$, skąd $-x - x + x = 12 + 2 - 9$, $-x = 5$ czyli $x = -5$.
Ponieważ $-5 \in (-\infty, -2)$, więc $x = -5$ jest rozwiązaniem równania.

- w przypadku (2) otrzymujemy równanie
 $x + 2 + (-x + 9) = 12 - x$, skąd $x - x + x = 12 - 2 - 9$,
czyli $x = 1$.
Ponieważ $1 \in \langle -2, 9 \rangle$, więc $x = 1$ jest rozwiązaniem równania.
- w przypadku (3) otrzymujemy równanie
 $x + 2 + x - 9 = 12 - x$, skąd $x + x + x = 12 - 2 + 9$,
czyli $x = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$.
Ponieważ $6\frac{1}{3} \notin \langle 9, +\infty \rangle$, więc w tym przypadku rozwiązań nie ma.

Oznacza to, że równanie $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{81 - 18x + x^2} = 12 - x$ ma dwa rozwiązania: $x = -5$ oraz $x = 1$.

Przykład 5

Wyznamy wszystkie liczby rzeczywiste, które spełniają równanie

$$|x - 5| + |4x + 4| = |15 - 3x| + |3x + 3|.$$

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującej własności:

dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest równość

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Dla dowodu zauważmy, że obie strony tej równości są nieujemne, więc jest ona równoważna równości

$$|a \cdot b|^2 = (|a| \cdot |b|)^2,$$

skąd z własności [wartości bezwzględnej](#) otrzymujemy równość

$(a \cdot b)^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$, czyli $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, a to jest równość prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b . To spostrzeżenie kończy dowód.

Korzystając z powyższej własności możemy dane równanie przekształcić jak poniżej.

$$\begin{aligned} |x - 5| + |4(x + 1)| &= |-3(x - 5)| + |3(x + 1)| \\ |x - 5| + |4| \cdot |x + 1| &= |-3| \cdot |x - 5| + |3| \cdot |x + 1| \\ |x - 5| + 4|x + 1| &= 3|x - 5| + 3|x + 1| \\ 4|x + 1| - 3|x + 1| &= 3|x - 5| - |x - 5| \\ |x + 1| &= 2|x - 5|. \end{aligned}$$

Zauważmy, że rozwiązaniem otrzymanego równania są wszystkie liczby rzeczywiste x , których odległość na [osi liczbowej](#) od liczby (-1) jest 2 razy większa, niż odległość od liczby 5. Jak już wiemy z rozwiązania wcześniejszego przykładu, są dwie liczby spełniające powyższy warunek: $x = 3$ oraz $x = 11$.

Uwaga. Rozumując podobnie, jak przy dowodzie własności wykorzystanej w rozwiązaniu powyższego przykładu, można udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i

$b \neq 0$ prawdziwa jest równość

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Poniżej znajdują się dwa przykłady zadań wykraczających swoją treścią poza podstawę programową. Możesz się z nimi zapoznać, aby przekonać się, że z poznanymi do tej pory narzędziami jesteśmy w stanie je rozwiązać.

Przykład 6

Wyznamy wszystkie liczby rzeczywiste, które spełniają równanie:

$$a) |x + 4| + |x - 1| + |x - 8| = 12.$$

Rozwiązanie

Z [nierówności trójkąta](#) wynika, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest zależność

$$|x + 4| + |x - 8| = |x + 4| + |8 - x| \geq |x + 4 + 8 - x| = |12| = 12,$$

przy czym równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy $(x + 4) \cdot (8 - x) \geq 0$, a więc dla $x \in \langle -4, 8 \rangle$.

Wynika stąd, że:

- dla $x \notin \langle -4, 8 \rangle$ dane równanie rozwiązań nie ma (po lewej stronie równania jest liczba większa od 12),
- dla $x \in \langle -4, 8 \rangle$ równanie przyjmuje postać $12 + |x - 1| = 12$, skąd $|x - 1| = 0$, $x - 1 = 0$, czyli $x = 1$.

Ponieważ $1 \in \langle -4, 8 \rangle$, więc jest to rozwiązanie danego równania.

