Własności wielokątów foremnych

Źródło: Joanna Kosińska, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

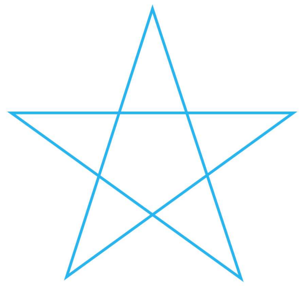
Jakie zasługi w badaniu wielokątów gwiaździstych miał Jan Brożek, profesor Akademii Krakowskiej?

Każdy zajmujący się matematyką czy jej historią, zna postać francuskiego matematyka Pierre de Fermata. Ale niewielu zdaje sobie sprawę, że jedno z podstawowych twierdzeń teorii liczb, tzw. małe twierdzenie Fermata, zostało sformułowane wcześniej przez wybitnego polskiego matematyka, żyjącego w latach 1585 – 1652, profesora Akademii Krakowskiej, a w latach 1632 – 1652 proboszcza parafii w Staszowie - Jana Brożka. To słynne twierdzenie sformułował on na 42 lata przed Fermatem i podobnie jak Fermat, zajmował się wielokątami foremnymi gwiaździstymi.

Dla danego n-kąta foremnego możemy rozważyć łamaną zamkniętą o n wierzchołkach, utworzoną z tych przekątnych tego wielokąta, które mają równą długość - otrzymujemy wówczas wielokąt foremny gwiaździsty.

Najbardziej znanym wielokątem foremnym gwiaździstym jest pentagram (patrz rysunek).

To właśnie Jan Brożek nazwał kąty przy wierzchołkach wielokąta gwiaździstego kątami sterczącymi. Brożek podał sposób kreślenia różnych wielokątów gwiaździstych dla danej liczby wierzchołków n. Temu celowi służy odpowiedni rozkład liczby n na składniki. Liczba możliwych do zbudowania różnych pięciokątów jest równa 2, ponieważ liczbę 5 możemy rozłożyć, z dokładnością do kolejności, na następujące dwie sumy: $5 = 1 + 4 = 2 + 3$. Oznacza to, że po podzieleniu okręgu na 5 równych części otrzymamy: pięciokąt foremny, gdy połączymy kolejne punkty podziału oraz pięciokąt gwiaździsty, gdy połączymy co drugi z takich punktów (co drugi wierzchołek pięciokąta foremnego).


pięciokąt gwiaździsty

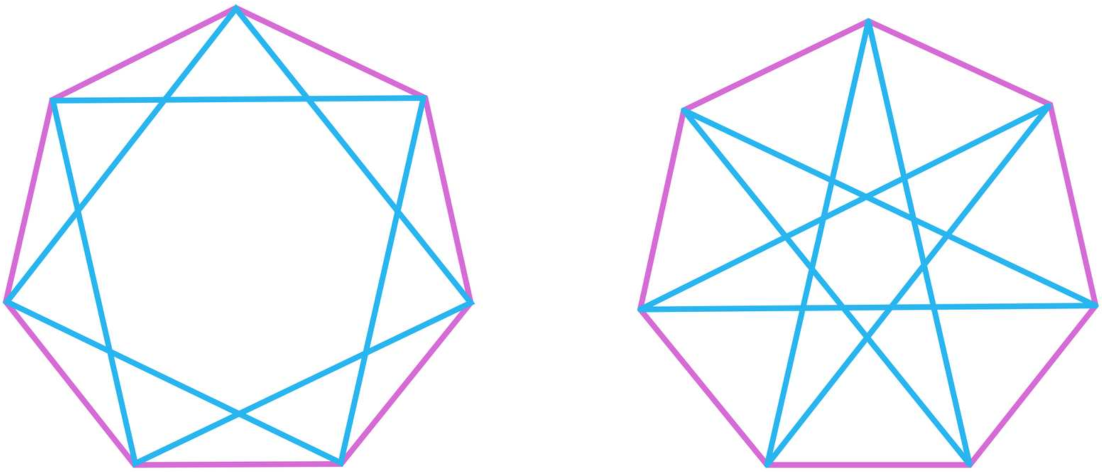
Twoje cele

- Usystematyzujesz wiadomości na temat wielokątów foremnych.
- Zbadasz liczbę wielokątów foremnych gwiaździstych dla danego wielokąta foremnego i wykreślisz przykładowe wielokąty gwiaździste.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Wielokąty gwiaździste

