



Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Odczytywanie z wykresu argumentów funkcji, dla których funkcja przyjmuje określone wartości. Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji zapisanych w różnej postaci, w tym także funkcji kwadratowej. Animacje - odczytywanie z wykresu argumentów funkcji dla danej wartości. Ilustracja interaktywna - odczytywanie argumentów danej funkcji. Zasób zawiera ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

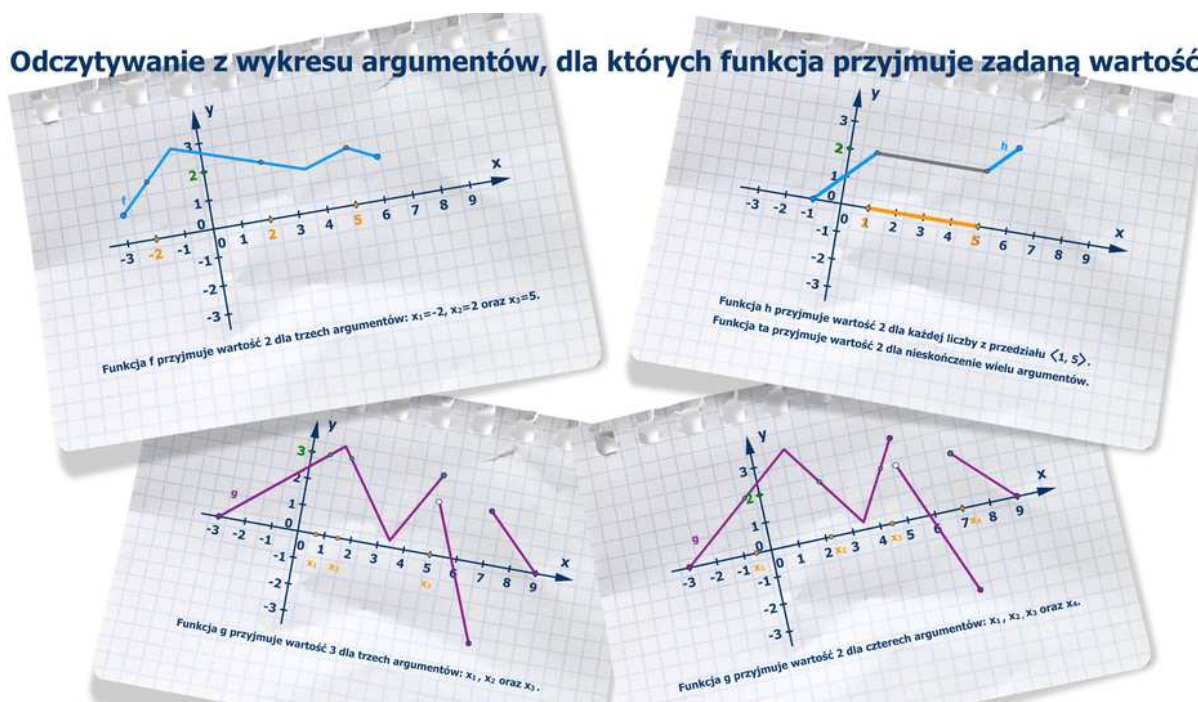
Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

W tym materiale nauczysz się znajdować argument, dla którego funkcja przyjmuje zadaną wartość. Ponadto dowiesz się, jak wyznaczać wartość funkcji, gdy dany jest jej argument. Rozwiążesz zadania dotyczące tych zagadnień. Jeżeli chcesz przypomnieć sobie podstawowe definicje dotyczące funkcji zajrzyj do materiału [Pojęcie funkcji. Zależności funkcyjne](#).

Przykład 1

Aby odczytać z wykresu, czy i dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość w , wystarczy dorysować prostą równoległą do osi X , na której leżą wszystkie punkty, których druga współrzędna jest równa w (o takiej prostej mówimy, że ma równanie $y = w$). Jeżeli taka dorysowana prosta przecina wykres danej funkcji, to odczytując pierwszą współrzędną każdego z punktów przecięcia, wyznaczymy argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość.

