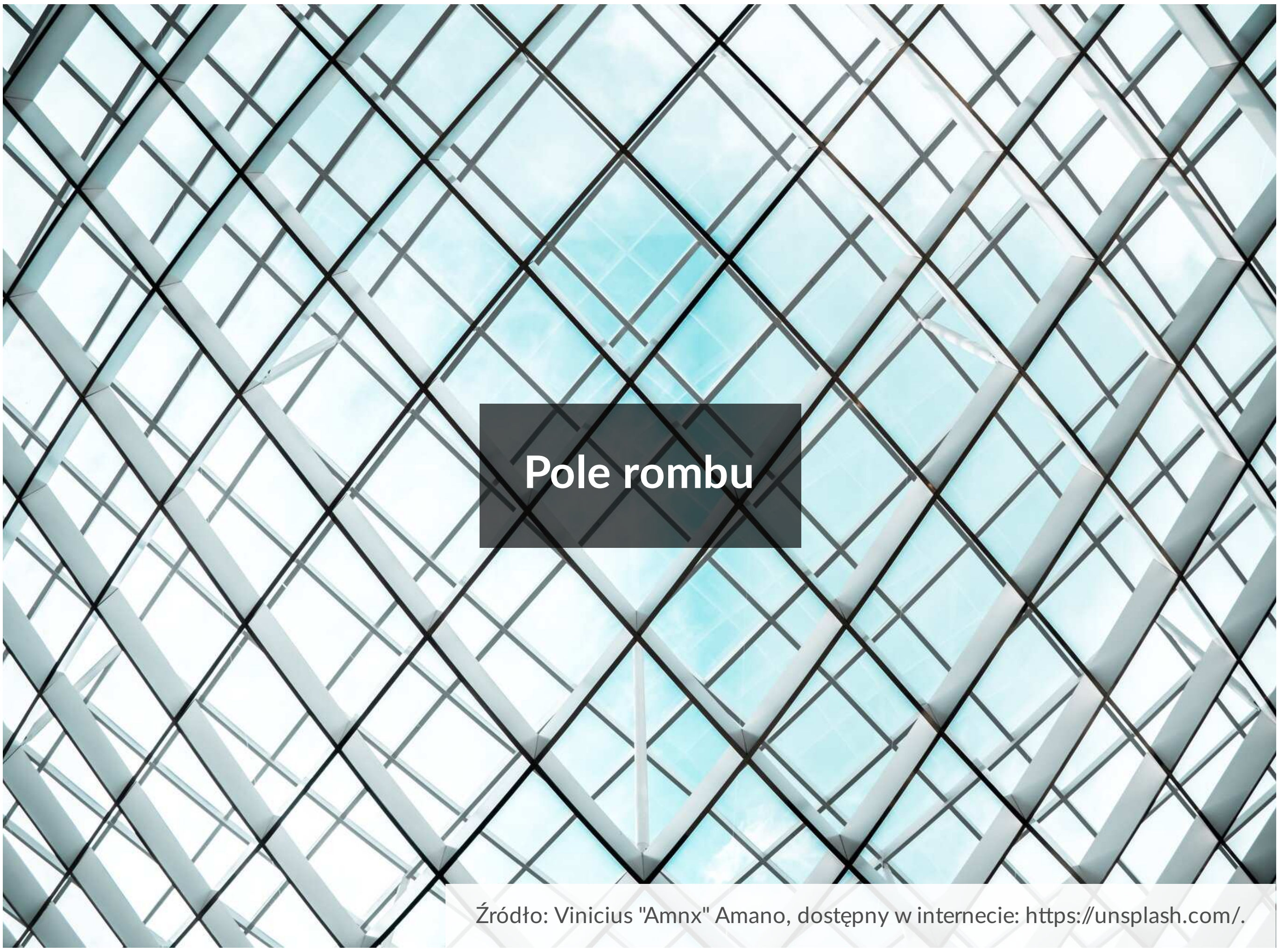
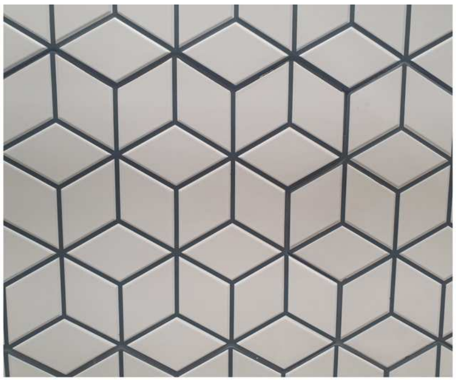
Pole rombu



