Asymptoty pionowe wykresu funkcji

Asymptoty pionowe wykresu funkcji

Źródło: Gerd Altmann z Pixabay, domena publiczna.

Z niektórymi krzywymi związane są pewne proste, które pozwalają lepiej przybliżyć kształt tych krzywych. Proste te nazywamy asymptotami. Są trzy rodzaje asymptot: pionowe, poziome i ukośne. Asymptoty nie są częścią wykresu, stanowią jedynie linie pomocnicze przy szkicowaniu wykresów. Słowo asymptota pochodzi z języka greckiego i oznacza „nie łączące się”. Terminu asymptota jako linii, która nie przecina gałęzi hiperboli, użył po raz pierwszy Apoloniusz z Pergi (ok. 260 p.n.e. - ok. 190 p.n.e.).

Twoje cele

- Poznasz definicję asymptoty pionowej.
- Obliczysz granicę funkcji w punkcie.
- Utrwalisz umiejętność obliczania granic niewłaściwych funkcji w punkcie.
- Dowiesz się, jak zapisać równanie asymptoty pionowej.

Przeczytaj

Asymptota

Asymptotą krzywej $y = f(x)$ jest prosta, do której coraz bardziej zbliża się krzywa, gdy wzdłuż niej się przemieszczamy.

Zajmiemy się asymptotami pionowymi wykresu funkcji.

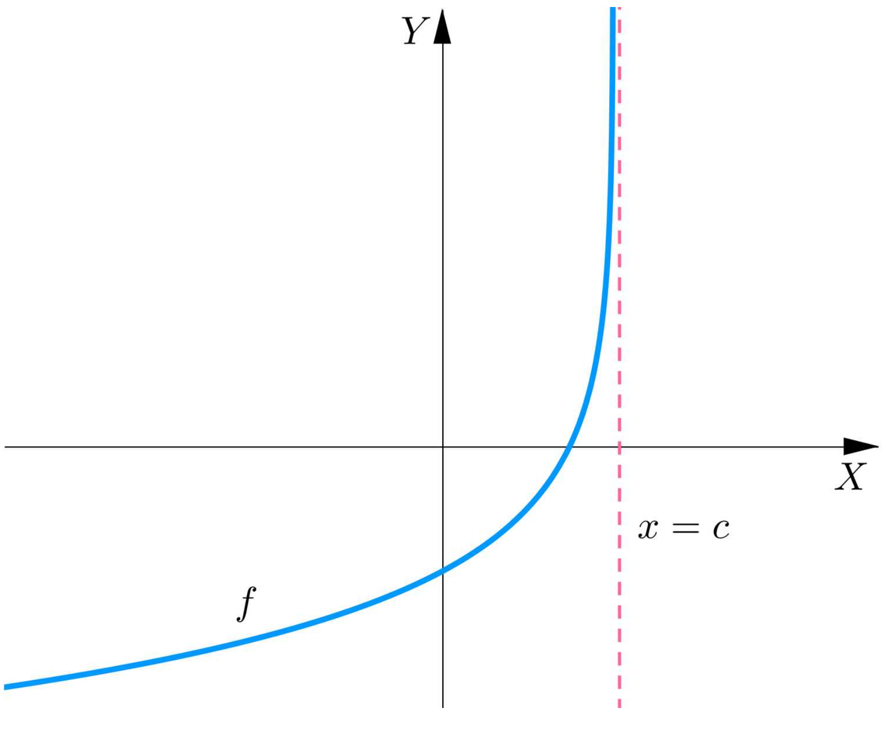
Analizujemy funkcję określoną w otoczeniu punktu c.

Granica danej funkcji może zależeć od tego, czy zbliżamy się do punktu c od lewej lub prawej strony. Odpowiednie granice oznaczamy wówczas symbolami:

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ - granica lewostronna, lim $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ - granica prawostronna.

Jeżeli granica lewostronna funkcji f jest równa granicy prawostronnej, to wówczas funkcja ma w punkcie c granicę obustronną.

Spójrzmy na wykres funkcji poniżej.