Odczytywanie z wykresu argumentów, dla których funkcja przyjmuje zadaną wartość



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1GOQYdV6ydwX>

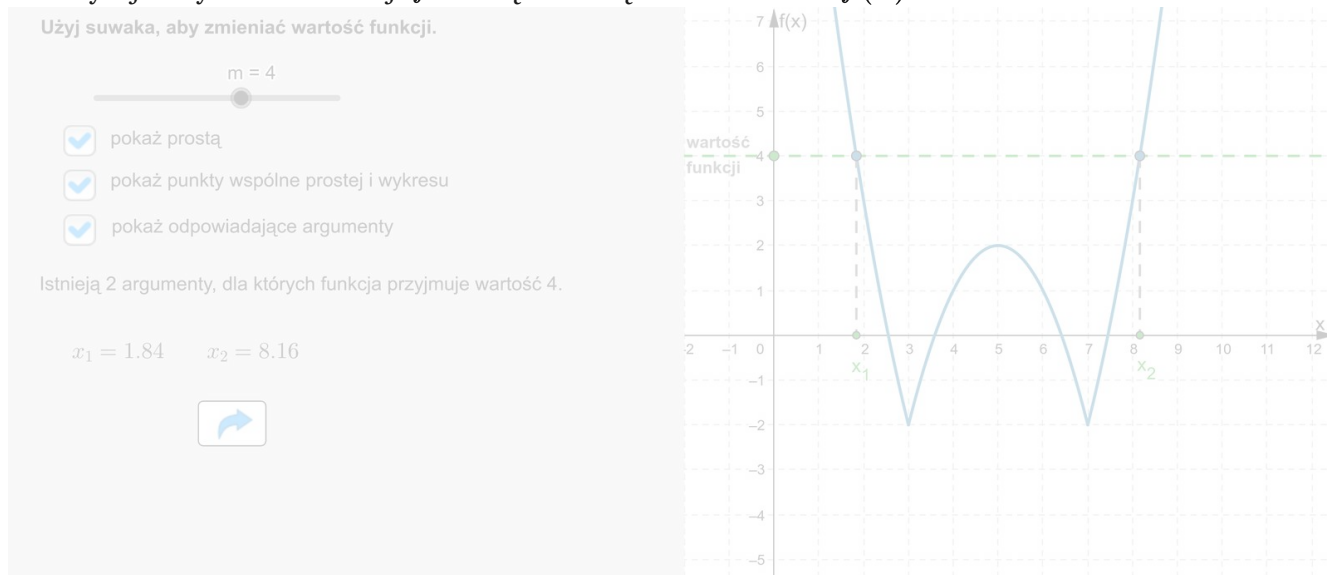
Argument i wartość funkcji. Miejsca zerowe funkcji liczbowej_atrapa_animacja_460

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje zadaną wartość.

Przykład 2

Odczytaj z wykresu funkcji f liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PT4fT9n4l>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Wyznamy wszystkie miejsca zerowe funkcji.

- $p(x) = 8 - 7x$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązujemy równanie $p(x) = 0$, a zatem $8 - 7x = 0$, skąd $7x = 8$, czyli $x = \frac{8}{7}$.

Funkcja p ma jedno miejsce zerowe $x = \frac{8}{7}$.

- $k(x) = (3x - 2)(x + 1)$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązujemy równanie $k(x) = 0$, a zatem $(3x - 2)(x + 1) = 0$. Ponieważ iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego czynników jest równy 0, więc $3x - 2 = 0$ lub $x + 1 = 0$. Stąd $x = \frac{2}{3}$ lub $x = -1$.

Funkcja k ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = -1$.

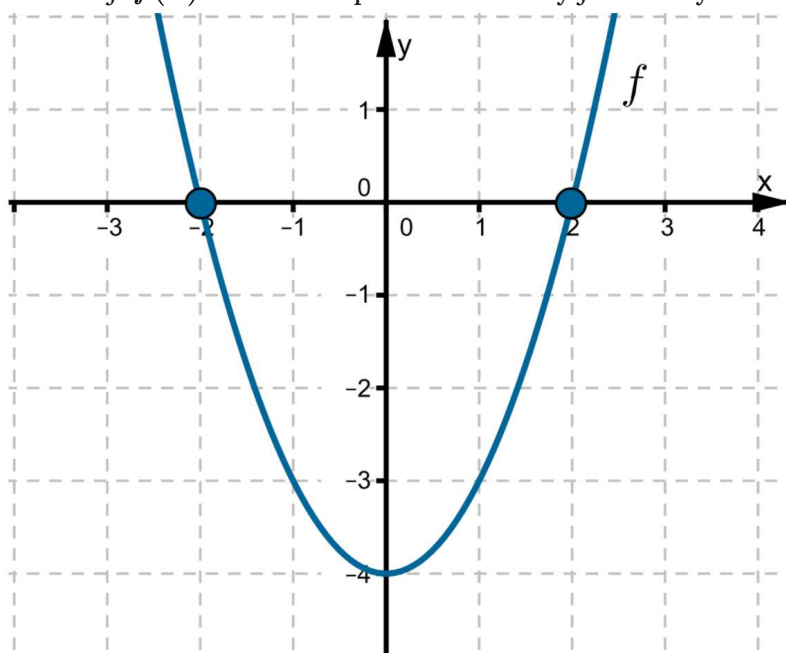
- $f(x) = x^2 - 4$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$, a zatem $x^2 - 4 = 0$. Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, zapisujemy równanie w postaci $(x - 2)(x + 2) = 0$, a więc $x - 2 = 0$ lub $x + 2 = 0$. Wynika z tego, że $x = 2$ lub $x = -2$.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = 2$ oraz $x_2 = -2$.