Źródło: Vinicius "Amnx" Amano, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Na rysunkach powyżej, pierwszy od lewej przedstawia fragment posadzki, drugi – fragment mozaiki z oferty sprzedażowej kafelków do łazienek, a na trzecim obrazku jest fragment dywanu. Co łączy te obrazki?

Otóż wzory na wszystkich tych obrazkach powstały z ułożenia rombów i odpowiedniego ich pokolorowania.

W tym materiale omówimy różne sposoby wyznaczania pola rombu i ich wykorzystanie, w tym również w mozaikach przedstawionych na powyższych obrazkach.

Twoje cele

- Wyliczysz pole rombu na podstawie informacji o niektórych elementach tego czworokąta takich, jak długość boków, przekątnych, wysokości, miary kątów.
- Zobaczysz powiązanie pól rombów z polami trójkątów i innych wielokątów.
- Zastosujesz własności pola rombu w zadaniach matematycznych i praktycznych.

Przeczytaj

Z definicji **romb** jest czworokątem, który ma wszystkie boki równe.

Na początek przypomnimy pojęcia deltoidu i równoległoboku, które są powiązane z rombem.

Deltoidem nazywamy wypukły czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równych. Deltoid jest sumą dwóch trójkątów równoramiennych o wspólnej podstawie. Przekątne w deltoidzie przecinają się pod kątem prostym, przy czym punkt przecięcia przekątnych dzieli jedną z nich na połowy.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych. Boki równoległe w równoległoboku są równe. Przekątne równoległoboku przecinają się w połowie. Jeśli przekątne czworokąta przecinają się w połowie, to czworokąt jest równoległobokiem.

Stąd od razu dostajemy:

Własność: Romb jako deltoid i równoległobok

Romb jest deltoidem i równoległobokiem jednocześnie.

Dowód

Romb jest deltoidem, bo ma wszystkie boki równe, a w szczególności ma dwie pary sąsiednich boków równych.

W deltoidzie przekątna, która jest podstawą trójkątów równoramiennych dzieli się w połowie. Ponieważ romb ma wszystkie boki równe, to punkt przecięcia przekątnych dzieli obie przekątne w połowie. Stąd wynika, że romb jest równoległobokiem.

Przykład 1

Każdy kwadrat jest rombem. Prostokąt, który nie jest kwadratem nie jest rombem.

Rozwiązanie

Jeżeli czworokąt jest kwadratem, to ma, między innymi, wszystkie boki równe, więc na mocy definicji jest rombem. Jeżeli prostokąt nie jest kwadratem, to ma nierówne sąsiednie boki, więc nie można powiedzieć, że ma wszystkie boki równe i stąd nie jest rombem.

Poniżej wypisane są własności rombu, które będą przydatne dalej.

Własność: Własności rombu

Własności rombu:

1. Romb ma wszystkie boki równe.
2. Boki przeciwległe rombu są równoległe.
3. Przeciwległe kąty w rombie mają równe miary.
4. Suma miar dwóch sąsiednich kątów wynosi 180 stopni.
5. Przekątne rombu dzielą się w połowie i pod kątem prostym.
6. Przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne.
7. Przekątne są dwusiecznymi kątów rombu.