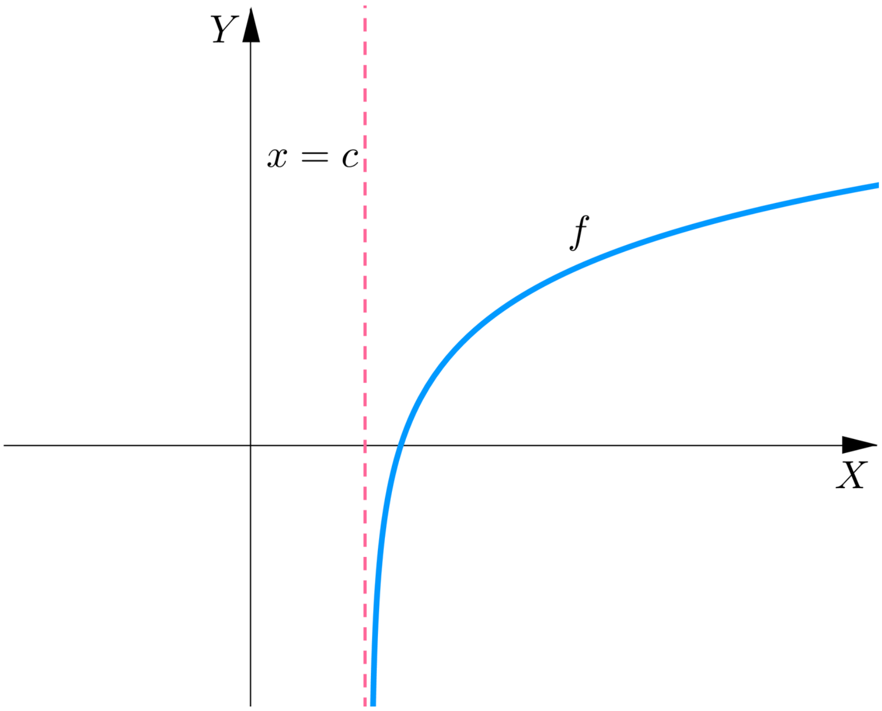


Wykres funkcji „zbliża się” z „lewej strony” do prostej o równaniu $x = c$, co możemy zapisać następująco: $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty$.

Definicja: asymptota pionowa lewostronna

> Prosta $x = c$ jest asymptotą pionową lewostronną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ albo $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$.

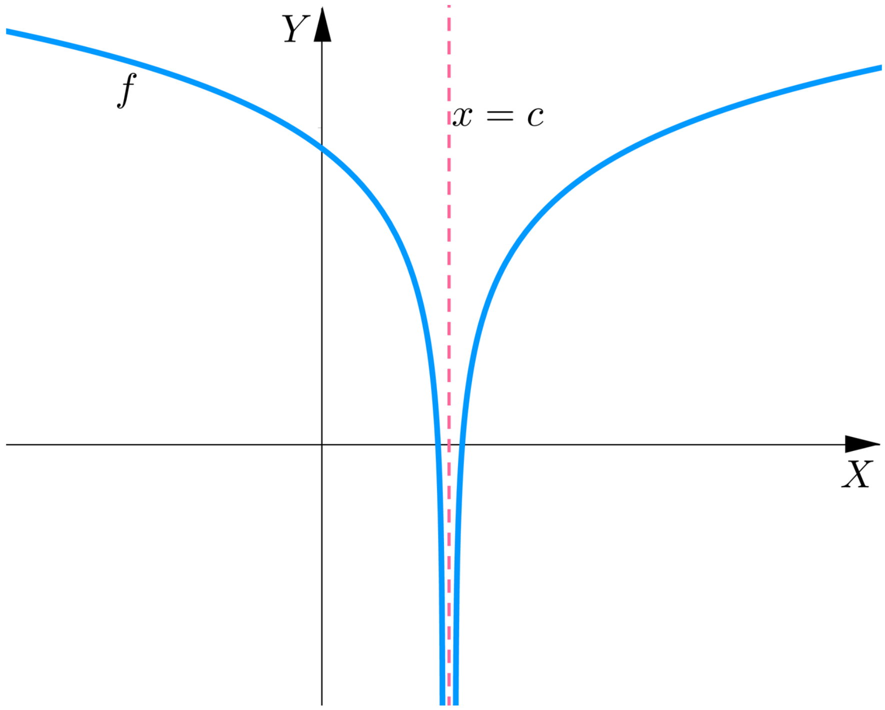
Przeanalizujemy teraz wykres funkcji poniżej.



Wykres funkcji „zbliża się” z „prawej strony” do prostej o równaniu $x = c$, co możemy zapisać następująco: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$.

> **Definicja: asymptota pionowa prawostronna**
>
> Prosta $x = c$ jest asymptotą pionową prawostronną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ albo $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$.

Wykres funkcji przedstawionej na rysunku poniżej ma asymptotę pionową obustronną.