Fragment wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4$ przedstawiony jest na rysunku.



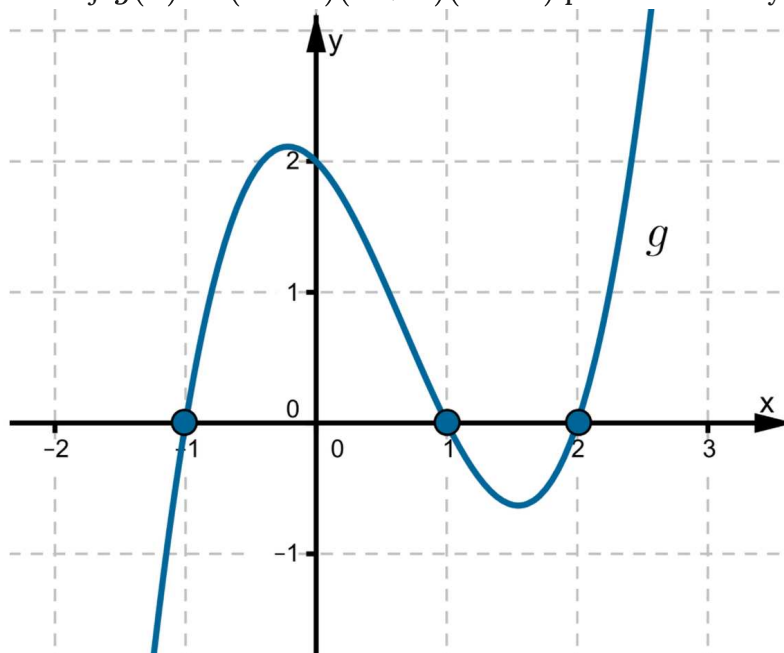
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- $g(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązujemy równanie $g(x) = 0$, a zatem $(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$, skąd $x - 1 = 0$ lub $x + 1 = 0$ lub $x - 2 = 0$. Wynika z tego, że funkcja g ma 3 miejsca zerowe: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ oraz $x_3 = 2$.

Fragment wykresu funkcji $g(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$ przedstawiony jest na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

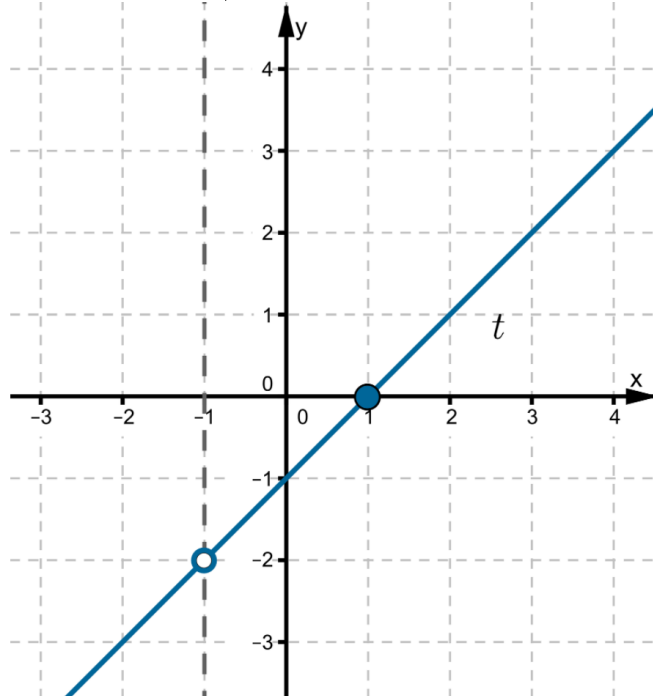
- $t(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Dziedziną funkcji t jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby -1 .

Zauważmy, że dla $x \neq -1$ funkcję t można zapisać w postaci

$$t(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1. \text{ Jedynym miejscem zerowym funkcji } t \text{ jest zatem } x = 1.$$

Fragment wykresu funkcji $t(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ przedstawiony jest na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$\bullet \quad m(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