Przykład 2

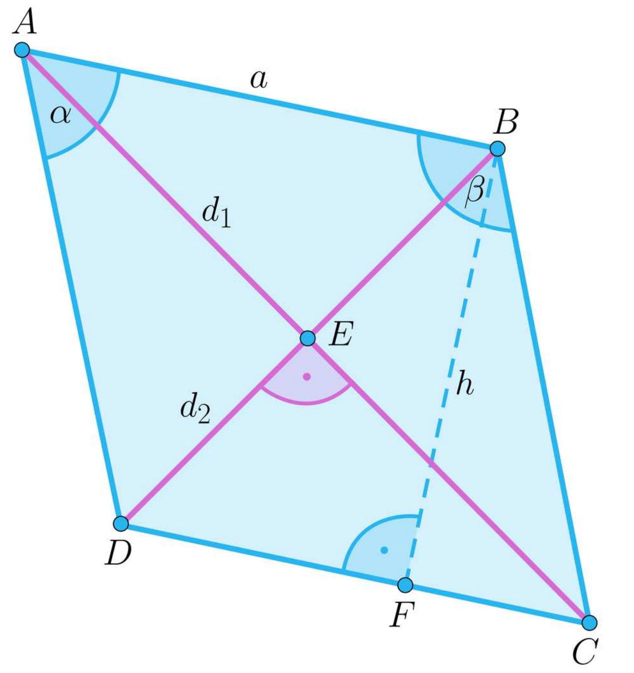
Pokażemy, że deltoid jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w połowie.

Rozwiązanie

Rzeczywiście, jeśli deltoid jest rombem to jego przekątne przecinają się w połowie.

Załóżmy, że w deltoidzie przekątne przecinają się w połowie. Wtedy jedna z nich jest podstawą trójkątów równoramiennych, na które dzieli ten deltoid. Zatem boki takiego deltoidu są równe, więc jest on rombem.

Na rysunku przedstawiony jest romb $ABCD$ z zaznaczonymi przekątnymi, kątami i wysokością. Zastosujemy oznaczenie d_1 na przekątną AC oraz d_2 na przekątną BD.



Oznaczenia z tego rysunku będą wykorzystywane dalej.

Twierdzenie: o polu rombu

1. Pole rombu jest równe $P = a \cdot h$, gdzie a jest bokiem rombu, a h jego wysokością.
2. Pole rombu o boku a i kącie α między tymi bokami jest równe $P = a^2 \cdot \sin \alpha$.
3. Pole rombu o przekątnych d_1, d_2 jest równe $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Dowód

Wzór 1 jest wzorem na pole równoległoboku.

Wzór 2. Wynika ze wzoru na pole równoległoboku $P = ab \cdot \sin \alpha$, ale w rombie $a = b$, więc $P = a^2 \cdot \sin \alpha$.

Wzór 3 jest wzorem na pole deltoidu.

Przykład 3

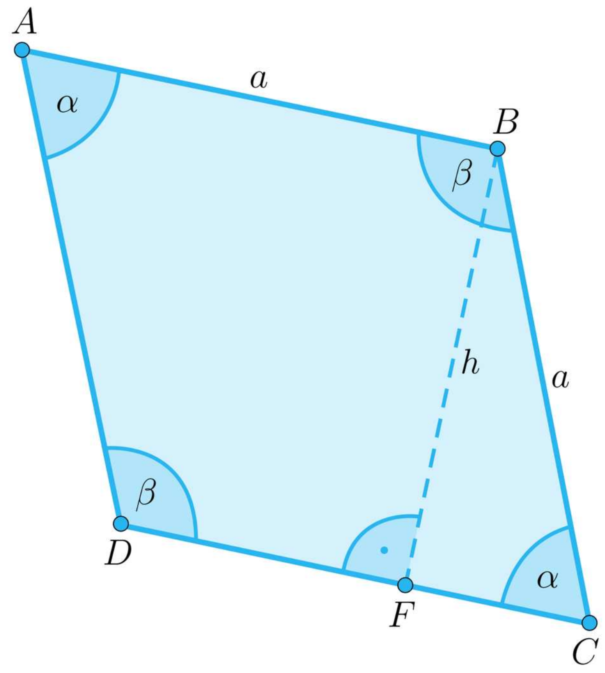
Pokażemy, że wzór $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ wynika ze wzoru na pole równoległoboku $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \gamma$.