Wiadomo, że wszystkie wielokąty foremne o takiej samej liczbie boków są podobne. Ale już wielokąty foremne gwiaździste o takiej samej liczbie boków nie muszą być figurami geometrycznymi podobnymi. Okazuje się, że istnieje tyle różnych (tzn. niepodobnych) n-kątów foremnych gwiaździstych, ile jest liczb naturalnych względnie pierwszych z n, z przedziału $\left(1, \frac{n}{2}\right)$. Dla $n = 7$ istnieją dwie takie liczby, które są względnie pierwsze z liczbą 7 i które należą do zbioru $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ - są to liczby 2 i 3. Oczekujemy zatem, że dla danego siedmiokąta foremnego, będą dwa różne siedmiokąty foremne gwiaździste. Poniższe rysunki pokazują, że rzeczywiście tak jest.



siedmiokąt gwiaździsty $\{7/2\}$ oraz siedmiokąt gwiaździsty $\{7/3\}$

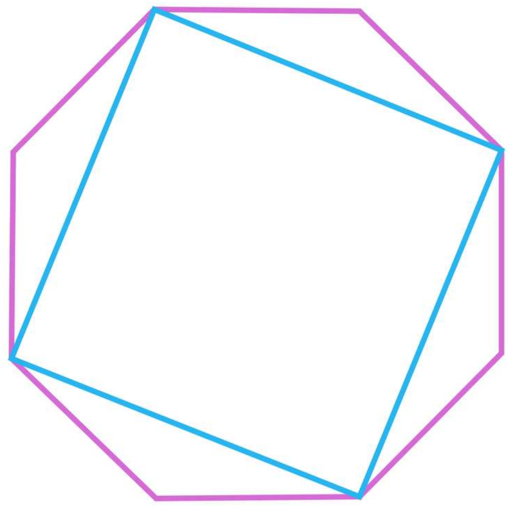
Sposób konstrukcji takich dwóch siedmiokątów wynika z metody Brożka. Mamy, że $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. Pierwszy rozkład na składniki „definiuje” siedmiokąt foremny, kolejny wskazuje na możliwość łączenia co drugiego z wierzchołków siedmiokąta, a ostatni pozwala skonstruować wielokąt gwiaździsty, poprzez łączenie co trzeciego z wierzchołków siedmiokąta foremnego.

Przykład 1

Naszym celem będzie teraz skonstruowanie wielokątów foremnych gwiaździstych utworzonych z przekątnych danego ośmiokąta foremnego.

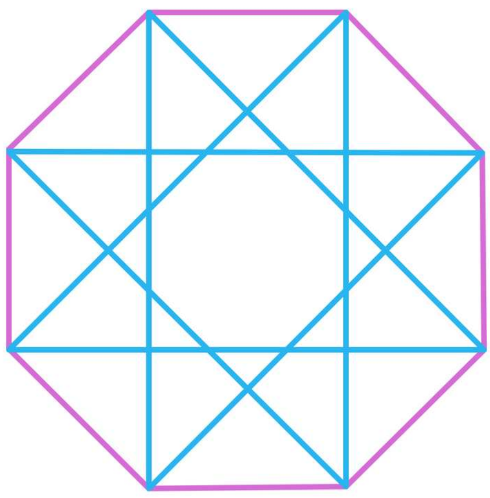
Wyznaczymy najpierw liczbę takich figur. W przedziale $\left(1, \frac{8}{2}\right)$, są dwie liczby naturalne: 2 i 3. Liczba 2 nie jest względnie pierwsza z liczbą 8, ale liczba 3 jest względnie pierwsza z liczbą 8. Wiemy więc, że jest jeden ośmiokąt foremny gwiaździsty.

Korzystając z metody Brożka możemy zapisać, że $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$. Pierwszy z rozkładów na składniki opisuje ośmiokąt foremny. Rozkład $8 = 2 + 6$, wyznaczony przez liczbę 2, która nie jest względnie pierwsza z liczbą 8, prowadzi do „zamknięcia” łamanej zanim dotrze ona do każdego z wierzchołków.



łamana zamknięta w ośmiokącie

Okaże się, że rozkład $8 = 3 + 5$, wyznaczony przez liczbę 3, która jest względnie pierwsza z liczbą 8, prowadzi do skonstruowania ośmiokąta gwiaździstego.



ośmiokąt foremny gwiaździsty

Pozostaje dodać, że rozkład $8 = 4 + 4$ prowadzi w oczywisty sposób do konstrukcji odcinka.

