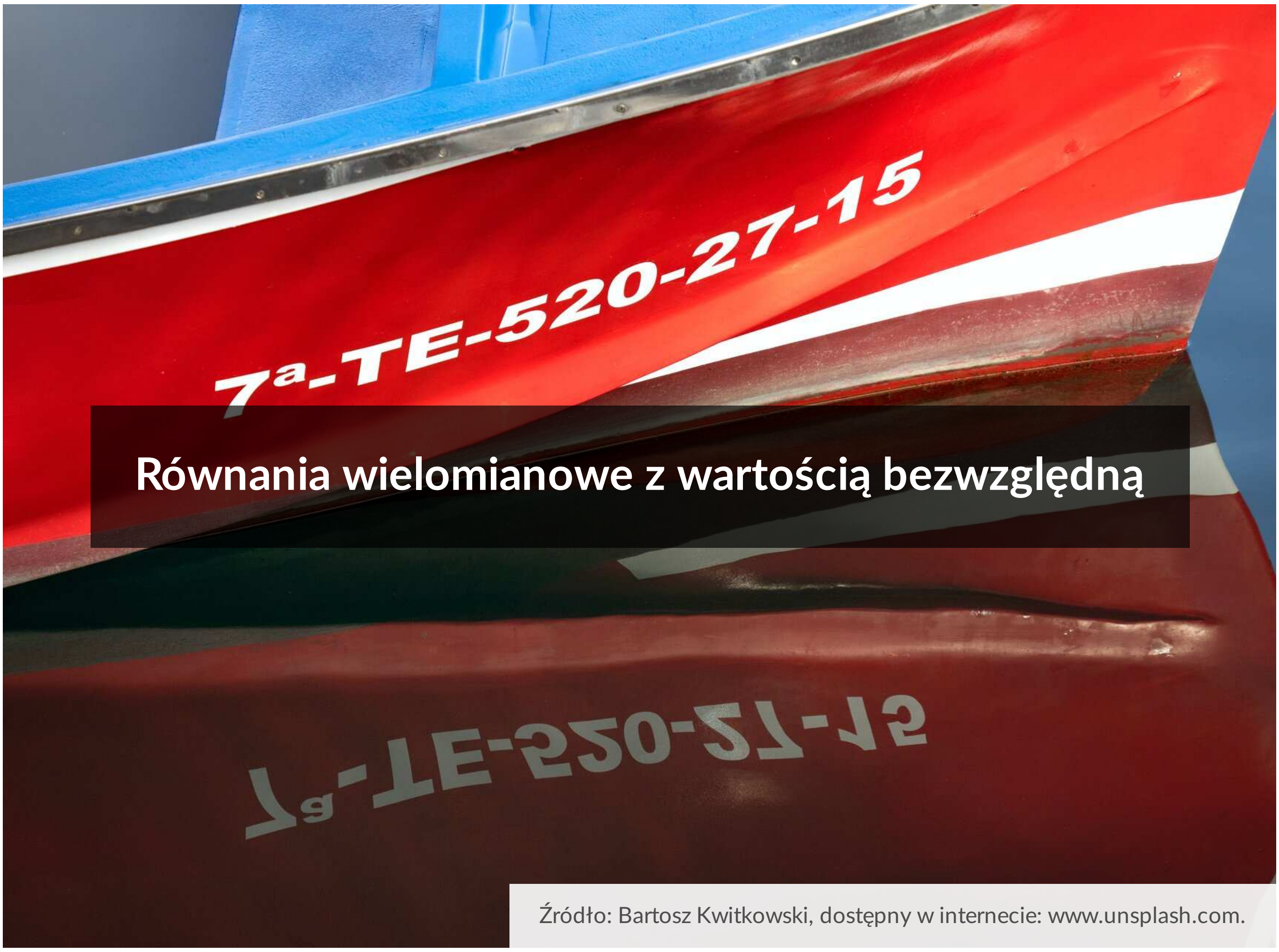
Równania wielomianowe z wartością bezwzględną

Równania wielomianowe z wartością bezwzględną



Źródło: Bartosz Kwitkowski, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem równań wielomianowych z wartością bezwzględną. W rozwiązaniach będziemy korzystać z definicji wartości bezwzględnej oraz z własności wartości bezwzględnej.

Rozważając przypadki, ustalimy najpierw rozwiązania odpowiednich równań.

Po rozważeniu wszystkich warunków zapiszemy, jaka jest suma rozwiązań. Będzie ona rozwiązaniem równania wielomianowego z wartością bezwzględną.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania wielomianowe z wartością bezwzględną lub dwiema wartościami bezwzględnymi.
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania równań wielomianowych z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Pamiętasz?

> **Definicja: Równanie wielomianowe**
>
> Równaniem wielomianowym stopnia n, $n \in \mathbb{N}$ nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n.

> **Definicja: Pierwiastek wielomianu**
>
> Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą a, dla której zachodzi warunek $W(a) = 0$.

Rozwiązaniem równania $W(x) = 0$ są wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

> **Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania wielomianowego**
>
> Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej jest nie większa niż stopień wielomianu $W(x)$.