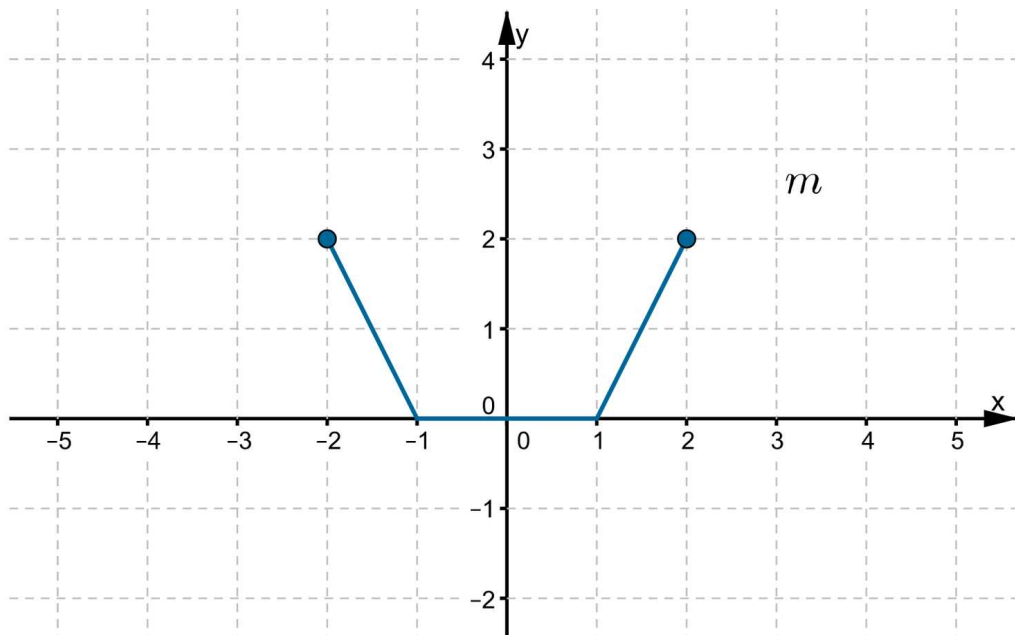
Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle -2, 2 \rangle$.

Zauważmy, że:

- Jeżeli $x \in \langle -2, -1 \rangle$, to $m(x) = -2x - 2$. Rozwiązujemy równanie $m(x) = 0$, a zatem $-2x - 2 = 0$, skąd $x = -1$. Ale -1 nie należy do przedziału $\langle -2, -1 \rangle$, zatem w tym przedziale funkcja m nie ma miejsc zerowych;
- Ponieważ dla $x \in \langle -1, 1 \rangle$ funkcja m dana jest wzorem $m(x) = 0$, to każda liczba z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ jest miejscem zerowym tej funkcji;
- Jeżeli $x \in (1, 2]$, to $m(x) = 2x - 2$. Rozwiązujemy równanie $m(x) = 0$, a więc $2x - 2 = 0$, skąd $x = 1$. Ale 1 nie należy do przedziału $(1, 2]$, zatem w tym przedziale funkcja m nie ma miejsc zerowych.

A zatem każda liczba rzeczywista z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ jest miejscem zerowym funkcji m . Funkcja m ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Cały wykres funkcji m przedstawiony jest na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej dodatniej przyporządkowuje liczbę o 30% od niej mniejszą. Obliczmy, dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość 14.

Oznaczmy taką liczbę rzeczywistą przez x . Przyporządkowanie opisane w treści zadania zapisujemy wzorem $f(x) = x - 30\%x = x - 0,3x = 0,7x$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Szukamy argumentu, dla którego $f(x) = 14$, a więc $0,7x = 14$, skąd $x = \frac{14}{0,7} = 20$.

Jedynym argumentem, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 14, jest $x = 20$.

Przykład 5

Wyznamy wszystkie argumenty, dla których funkcja $g(x) = \frac{x^2 - 4x}{2}$ przyjmuje wartość -2 .

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązujemy równanie $g(x) = -2$

$$\frac{x^2 - 4x}{2} = -2$$

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy. Wtedy $(x - 2)^2 = 0$,

czyli $x - 2 = 0$, a zatem $x = 2$.

Wobec tego funkcja $g(x) = \frac{x^2 - 4x}{2}$ przyjmuje wartość -2 tylko wtedy, gdy $x = 2$.

Przykład 6

Wyznamy wszystkie argumenty, dla których funkcja $k(x) = \frac{2}{x+1}$ przyjmuje wartość $\frac{1}{3}$.

Najpierw ustalimy dziedzinę funkcji k . Jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych różnych od -1 .

Rozwiązujemy równanie $k(x) = \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

Z własności proporcji $x + 1 = 2 \cdot 3$,

czyli $x = 5$.

A zatem funkcja $k(x) = \frac{2}{x+1}$ przyjmuje wartość $\frac{1}{3}$ tylko wtedy, gdy $x = 5$.

Przykład 7

Funkcja P każdej dodatniej liczbie rzeczywistej a przyporządkowuje pole trójkąta równobocznego o boku a . Obliczymy a , dla którego funkcja P osiąga wartość $\sqrt{3}$.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego, ustalamy wzór funkcji P :

$$P(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \text{ dla } a > 0.$$

Rozwiązujemy równanie $P(a) = \sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3} \quad \left| \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \right.$$

$$a^2 = 4.$$

Ponieważ a jest liczbą dodatnią, to korzystamy z definicji pierwiastka kwadratowego, skąd $a = \sqrt{4} = 2$.

A zatem P osiąga wartość $\sqrt{3}$ dla $a = 2$.