O konstrukcjach wielokątów foremnych i liczbach względnie pierwszych raz jeszcze

Jak zauważyliśmy w poprzednim akapicie, liczba wielokątów foremnych gwiaździstych jest ściśle związana z występowaniem liczb, które są względnie pierwsze z liczbą opisującą ilość boków danego wielokąta. Pamiętamy także o kryterium Gaussa, które orzeka o możliwości skonstruowania wielokąta foremnego za pomocą klasycznych metod, tj. tylko za pomocą cyrkla i linijki. Gauss stwierdził, że n-kąt foremny można skonstruować tylko wtedy, gdy $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, gdzie m jest liczbą naturalną (wraz z zerem), a p_i są różnymi pierwszymi liczbami Fermata lub gdy $n = 2^m$, gdzie m jest liczbą naturalną nie mniejszą niż 2. Przypomnijmy jeszcze, że liczbą Fermata jest liczba postaci $F_k = 2^{2^k} + 1$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą. Każdy z nas potrafi skonstruować trójkąt równoboczny, czyli trójkąt foremny. Niemal każdy wie, że da się skonstruować pięciokąt foremny, a opis tej konstrukcji łatwo znaleźć. Okazuje się, że to nam wystarcza, by stwierdzić, że możliwe jest skonstruowanie 15-kąta foremnego. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: o konstrukcji wielokąta foremnego i liczbach względnie pierwszych

Jeśli liczby m i n są względnie pierwsze oraz m-kąt foremny i n-kąt foremny można skonstruować metodami klasycznymi, to można też skonstruować wielokąt foremny, którego liczba boków jest iloczynem $m \cdot n$.

Dowód

Skorzystamy z kryterium Gaussa.

Przypuśćmy, że jedna z liczb, np. liczba m, jest postaci 2^p, gdzie p jest liczbą naturalną nie mniejszą niż 2. Wtedy, z faktu, że liczby m, n są względnie pierwsze wynika, że liczba n nie może dzielić się przez 2 – jest zatem postaci $2^l \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, gdzie musi być $l = 0$. Zauważmy jednak, że wówczas $m \cdot n = 2^p \cdot 2^0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = 2^p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Jest to zatem postać, która wskazuje, na mocy kryterium Gaussa, że da się skonstruować wielokąt foremny o takiej liczbie boków.

Przypuśćmy teraz, że $m = 2^0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ oraz $n = 2^0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$. Wtedy z faktu, że liczby m, n są względnie pierwsze wynika, że żadna z liczb p_i nie może być równa jakiejkolwiek z liczb q_j. Ale wówczas iloczyn $m \cdot n$ jest równy $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l$, czyli jest postaci $2^0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l$. Jest to zatem postać, która wskazuje, na mocy kryterium Gaussa, że da się skonstruować wielokąt foremny o takiej liczbie boków. Co należało wykazać.

Wracając do 15-kąta foremnego możemy stwierdzić, że z faktu, że liczby 3 i 5 są względnie pierwsze i $15 = 3 \cdot 5$ wynika (po skorzystaniu z powyższego twierdzenia), że 15-kąt foremny da się skonstruować za mocą metod klasycznych. Wcześniej musielibyśmy zapisać, że $15 = \left(2^{2^0} + 1\right) \cdot \left(2^{2^1} + 1\right)$, czyli zapisać liczbę 15 w postaci iloczynu liczb pierwszych Fermata.

Ciekawostka

promień okręgu wpisanego w wielokąt foremny nazywamy **apotemą wielokąta foremnego**

Słownik

wielokąt foremny gwiaździsty

n-kątem foremnym gwiaździstym nazywamy **łamaną zamkniętą** o n wierzchołkach, utworzoną z tych przekątnych n-kąta foremnego, które mają równą długość

liczby względnie pierwsze

powiemy, że dwie liczby całkowite są względnie pierwsze, jeśli ich największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę edukacyjną, a następnie rozwiąż polecenia.

Polecenie 2

Wyznacz apotemę ośmiokąta o boku długości 8.