Otrzymujemy więc, że jedynym rozwiązaniem danego równania jest $x = 1$.

Czytelnik zechce zweryfikować odpowiedź otrzymaną powyższym sposobem, rozwiązując podane równanie (z wykorzystaniem definicji [wartości bezwzględnej](#)) w każdym z przedziałów:

$$(-\infty, -4), \langle -4, 1 \rangle, \langle 1, 8 \rangle \text{ oraz } \langle 8, +\infty \rangle.$$

$$b) |x| + |x + 3| = |x + 1| + |x + 2|.$$

Ponieważ obie strony otrzymanej nierówności są nieujemne, więc możemy ją przekształcić równoważnie do postaci

$$(|x| + |x + 3|)^2 = (|x + 1| + |x + 2|)^2.$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia oraz z własności [wartości bezwzględnej](#) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |x + 3| + |x + 3|^2 &= |x + 1|^2 + 2 \cdot |x + 1| \cdot |x + 2| + |x + 2|^2 \\ x^2 + 2|x \cdot (x + 3)| + (x + 3)^2 &= (x + 1)^2 + 2 \cdot |(x + 1) \cdot (x + 2)| + (x + 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x^2 + 6x + 9 + 2|x \cdot (x + 3)| &= 2x^2 + 6x + 5 + 2 \cdot |(x + 1) \cdot (x + 2)| \\
4 + 2|x^2 + 3x| &= 2 \cdot |x^2 + 3x + 2| \\
|x^2 + 3x| + 2 &= |x^2 + 3x + 2| \\
|x^2 + 3x| + |2| &= |x^2 + 3x + 2|.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że na mocy nierówności trójkąta otrzymujemy zależność

$$|x^2 + 3x| + |2| \geq |x^2 + 3x + 2|,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(x^2 + 3x) \cdot 2 \geq 0$, czyli gdy $x \cdot (x + 3) \geq 0$, a więc dla $x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

Wynika stąd, że rozwiązaniami danego równania są $x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

W przypadku tego równania ponownie sugerujemy, aby czytelnik zweryfikował odpowiedź otrzymaną powyższym sposobem, rozwiązując je (z wykorzystaniem definicji [wartości bezwzględnej](#)) w każdym z przedziałów:

$(-\infty, -3]$, $(-3, -2]$, $(-2, -1]$, $(-1, 0)$ oraz $[0, +\infty)$.

Przykład 7

Wyznamy wszystkie liczby rzeczywiste, które spełniają równanie

$$|x - |x + |x - 2||| + |x + |x - |x + 5||| = 8.$$

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującej własności:

dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$|x| \geq x,$$

przy czym równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy $x \geq 0$.

Z definicji [wartości bezwzględnej](#) wynika mianowicie, że:

- gdy $x < 0$, to $|x| = -x > 0$; wtedy $|x| > x$, czyli nierówność jest prawdziwa,
 - gdy $x \geq 0$, to $|x| = x$, czyli nierówność jest prawdziwa.
- Oznacza to, że nierówność $|x| \geq x$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Korzystając z powyższej własności wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwe są następujące dwie zależności:

$$(1) |x - |x + |x - 2||| = |x - 2|,$$

$$(2) |x + |x - |x + 5||| = |x + 5|.$$

Dowód

(1) Zauważmy, że:

$$|-(x - 2)| \geq -(x - 2), \text{ skąd } |x - 2| \geq -x + 2, x + |x - 2| \geq 2 > 0, \text{ czyli}$$

$$|x + |x - 2|| = x + |x - 2|.$$

Zatem

$$|x - |x + |x - 2|| = |x - (x + |x - 2|)| = |x - x - |x - 2|| = |-|x - 2||.$$

Ponieważ

$$-|x - 2| \leq 0,$$

więc $|-|x - 2|| = -(-|x - 2|) = |x - 2|$.