Przykład 8

Funkcje: $a(n) = n(2n - 3)(n - 4)$ i $b(n) = -3n^2 + 1$ określone są na zbiorze dodatnich liczb całkowitych.

- Obliczymy miejsce zerowe funkcji a .

Rozwiązujemy równanie $a(n) = 0$, a więc $n(2n - 3)(n - 4) = 0$, skąd $n = 0$ lub $2n - 3 = 0$ lub $n - 4 = 0$, czyli $n = 0$ lub $n = \frac{3}{2}$ lub $n = 4$. Spośród tych trzech liczb

jedynie 4 jest liczbą całkowitą dodatnią, a zatem funkcja a ma tylko jedno miejsce zerowe, $n = 4$.

- Wyznamy wszystkie argumenty, dla których funkcja b przyjmuje wartość -26 .

Rozwiązujemy równanie $b(n) = -26$

$$-3n^2 + 1 = -26$$

$$-3n^2 = -26 - 1$$

$$-3n^2 = -27 \mid : (-3)$$

$$n^2 = 9.$$

Ponieważ n jest liczbą dodatnią, to korzystamy z definicji pierwiastka kwadratowego, skąd

$$n = \sqrt{9} = 3.$$

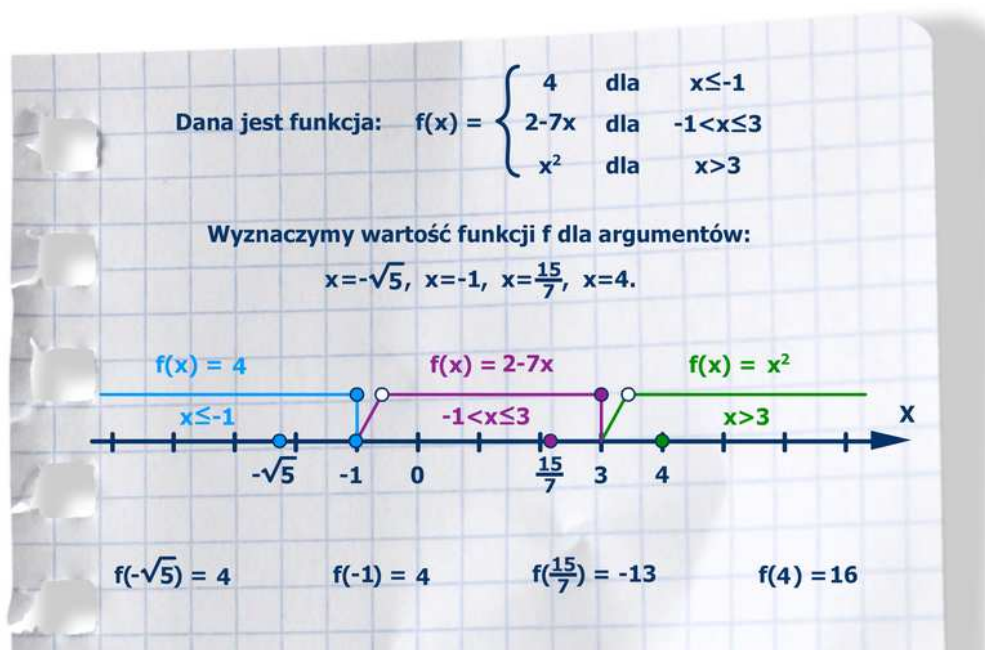
Wynika z tego, że funkcja b przyjmuje wartość -26 tylko wtedy, gdy $n = 3$.

Przykład 9

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ 2 - 7x & \text{dla } -1 < x \leq 3. \\ x^2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

Wyznamy wartości funkcji f dla argumentów:

$$x = -\sqrt{5}, x = -1, x = \frac{15}{7}, x = 4.$$



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1QX0qCcqgnsD>

Argument i wartość funkcji. Miejsca zerowe funkcji liczbowej_atrapa_animacja_1154

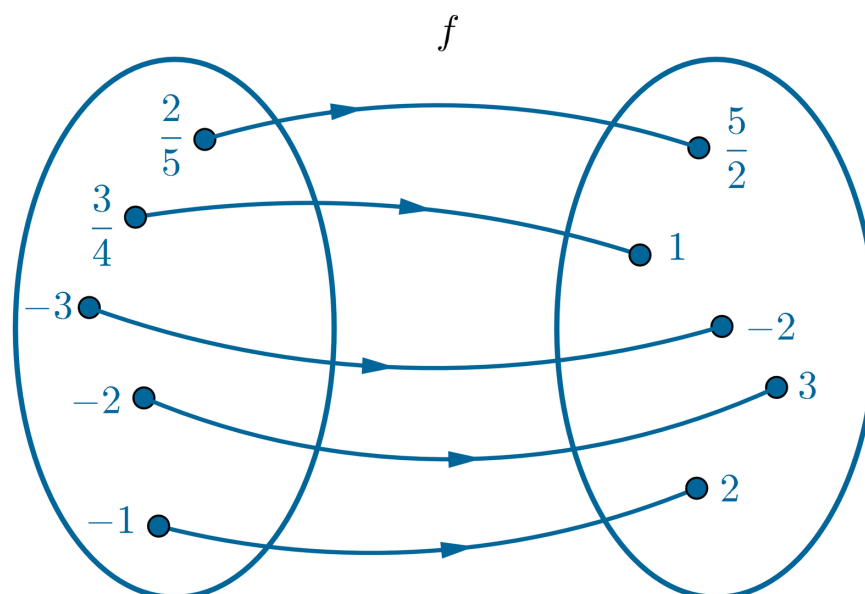
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje jak obliczyć wartości funkcji $f(x)$ dla podanych argumentów.