Polecenie 3

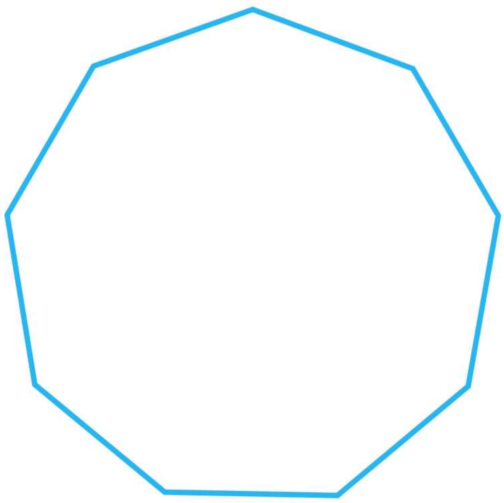
Uzasadnij, że nie istnieje sześciokąt foremny gwiaździsty.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dany jest dziewięciokat foremny, taki jak na rysunku.



Wyznacz liczbę różnych dziewięciokątów foremnych gwiaździstych i skonstruuj te wielokąty, korzystając z dołączonego rysunku.

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Wyznacz miarę kąta sterczącego (kąta przy wierzchołku wielokąta gwiaździstego) w ośmiokącie foremnym gwiaździstym.

Ćwiczenie 6

Uzasadnij, że da się skonstruować wielokąt foremny o trzydziestu wierzchołkach.

Ćwiczenie 7

Oblicz różnicę miar kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego i kąta sterczącego dziesięciokąta foremnego gwiaździstego.

Ćwiczenie 8

Małe twierdzenie Fermata (MTF) orzeka, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby pierwszej p liczba $n^p - n$ dzieli się przez p. Udowodnij, korzystając z MTF, że liczba $5^{10} - 1$ dzieli się przez 11.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Własności wielokątów foremnych.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

3. rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
4. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje i poprawnie nazywa n-kąty foremne
- stosuje podstawowe konstrukcje geometryczne do rozwiązywania problemów
- odkrywa algorytm konstrukcji wielokątów foremnych o podwojonej liczbie boków na podstawie danego n-kąta foremnego
- rozpoznaje liczby Fermata i bada, czy dane liczba jest liczbą Fermata
- bada, czy dany n-kąt foremny można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki
- wyznacza liczbę wielokątów foremnych gwiaździstych
- wykreśla wielokąty foremne gwiaździste

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm.
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy zajęć:

- praca indywidualna;
- gra dydaktyczna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym – wówczas w grze uczestniczy cała klasa.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przywołanie postaci jakiejkolwiek postaci znanego polskiego matematyka (dobrze by było, gdyby miał przygotowaną informacje np. o Banachu (najczęściej występujące pojęcie w pracach matematycznych na całym współczesnym świecie, to przestrzenie Banacha), Ulamie (projekt Manhattan, związany z budową amerykańskiej bomby atomowej)...).
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie, czym są konstrukcje klasyczne w geometrii i jakie znają kryterium konstruowalności wielokątów foremnych.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przywołuje postać Jana Brożka i krótko opisuje jego zasługi dla matematyki. Rysuje na tablicy pięciokąt foremny i prosi by któryś z uczniów narysował pentagram. Następnie wprowadza pojęcie wielokąta foremnego gwiaździstego.
2. Uczniowie, pracując w parach, grają w załączona grę edukacyjną: Własności wielokątów foremnych i wykonują polecenia dołączone do multimedium. Jeśli któryś z graczy trafił na ostatnie zadanie, to nauczyciel w tym momencie wprowadza kryterium dotyczące liczby różnych wielokątów gwiaździstych.
3. Nauczyciel w rozmowie z całą klasą omawia kryterium dotyczące liczby wielokątów gwiaździstych oraz metodę Jana Brożka prowadzącą do sposobu konstrukcji. Rysuje na tablicy ośmiokąt foremny i prosi, by podać ile jest różnych ośmiokątów foremnych gwiaździstych. Następnie prosi chętnego ucznia o skonstruowanie tych wielokątów. Nauczyciel tak steruje dyskusją, by uczniowie zauważyli, że nie każdy rozkład na składniki prowadzi do konstrukcji wielokąta gwiaździstego i by dostrzegli związek z istnieniem wspólnych dzielników odpowiednich liczb.

4. Nauczyciel prosi o przypomnienie kryterium Gaussa konstruowalności wielokątów foremnych oraz o podanie uzasadnienia, że da się skonstruować kąt foremny. Następnie podaje twierdzenie o konstrukcji wielokąta, którego liczba boków jest iloczynem liczb względnie pierwszych i zachęca uczniów do jego udowodnienia.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- Wielokąty foremne

Wskazówki metodyczne:

Grę edukacyjną można użyć jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.