Definicja: asymptota pionowa obustronna

Prosta $x = c$ jest asymptotą pionową obustronną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy prosta $x = c$ jest równocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną krzywej $y = f(x)$.

Jeśli funkcja f jest określona co najmniej w jednostronnym sąsiedztwie punktu c, to prosta $x = c$ jest asymptotą pionową tej funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z granic,
$\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ albo $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$, jest niewłaściwa.

Przykład 1

Zbadamy, czy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ ma asymptotę pionową lewostronną lub prawostronną.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ jest nieokreślona, gdy $x = 2$, mamy bowiem wtedy $x - 2 = 0$, a zatem dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Obliczamy granicę lewostronną i prawostronną funkcji, dla $x = 2$.

Ważne!

Wykres funkcji ma asymptotę pionową lewostronną lub prawostronną o równaniu $x = c$ tylko wtedy, gdy granica lewostronna lub prawostronna tej funkcji w punkcie c jest granicą niewłaściwą.

Zatem asymptotą pionową lewostronną lub prawostronną może być tylko prosta o równaniu $x = 2$.

Zbadamy więc istnienie granic: $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x-2}$ oraz $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x-2}$.

Chcąc określić własności funkcji w punktach, w których funkcja jest nieokreślona, korzystamy z nieformalnych równości, np.:

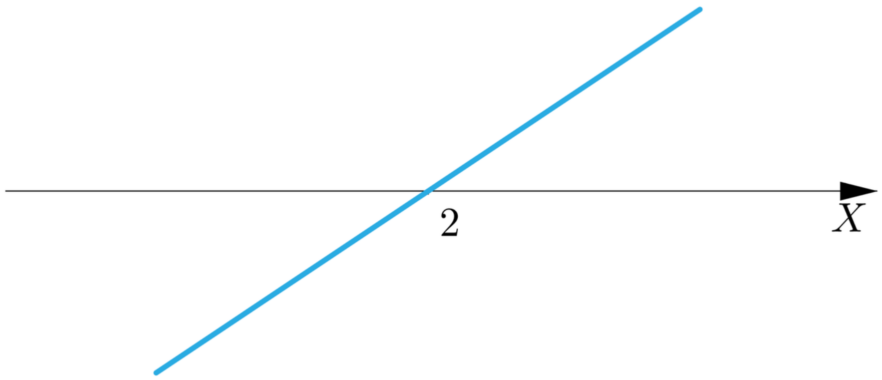
$\frac{1}{0^+} = +\infty$, im mniejszy jest dodatni mianownik, tym większy jest ułamek, stąd $+\infty$, oraz

$\frac{1}{0^-} = -\infty$, im większy jest ujemny mianownik, tym mniejszy jest ułamek, stąd $-\infty$.

Liczymy granicę lewostronną danej funkcji w punkcie $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x-2}$.

Zpis $x \to 2^-$ oznacza, że przybliżamy się do 2, ale wybierając ciąg argumentów mniejszych niż 2 („podchodzimy do 2 z lewej strony"). Oznacza to, że wartość funkcji $x - 2$ dla tych argumentów zmierzają do zera i są liczbami ujemnymi.

Pomocny może być szkic wykresu funkcji $y = x - 2$, na którym zobaczymy zachowanie funkcji w sąsiedztwie punktu 2 :



Widzimy, że po lewej stronie od 2, funkcja $y = x - 2$ przyjmuje wartości ujemne.

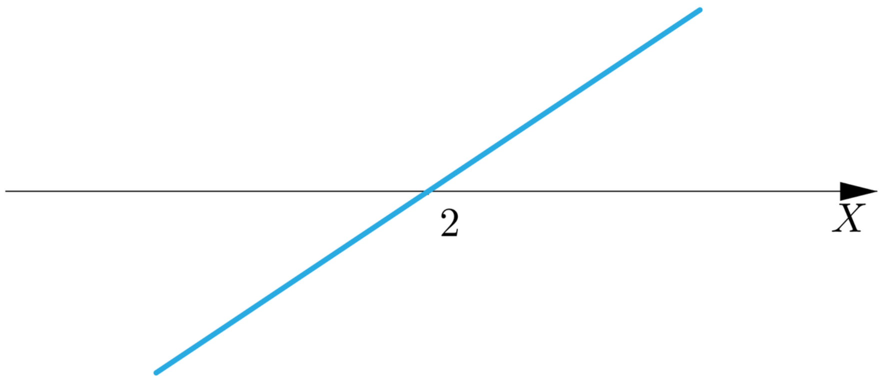
$x \to 2^-$, zatem $x - 2 \to 0^-$, stąd $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \left\{ \frac{2-3}{0^-} \right\} = \left\{ \frac{-1}{0^-} \right\} = +\infty$.