Rozwiązanie

Ponieważ przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, to $\gamma = 90^\circ$, a stąd $\sin \gamma = 1$, więc $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Przykład 4

Bok rombu o polu 15 ma długość 5.



Wyznaczymy wysokość rombu oraz sinus kątów rombu.

Rozwiązanie

$a \cdot h = 5 \cdot h = 15$, więc $h = 3$.

Wtedy trójkąt BFC jest trójkątem prostokątnym, więc $\sin \alpha = \frac{h}{a} = \frac{3}{5}$.

Ponieważ $\alpha + \beta = 180^\circ$ to $\sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Przykład 5

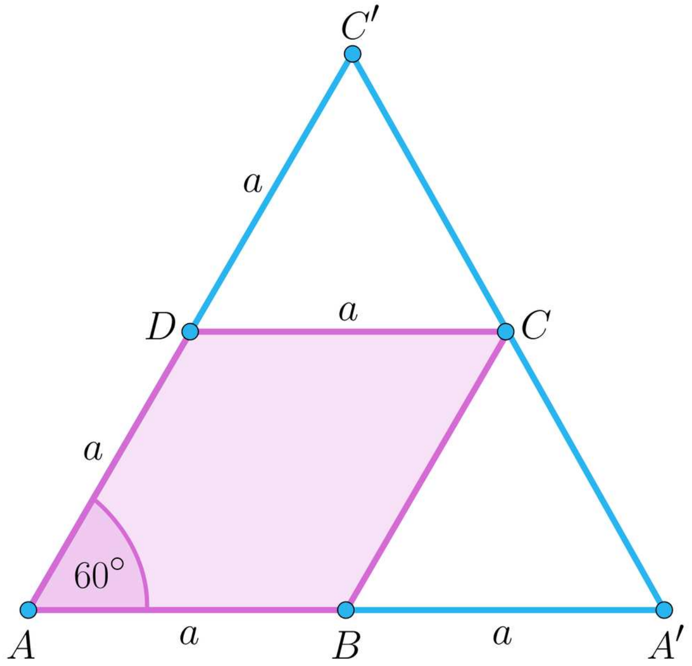
Kąt ostry w rombie o boku a ma miarę 60°. Obliczymy pole tego rombu oraz określimy związek z polem trójkąta równobocznego.

Rozwiązanie

Stosujemy wzór na pole rombu $P = a^2 \cdot \sin \alpha = a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Pole trójkąta równobocznego o boku $2a$ jest równe $a^2 \cdot \sqrt{3}$, więc pole rombu o boku a i kącie ostrym 60° jest połową pola trójkąta równobocznego o boku $2a$.

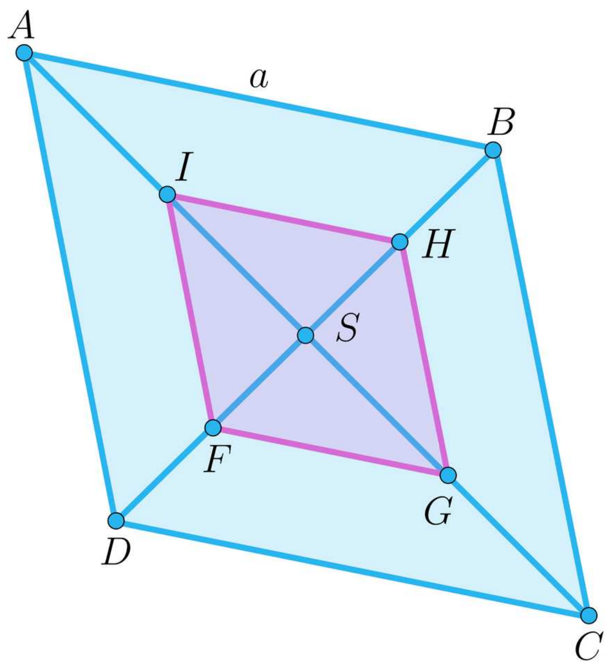
Dla utrwalenia tej własności popatrzmy na rysunek, gdzie punkty A', C' są obrazami punktu A w odbiciu symetrycznym względem punktów B i D, odpowiednio.