Z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

> **Przykład 1**
>
> Rozwiążemy równanie wielomianowe $\left|x^3 - 1\right| = 7$.
>
> Skorzystamy z własności wartości bezwzględnej.
>
> Dla $a > 0$:
>
> $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ lub $x = -a$.
>
> Otrzymujemy zatem:
>
> $x^3 - 1 = 7$ lub $x^3 - 1 = -7$.
>
> $x^3 = 8$ lub $x^3 = -6$
>
> $x = \sqrt[3]{8}$ lub $x = \sqrt[3]{-6}$
>
> $x = 2$ lub $x = \sqrt[3]{-6}$
>
> Rozwiązaniem równania są $x = \sqrt[3]{-6}$, $x = 2$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\left|x^3 - x^2\right| = |x - 1|$.

Skorzystamy z własności wartości bezwzględnej:

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ lub $a = -b$.

$x^3 - x^2 = x - 1$ lub $x^3 - x^2 = -(x - 1)$

$x^3 - x^2 - (x - 1) = 0$ lub $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$x^2(x - 1) - (x - 1) = 0$ lub $x^2(x - 1) + (x - 1) = 0$

$(x - 1)\left(x^2 - 1\right) = 0$ lub $(x - 1)\left(x^2 + 1\right) = 0$

$x - 1 = 0$ lub $x^2 - 1 = 0$ lub $x = -1$ lub $x^2 = -1$ – sprzeczność

$x = 1$ lub $x = 1$ lub $x = -1$

Rozwiązaniem równania są $x = -1, x = 1$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $x^4 - 4x^2 - \left|x^2 - 4\right| = 0$.

Wykorzystamy definicję wartości bezwzględnej.

$$\left|x^2 - 4\right| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty) \\ -\left(x^2 - 4\right) & \text{dla } x \in (-2, 2) \end{cases}$$

1. Jeżeli $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$ wtedy mamy:

$x^4 - 4x^2 - \left(x^2 - 4\right) = 0$

$x^2\left(x^2 - 4\right) - \left(x^2 - 4\right) = 0$

$\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ lub $x^2 - 1 = 0$

$x = -2 \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

$x = 2 \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

$x = -1 \notin (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

$x = 1 \notin (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

2. Jeżeli $x \in (-2, 2)$ wtedy mamy:

$x^4 - 4x^2 + \left(x^2 - 4\right) = 0$

$x^2\left(x^2 - 4\right) + \left(x^2 - 4\right) = 0$

$\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 1\right) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ lub $x^2 + 1 = 0$

$x = 2 \notin (-2, 2)$ lub $x^2 = -1$ – sprzeczne

$x = -2 \notin (-2, 2)$

Rozwiązaniem równania jest alternatywa (1), (2).

Zatem $x = -2$, $x = 2$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $|x - 1|^3 - 9|x - 1| = 0$.

Niech $|x - 1| = z$, dla $z \geq 0$.

$z^3 - 9z = 0$

$z\left(z^2 - 9\right) = 0$

$z(z - 3)(z + 3) = 0$

$z = 0$ lub $z = 3$ lub $z = -3$ – sprzeczność

$|x - 1| = 0$ lub $|x - 1| = 3$

$x = 1$ lub $x - 1 = 3$ lub $x - 1 = -3$

$x = 1$ lub $x = 4$ lub $x = -2$

Rozwiązaniem równania są $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$.

Przykład 5

Obliczymy dla jakiej wartości parametru m równanie $\left|x^3 - 1\right| + \left|x^3 + 1\right| = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$$\left|x^3 - 1\right| = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{dla } x \geq 1 \\ -\left(x^3 - 1\right) & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

$$|x^3+1| = \begin{cases} x^3+1 & \text{dla } x \geq -1 \\ -\left(x^3+1\right) & \text{dla } x < -1 \end{cases}$$

1. $x \in (-\infty,\ -1)$

$-\left(x^3-1\right)-\left(x^3+1\right)=m$

$-x^3+1-x^3-1=m$

$-2x^3=m$

$x^3=-\frac{m}{2}$

$x=\sqrt[3]{-\frac{m}{2}}$

2. $x \in \langle -1, 1)$

$-\left(x^3-1\right)+\left(x^3+1\right)=m$

$-x^3+1+x^3+1=m$

$m=2$

3. $x \in \langle 1,\ \infty)$

x^3-1+x^3+1-m

$2x^3=m$

$x^3=\frac{m}{2}$

$x=\sqrt[3]{\frac{m}{2}}$

Dla $m=2$ równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Słownik

wartość bezwzględna liczby x

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych przedstawiającą sposób rozwiązywania równania wielomianowego z wartością bezwzględną.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $\left|x^3+1\right|=x^2-x+1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania wielomianowe z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania wielomianowe z wartością bezwzględną lub dwiema wartościami bezwzględnymi
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań wielomianowych z wartością bezwzględną różnych typów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- odwrócona klasa

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu przygotowują sposób rozwiązywania równań wielomianowych z wartością bezwzględną.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania równań wielomianowych z wartością bezwzględną, które przygotowali w domu.
2. Uczniowie w parach omawiają rozwiązania przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1-6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.
4. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jaki napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania 7 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Pierwiastki równań

Wskazówki metodyczne:

Przykład zawarty w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą wykorzystać jako materiał na lekcję o nierównościach wielomianowych z wartością bezwzględną.