Ćwiczenie 1



Funkcję f przedstawiono za pomocą grafu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wskaż wszystkie prawdziwe równości.

☐ $\frac{2}{5} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) = 1$

☐ $f(-1) = 2$

☐ $f(-2) = -3$

☐ $f(-3) + f(-1) = 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Funkcję g przedstawiono za pomocą tabelki.

Funkcja g

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	2	4	-1	0	-2	2

Wskaż prawidłowe dokończenie poniższego zdania:

Funkcja g

☐ dla każdego argumentu ujemnego przyjmuje wartość dodatnią.

☐ ma dwa miejsca zerowe.

☐ przyjmuje wartość 3.

☐ dla $x = 0$ przyjmuje wartość 1.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Funkcja i każdej dodatniej liczbie dwucyfrowej przyporządkowuje iloraz tej liczby przez sumę jej cyfr. Wskaż wszystkie stwierdzenia prawdziwe.

☐ $i(20) < i(21)$

☐ $i(35)$ jest liczbą całkowitą

☐ $i(10) = 10$

☐ $i(24) = 4$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Rozpatrzmy funkcję $g(x) = \frac{3-2x}{5}$. Uzupełnij zdanie tak, aby było zdaniem prawdziwym. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Funkcja g

☐ ma jedno miejsce zerowe.☐ nie przyjmuje wartości 2.☐ dla $x = 7$ przyjmuje wartość całkowitą.☐ dla $x = -1$ przyjmuje wartość 1.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Funkcja z każdej dodatniej liczbie całkowitej n przyporządkowuje liczbę o 1 mniejszą od dwukrotności liczby n . Wtedy:

☐ do zbioru wartości funkcji z należy liczba 333.

☐ $z(5) = 4$.

☐ funkcja z nie ma miejsc zerowych.

☐ $z(2) = z(3)$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Oznaczmy przez $P(a)$ pole powierzchni sześcianu o krawędzi długości a .

- Oblicz $P\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Wykaż, że $P\left(\sqrt{2}\right) > 10$.
- Wyznacz a , dla którego $P(a)$ przyjmuje wartość 6.
- Wyznacz a , dla którego $P(a)$ przyjmuje wartość 30.

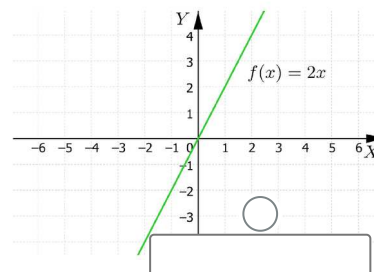
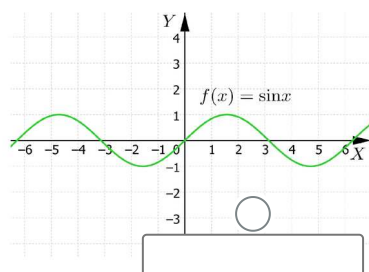
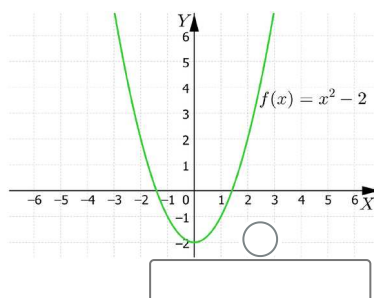
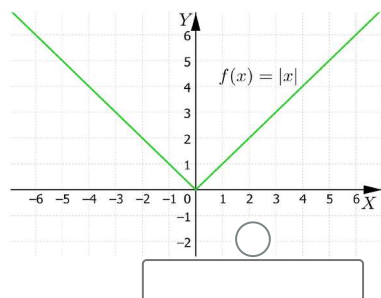
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



W każdym z podpunktów odczytaj z wykresów zbiory wartości poszczególnych funkcji. Odpowiedni zbiór przesunij w okrągłe pole na każdym z rysunków.