Prosta o równaniu $x = 2$ jest asymptotą pionową lewostronną wykresu funkcji, gdyż: $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x-2} = +\infty$.

Liczymy granicę prawostronną funkcji w $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x-2}$.

Zpis $x \to 2^+$ oznacza, że przybliżamy się do 2, ale wybierając ciąg argumentów większych niż 2 („podchodzimy do 2 z prawej strony"). Oznacza to, że wartość funkcji $x - 2$ dla tych argumentów zmierzają do zera i są liczbami dodatnimi.

Pomocny może być szkic wykresu funkcji $y = x - 2$, na którym zobaczymy zachowanie funkcji w sąsiedztwie punktu 2 :



Widzimy, że po prawej stronie od 2 funkcja $y = x - 2$ przyjmuje wartości dodatnie.

$x \to 2^+$, zatem $x - 2 \to 0^+$, stąd $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \left\{ \frac{2-3}{0^+} \right\} = \left\{ \frac{-1}{0^+} \right\} = -\infty$.

Prosta o równaniu $x = 2$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji, gdyż: $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$.

Wykazaliśmy, że prosta o równaniu $x = 2$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

Przykład 2

Podamy równania asymptot pionowych wykresu funkcji $f(x) = \frac{x+5}{16-x^2}$.

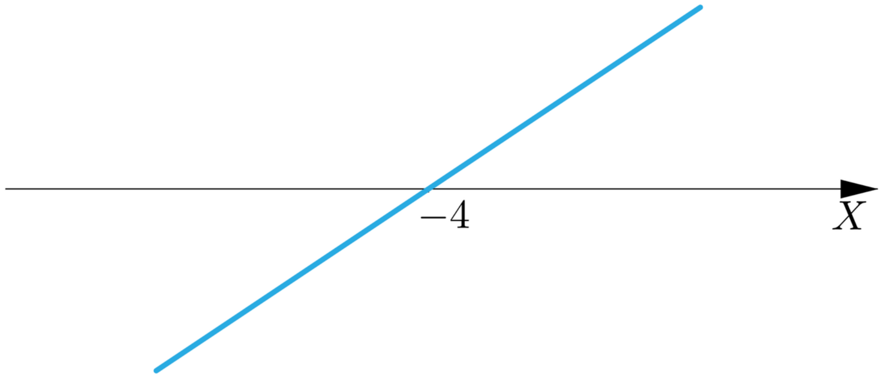
Rozwiązanie:

Mianownik rozkładamy na czynniki korzystając ze wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$f(x) = \frac{x+5}{16-x^2} = \frac{x+5}{(4-x)(4+x)}$.

Funkcja $f(x) = \frac{x+5}{(4-x)(4+x)}$ jest nieokreślona dla $x = 4$ i $x = -4$, mamy bowiem wówczas $(4-x)(4+x) = 0$. Dziedziną tej funkcji jest więc zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$.

Obliczamy granicę lewostronną i prawostronną funkcji, dla $x = -4$. Funkcja $y = 4 + x$ jest rosnąca w zbiorze $y = 4 + x$, więc po lewej stronie -4 przyjmuje wartości ujemne, a po prawej wartości dodatnie.



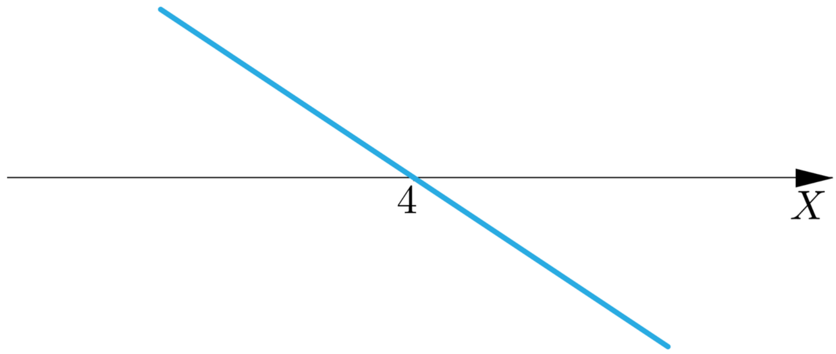
$$\lim_{x\to -4^-} \frac{x+5}{(4-x)(4+x)} = \left\{\frac{-4+5}{(4-(-4))0^-}\right\} = \left\{\frac{1}{8\cdot 0^-}\right\} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -4^+} \frac{x+5}{(4-x)(4+x)} = \left\{\frac{-4+5}{(4-(-4))0^+}\right\} = \left\{\frac{1}{8\cdot 0^+}\right\} = +\infty.$$

Prosta $x = -4$ jest asymptotą obustronną funkcji.