Wtedy bok DC łączy środki odcinków AC' i A'C', więc jego długość jest równa połowie długości boku AA'. Zastosowanie tej obserwacji również do BC prowadzi do wniosku, że trójkąt AA'C' jest trójkątem równobocznym o boku $2a$ i pole rombu $ABCD$ jest równe połowie pola tego trójkąta.

Przykład 6

Punkty F, G, H, I dzielą przekątne rombu $ABCD$ w stosunku $1 : 3$.



Pokażemy, że czworokąt $FGHI$ jest rombem i wyznaczymy stosunek pól rombów $ABCD$ i $FGHI$.

Rozwiązanie

Z podanej proporcji $1 : 3$ wynika, że punkty F, G, H, I są środkami połówek przekątnych DS, CS, BS, AS, odpowiednio. Wtedy odcinki FG, GH, HI, IF są równoległe do odpowiednich boków rombu $ABCD$ i mają długość równą połowie długości boku tego rombu. Poza tym $|IG| = \frac{|AC|}{2}$, $|FH| = \frac{|BD|}{2}$.

Zatem $FGHI$ jest rombem, a jego pole jest równe $\frac{|IG| \cdot |FH|}{2} = \frac{\frac{|AC|}{2} \cdot \frac{|BD|}{2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$.

Stąd stosunek pól rombów $ABCD$ i $FGHI$ jest równy $4 : 1$.

Przykład 7

Wyznaczymy wzór na pole rombu, gdy podana jest długość boku a i długość jednej z przekątnych d.

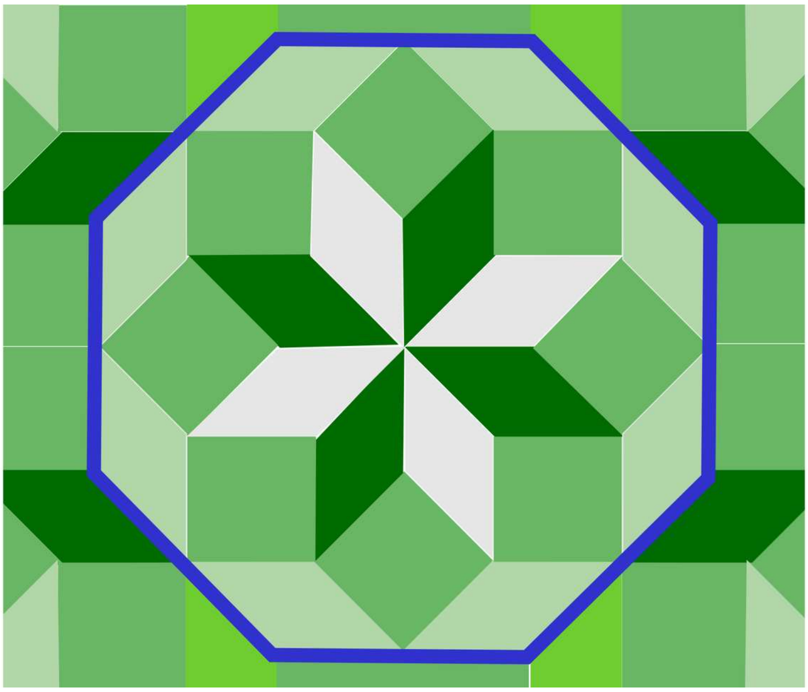
Rozwiązanie

Zauważamy, że w rombie bok i połowy przekątnych tworzą trójkąt prostokątny, w którym bok a jest przeciwprostokątną. Niech x oznacza długość drugiej przekątnej. Wtedy z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{x^2}{4}$. Stąd $x^2 = 4a^2 - d^2$ i stąd $x = \sqrt{4a^2 - d^2}$.