a)



$$ZW_f = \langle 0, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = \langle 1, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = \langle -1, 1 \rangle$$

$$ZW_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$ZW_f = \{2\}$$

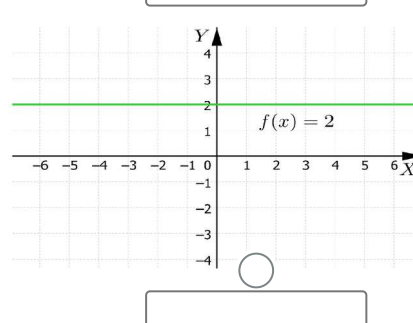
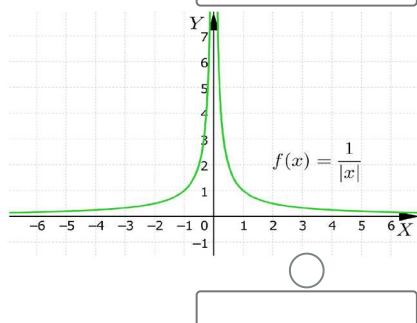
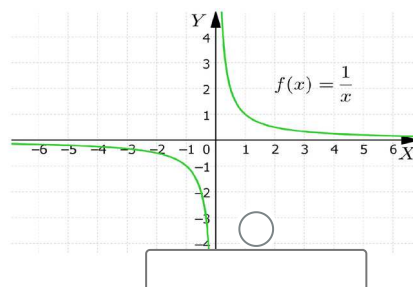
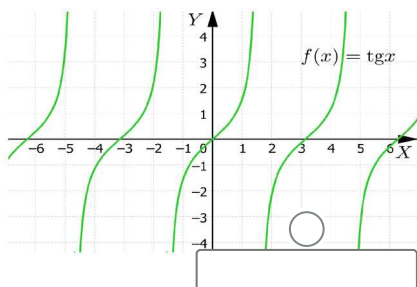
$$ZW_f = (0, +\infty)$$

$$ZW_f = \langle -2, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = \mathbb{R}$$

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

b)



$$ZW_f = \langle 2, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = \langle 0, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = (0, +\infty)$$

$$ZW_f = \langle 1, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

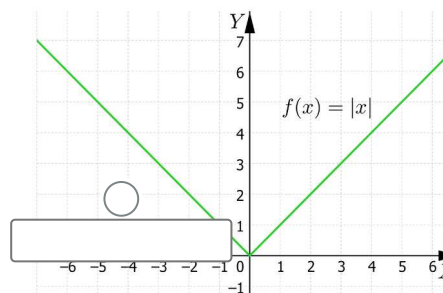
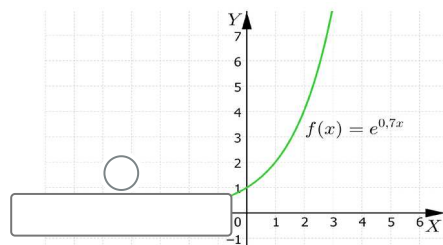
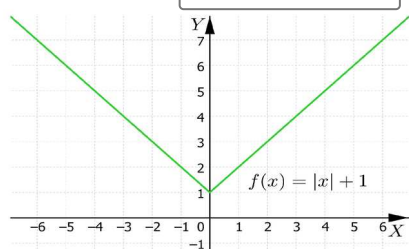
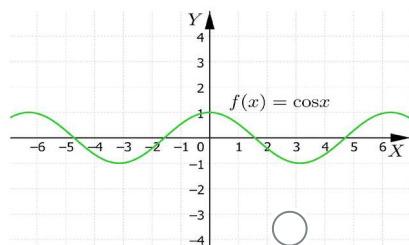
$$ZW_f = \langle -1, 1 \rangle$$

$$ZW_f = \{2\}$$

$$ZW_f = \mathbb{R}$$

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

c)



$$ZW_f = \langle 2, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$ZW_f = \langle 0, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = \{2\}$$

$$ZW_f = \langle -1, 1 \rangle$$

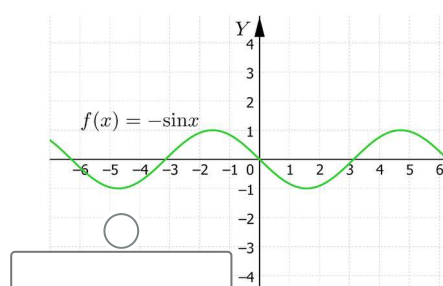
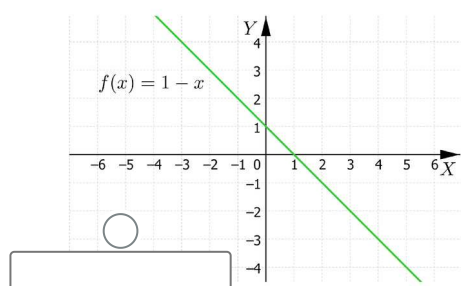
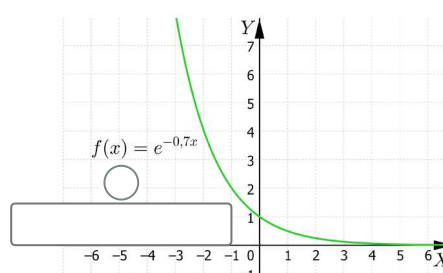
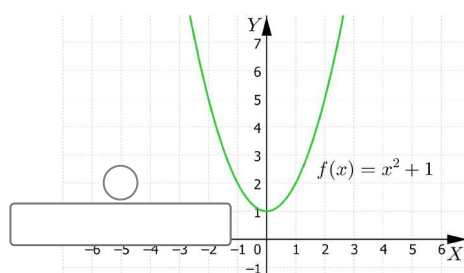
$$ZW_f = \langle 1, +\infty \rangle$$