Wobec tego

$$|x - |x + |x - 2|| = |x - 2| \text{ dla dowolnej liczby rzeczywistej } x.$$

(2) Zauważmy, że:

$$|x + 5| \geq x + 5, \text{ skąd } x - |x + 5| \leq -5 < 0, \text{ czyli}$$

$$|x - |x + 5|| = -(x - |x + 5|) = -x + |x + 5|.$$

Wynika stąd, że

$$|x + |x - |x + 5|| = |x + (-x + |x + 5|)| = |x - x + |x + 5|| = ||x + 5||.$$

Ponieważ

$$|x + 5| \geq 0,$$

więc $||x + 5|| = |x + 5|$.

Oznacza to, że

$$|x + |x - |x + 5|| = |x + 5| \text{ dla dowolnej liczby rzeczywistej } x.$$

W ten sposób otrzymujemy, że dane równanie

$$|x - |x + |x - 2|| + |x + |x - |x + 5|| = 8$$

jest równoważne równaniu

$$|x - 2| + |x + 5| = 8.$$

Zauważmy, że rozwiązaniem tak otrzymanego równania są wszystkie liczby rzeczywiste x , których suma odległości od liczb (-5) oraz 2 jest równa 8 .

Jak już wiemy z rozwiązania wcześniejszego przykładu, są dwie liczby spełniające powyższy warunek: $x = -5\frac{1}{2}$ oraz $x = 2\frac{1}{2}$.

Przykład 8

Wyznamy wszystkie liczby rzeczywiste $x \geq 1$, które spełniają równanie

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że gdy $x \geq 1$, to:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} &= \sqrt{x - 1 - 4\sqrt{x - 1}} + 2 = \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 2)^2}, \\ \text{a więc } \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} &= |\sqrt{x - 1} - 2|, \end{aligned}$$

$$\bullet \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2},$$

skąd $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-3| = |3-\sqrt{x-1}|$.

Na mocy **nierówności trójkąta** otrzymujemy ponadto, że

$$\begin{aligned} &\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = \\ &= |\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}| \geq |\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}| = |1| = 1, \end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\sqrt{x-1}-2) \cdot (3-\sqrt{x-1}) \geq 0,$$

czyli gdy $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$.

Wynika stąd, że równanie

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

spełniają te liczby rzeczywiste, dla których prawdziwy jest układ nierówności

$$2^2 \leq x-1 \leq 3^2.$$

Oznacza to, że $x \in \langle 5, 10 \rangle$.

Słownik

oś liczbowa

prosta, na której wyróżniono zwrot i punkt O zwany zerowym oraz ustalono odcinek jednostkowy

wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

wartością bezwzględną liczby rzeczywistej x nazywamy jej odległość na osi liczbowej od zera; wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem $|x|$

nierówność trójkąta

dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

przy czym równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geq 0$

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.



Test

Równania z wartością bezwzględną

Sprawdzisz swoją wiedzę dotyczącą:

- wyznaczania wszystkich liczb na osi liczbowej, dla których dany jest iloraz odległości od dwóch ustalonych liczb,
- wyznaczania wszystkich liczb na osi liczbowej, dla których dana jest suma odległości od ustalonych liczb,
- rozwiązywania równań z wykorzystaniem definicji i własności wartości bezwzględnej,
- rozwiązywania równań z wartością bezwzględną z wykorzystaniem nierówności trójkąta.

Liczba pytań:

6

Limit czasu:

15 min

Twój ostatni
wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Ułóż po jednym zadaniu dotyczącym:

- wyznaczania wszystkich liczb na osi liczbowej, dla których zadany jest iloraz odległości od dwóch ustalonych liczb,
- wyznaczania wszystkich liczb na osi liczbowej, dla których dana jest suma odległości od ustalonych liczb,
- rozwiązywania równań z wykorzystaniem definicji i własności wartości bezwzględnej,
- rozwiązywania równań z wartością bezwzględną, z wykorzystaniem nierówności trójkąta.

Zredaguj pełne rozwiązanie wraz ze wszystkimi istotnymi uzasadnieniami.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



O liczbie x wiadomo, że jej odległość od liczby 3 jest dwa razy większa niż odległość od liczby 21.

Wynika stąd, że:

☐ $|x| = 15$

☐ $x = -6$

☐ $x = 9$

☐ $|x - 3| = 2|x - 21|$

Ćwiczenie 2



Rozpatrujemy wszystkie liczby rzeczywiste x , których suma odległości od liczby (-1) oraz od liczby 6 jest równa 9.