Teraz możemy wyznaczyć pole rombu $P = \frac{d \cdot x}{2} = \frac{d\sqrt{4a^2 - d^2}}{2}$.

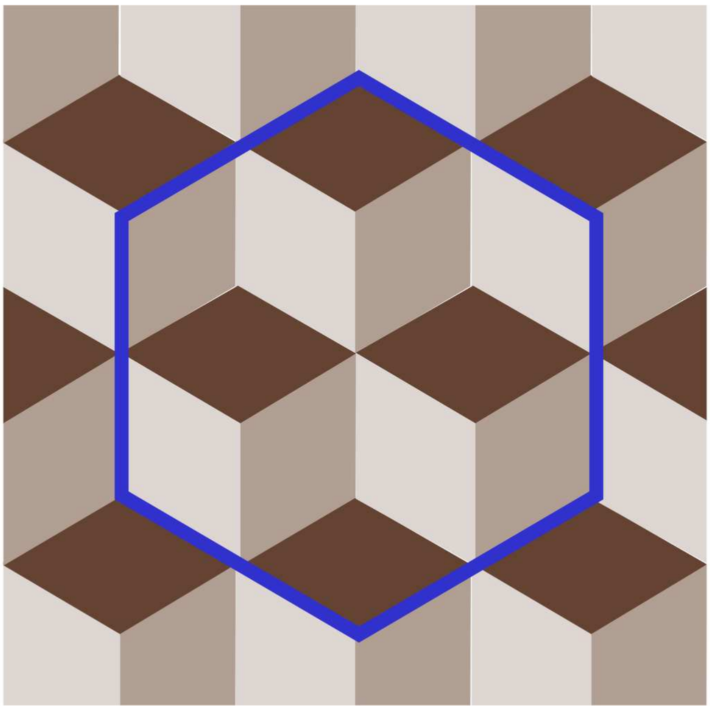
Romby w mozaikach

1. Popatrzmy na ośmiokąt foremny zaznaczony na mozaice na rysunku.



Składa się on z kwadratów i rombów, których kąt ostry jest równy $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Boki kwadratów i rombów są równe.

2. Na rysunku poniżej zaznaczony jest sześciokąt foremny.



Składa się on z rombów, których kąt ostry jest równy $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Problem 1

Ćwiczenie praktyczne w grupach 2–3 osobowych.

1. Przygotujcie (można wyciąć z papieru) romby i kwadraty o boku 5 w ilościach jak poniżej i zapiszcie jakie mają pola:
    - 10 kwadratów,
    - 20 rombów o kącie ostrym 45°,
    - 16 rombów o kącie ostrym 60°.
2. Ułóżcie z tych rombów ośmiokąt i sześciokąt przedstawione na powyższych rysunkach.
3. Wyznaczcie pola i długość boku ośmiokąta i sześciokąta.
4. Jak się zmienią pola i długości boków tych wielokątów, jeśli zbudujemy je z rombów o boku 3, 10, 256?

Słownik

równoległobok

czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych

kwadrat

czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste

romb

czworokąt, który ma wszystkie boki równe

deltoid

czworokąt wypukły, który ma dwie pary równych boków sąsiednich

sinus kąta

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta i długości przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym

wielokąt foremny

wielokąt, który ma wszystkie kąty wewnętrzne równe i wszystkie boki równej długości

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Na ekranie są trzy przyciski, każdy z nich odpowiada za inny sposób liczenia pola równoległoboku.