$$ZW_f = (0, +\infty)$$

$$ZW_f = \mathbb{R}$$

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

d)



$ZW_f = \{2\}$

$ZW_f = \langle 0, +\infty \rangle$

$ZW_f = (0, +\infty)$

$ZW_f = \langle -1, 1 \rangle$

$ZW_f = \mathbb{R}$

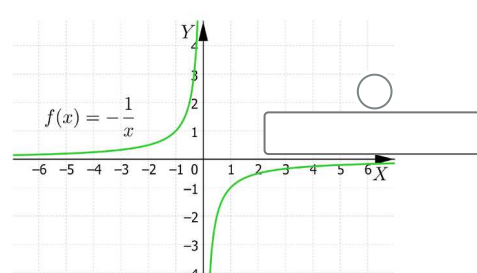
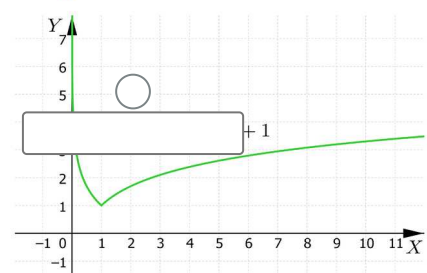
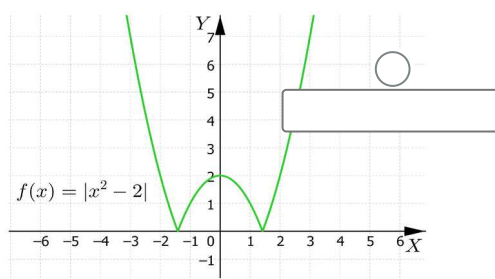
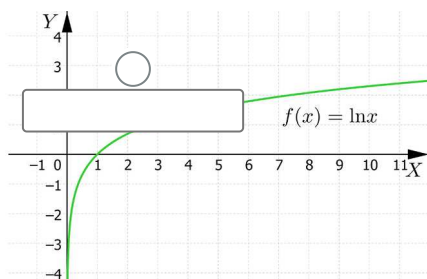
$ZW_f = \langle 1, +\infty \rangle$

$ZW_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$ZW_f = \langle 2, +\infty \rangle$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

e)



$ZW_f = \{2\}$

$ZW_f = \mathbb{R}$

$ZW_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$ZW_f = \langle 2, +\infty \rangle$

$ZW_f = \langle 0, +\infty \rangle$

$ZW_f = \langle -1, 1 \rangle$

$ZW_f = \langle 1, +\infty \rangle$

$ZW_f = (0, +\infty)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Dziedziną funkcji $a(n) = 7n - 2$ jest zbiór liczb naturalnych. Zaznacz wszystkie liczby, które należą do zbioru wartości funkcji a .

☐ 15

☐ 1000

☐ 5

☐ 110

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Zaznacz parametr m , dla którego miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m + 2)x^2 - mx + 8$ jest liczba -1 .

☐ $m = -5$

☐ $m = 8$

☐ $m = 0$

☐ $m = -1$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Funkcja f jest określona wzorem

$$\begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ 7 - 2x & \text{dla } 2 < x < 5 \end{cases}$$

Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość -5 ? Przeciągnij w lukę prawidłową odpowiedź.

$f(x) = -5$ tylko wtedy, gdy $x =$

8

6

-4

-6

-8

4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n przez $s(n)$ oznaczamy sumę n początkowych liczb całkowitych dodatnich, to znaczy $s(n) = 1 + 2 + \dots + n$.

- a. Oblicz $s(10)$.
- b. Znajdź n , dla którego $s(n) = 66$.
- c. Wykaż, że nie istnieje n , dla którego $s(n) = 60$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Długość boku kwadratu $ABCD$ jest równa 4. Punkt E leży na przekątnej AC kwadratu, przy czym $|AE| = x$. Dla jakiej wartości x pole P trójkąta ABE jest równe $3\sqrt{2}$? Wpisz w lukę prawidłową odpowiedź.

Dla wartości $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.