Wyznacz te liczby i wpisz je poniżej w kolejności rosnącej.

Odpowiedź: Szukane liczby to oraz .

Ćwiczenie 3



Rozpatrujemy wszystkie liczby całkowite x , których suma odległości od liczby 8 oraz od liczby 27 jest równa 19.

Wówczas suma S tych wszystkich liczb całkowitych jest równa:

Odpowiedź: $S =$.

Ćwiczenie 4



Rozpatrzmy równanie

$$|x + 3| + |x - 2| = 3x + 1.$$

Spośród poniższych przedziałów wybierz i zaznacz każdy, w którym leży co najmniej jedno z rozwiązań danego równania.

☐ $\langle -18, -3 \rangle$

☐ $\langle -9, 2 \rangle$

☐ $\langle 7, 24 \rangle$

☐ $\langle 1, 16 \rangle$

Ćwiczenie 5



Wybierz spośród poniższych tę wartość parametru m , dla której równanie

$$|x + 6| + |x - 3| = x + m$$

ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

☐ $m = \frac{39}{5}$

☐ $m = \frac{44}{7}$

☐ $m = \frac{37}{4}$

☐ $m = \frac{41}{6}$

Ćwiczenie 6



Połącz w pary: równanie z lewej kolumny, ze zbiorem jego rozwiązań, odnalezionym w prawej kolumnie.

$$|9x + 21| + x = |6x + 14| - 1$$

$$\{-2, -3\}$$

$$|5 - 5x| + |5x + 30| = 4x + 43$$

$$\{2, 3\}$$

$$\sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$$

$$\{-2, 3\}$$

$$|4x - 6| = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + |4x - 6|$$

$$\{2, -3\}$$

Ćwiczenie 7



Spośród poniższych równań wybierz i zaznacz te, które mają dokładnie 2 rozwiązania.

☐ $|x - 3| + |x + 2| + |x + 4| + |x + 7| = 12$

☐ $|x + 1| + |x + 5| + |x + 9| = 10$

☐ $|x - 2| + |x + 2| + |x + 4| + |x + 7| = 13$

☐ $|x - 4| + |x + 2| + |x + 7| = 11$

Ćwiczenie 8

Rozpatrzmy równanie $|x - |x + |x - 5||| + |x + |x - |x + 6||| = x + 20$.



Oblicz iloczyn wszystkich jego rozwiązań.

Zakoduj w kratkach poniżej kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanej liczby.

Odpowiedź: .

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odległość na osi liczbowej - równania z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$;

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2|x + 3| + 3|x - 1| = 13$, $|x + 2| + 2|x - 3| < 11$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- interpretuje wartość bezwzględną jako odległość na osi liczbowej
- rozwiązuje równania z wartością bezwzględną
- wykorzystuje nierówność trójkąta w rozwiązywaniu równań z wartością bezwzględną
- wykorzystuje definicję wartości bezwzględnej w rozwiązywaniu równań z wartością bezwzględną

- wykorzystuje własności wartości bezwzględnej w rozwiązywaniu równań z wartością bezwzględną

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- dyskusja
- stoliki zadaniowe

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają informacje związane z wartością bezwzględną: twierdzenia, wzory, przykłady rozwiązanych zadań, definicje, itp.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w parach, analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, wyjaśnia wątpliwości.
3. Nauczyciel wyświetla „Testy samosprawdzające” – wybrani uczniowie podają odpowiedzi do zadań.
4. Uczniowie pracują indywidualnie metodą stolików zadaniowych (na każdym stoliku po dwa, wybrane przez nauczyciela, ćwiczenia interaktywne spośród ćwiczeń 1 – 6).

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę indywidualną.

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczenia 7 i ćwiczenia 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Odległość na osi liczbowej](#)
- [Wartość bezwzględna - definicja](#)
- [Równanie z wartością bezwzględną](#)
- [Zadania prowadzące do rozwiązywania równań z wartością bezwzględną](#)

Wskazówki metodyczne:

Testy samosprawdzające mogą być wykorzystane na lekcji: „Równanie z wartością bezwzględną”.