2. Przycisk „Dane bok i przekątna”
   2.1 przy pomocy suwaków wybierz długość boku a i przekątnej d
   2.2 otrzymasz jeden romb z dokładnością do relacji przystawania, który ma bok długości a i przekątną długości d
   2.3 obserwuj długości wysokości i drugiej przekątnej oraz kąt między bokami i wartość pola tego rombu

3. Przycisk „Dany bok i kąt między bokami”
   3.1 przy pomocy suwaka wybierz długość boku a
   3.2 poruszając punktem K ustawiasz miarę kąta α między bokami
   3.3 powstaje jeden romb z dokładnością do relacji przystawania o podanej długości boku i kącie między bokami
   3.4 obserwuj długości przekątnych, wysokości oraz wartość pola tego rombu

4. Przycisk „Dane przekątne”
   4.1 przy pomocy suwaków wybierz długości przekątnych d_1, d_2
   4.2 powstaje jeden romb z dokładnością do relacji przystawania o podanych długościach przekątnych
   4.3 obserwuj długości wysokości i boków oraz kąt między bokami i wartość pola tego rombu

5. Rezultaty działań podane są z dokładnością do części setnych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DIJP9VD81

Polecenie 2

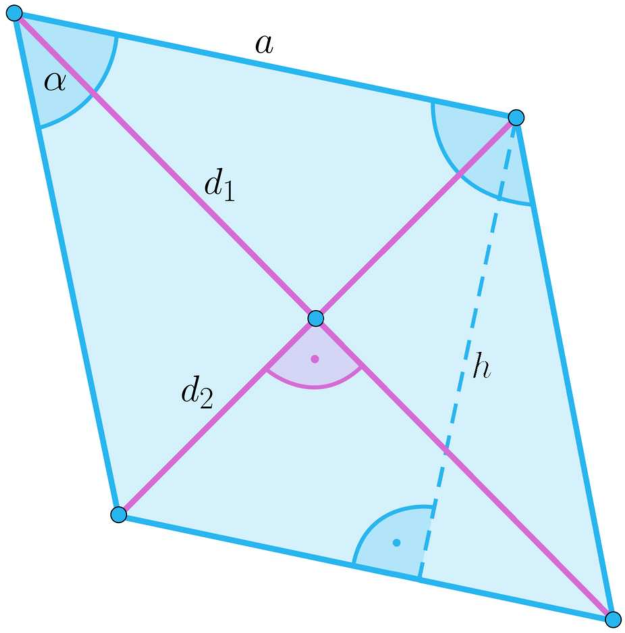
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

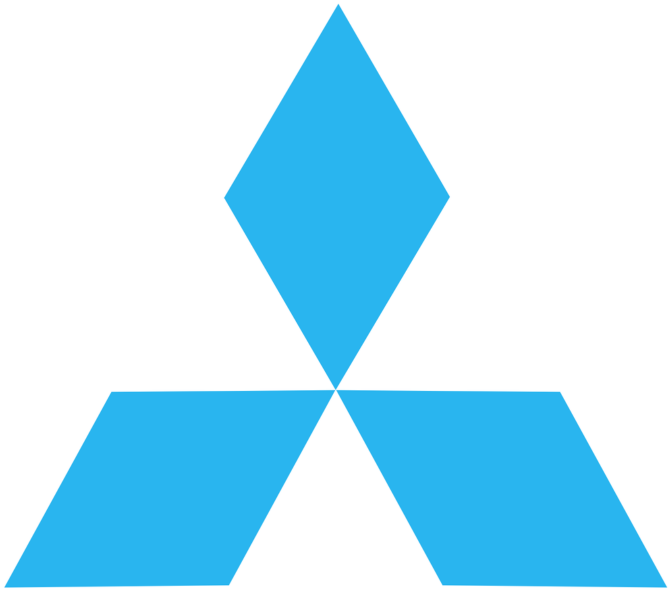
Na rysunku przedstawiony jest romb o boku a, z kątem α między jego bokami, przekątnymi d_1 i d_2 oraz wysokością h. Pole tego rombu oznaczymy literą P.



Ćwiczenie 3

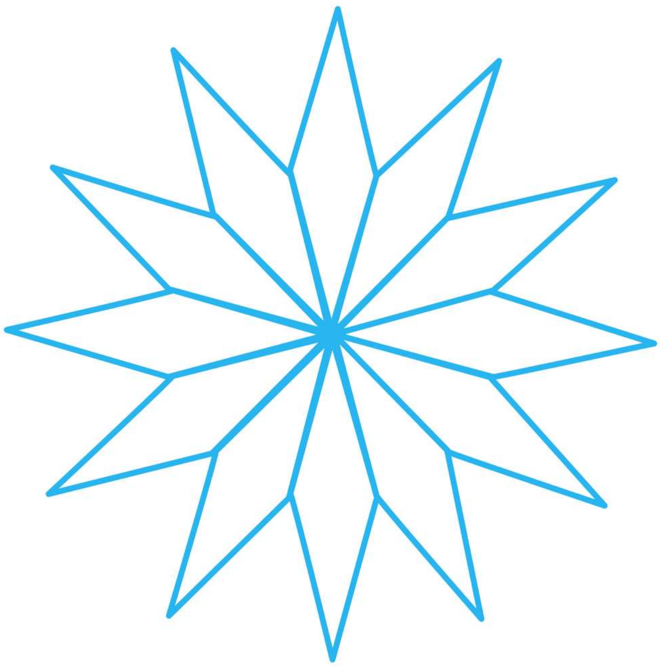
Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawione są trzy przystające romby wpisane w trójkąt równoboczny. Wyznacz pole jednego z tych rombów, jeśli wiadomo, że długość boku trójkąta wynosi 15.



Ćwiczenie 5

Oblicz pole rozety przedstawionej na rysunku przyjmując, że bok rombu ma długość a. Skorzystaj z tablic wartości sinusów w celu uzyskania przybliżonej wartości sinusa kąta.



Ćwiczenie 6

Oblicz pole rozety, która powstaje z przystających rombów o boku a, takich, że ich krótsze przekątne tworzą dwudziestokąt foremny. Skorzystaj z tablic wartości sinusów w celu uzyskania przybliżonej wartości sinusa kąta.

Ćwiczenie 7

Przekątna kwadratu o boku 1 oraz połowa drugiej przekątnej kwadratu stanowią przekątne rombu. Oblicz obwód rombu.

Ćwiczenie 8

Jak wyznaczyć a i kąty wewnętrzne rombu, jeśli dane są długości jego przekątnych d_1 i d_2.

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole rombu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°.

VIII. Planimetria.

Uczeń: Zakres podstawowy.

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje i rozpoznaje romby;

- zna wzory na pole rombu;
- wykorzystuje własności pola rombu w rozwiązywaniu zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm;
- kognitywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka;
- mapa myśli;
- interaktywna aplikacja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna:

- Nauczyciel przeprowadza pogadankę na temat zastosowania rombów w mozaikach.
- Nauczyciel podaje temat lekcji, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4 grupy. Każda z grup tworzy mapę myśli przedstawiającą podział i przykłady czworokątów wklęsłych i wypukłych. Uczniowie spisują cechy, które je różnią.
2. Nauczyciel prezentuje romb jako deltoid i równoległobok.
3. Nauczyciel wyprowadza wzór na pole rombu gdy znany jest bok i kąt między bokami lub gdy znane są długości przekątnych.
4. Uczniowie w grupach wykonują ćwiczenie praktyczne - Romby w mozaikach.
5. Wykorzystując symulację interaktywną uczniowie obliczają pole rombu.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie sprawdzają nabyte umiejętności i wiedzę wykonując ćwiczenia interaktywne.
2. Nauczyciel podsumowuje lekcję zwracając na mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa

Uczniowie projektują własną mozaikę z rombów.

Materiały pomocnicze:

Pole równoległoboku i rombu

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać symulacje interaktywną jako powtórzenie przed kartkówką.