Obliczamy granicę lewostronną i prawostronną funkcji, dla $x = 4$.

Funkcja $y = 4 - x$ jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R}$, więc po lewej stronie 4 przyjmuje wartości dodatnie, a po prawej wartości ujemne.



$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x+5}{(4-x)(4+x)} = \left\{\frac{4+5}{0^+(4+4)}\right\} = \left\{\frac{9}{0^+\cdot 8}\right\} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x+5}{(4-x)(4+x)} = \left\{\frac{4+5}{0^-(4+4)}\right\} = \left\{\frac{9}{0^-\cdot 8}\right\} = -\infty.$$

Prosta $x = 4$ jest asymptotą obustronną funkcji.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{x+5}{(4-x)(4+x)}$ ma dwie asymptoty pionowe: $x = -4$ oraz $x = 4$.

Przykład 3

Zbadamy, czy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x^3-1}{-x^2+1}$ ma asymptotę lewostronną lub prawostronną.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Asymptotą pionową lewostronna lub prawostronną może być prosta o równaniu $x = -1$ lub prosta o równaniu $x = 1$.

Licznik rozkładamy na czynniki korzystając ze wzoru:

$a^3 - 1 = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$.

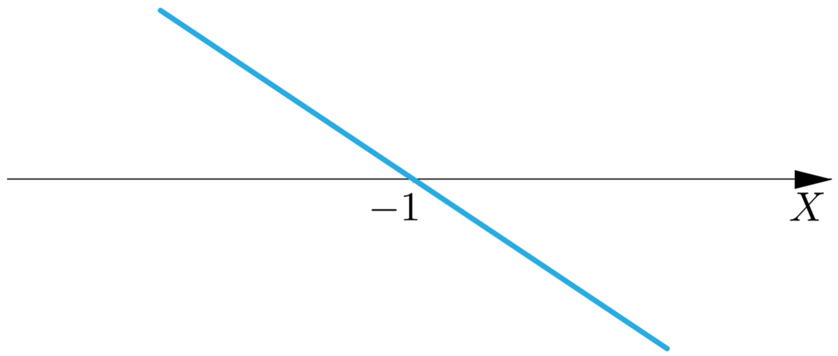
W przypadku mianownika korzystamy ze wzoru: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$f(x) = \frac{x^3-1}{-x^2+1} = \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{-(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{-(x+1)}$, dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Zbadamy istnienie granic jednostronnych funkcji f w punktach $x = -1$ i $x = 1$.

Obliczamy granicę lewostronną i prawostronną funkcji, dla $x = -1$.

Funkcja $y = -(x+1)$ jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R}$, więc po lewej stronie 1 przyjmuje wartości dodatnie, a po prawej wartości ujemne.



$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2+x+1}{-(x+1)} = \left\{ \frac{(-1)^2+(-1)+1}{0^+} \right\} = \left\{ \frac{1}{0^+} \right\} = +\infty,$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2+x+1}{-(x+1)} = \left\{ \frac{(-1)^2+(-1)+1}{0^-} \right\} = \left\{ \frac{1}{0^-} \right\} = -\infty.$

Prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji.

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{-(x+1)} = \frac{1^2+1+1}{-(1+1)} = -\frac{3}{2}$, więc prosta o równaniu $x = 1$ nie jest asymptotą pionową.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3-1}{-x^2+1}$ ma asymptotę pionową $x = -1$.

Słownik

asymptota pionowa

prosta $x = c$ jest asymptotą pionową funkcji określonej co najmniej w jednostronnym sąsiedztwie punktu c, wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z granic lim, $\lim_{x \to c^-} f(x)$ albo $\lim_{x \to c^+} f(x)$ jest niewłaściwa

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem omawiającym asymptoty pionowe wykresu funkcji, a następnie rozwiąż zadania i sprawdź odpowiedzi.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DodJb4uMJ

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego asymptoty pionowej wykresu funkcji.

Polecenie 2

Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$.

Polecenie 3

Wykaż, że prosta $x = 5$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f(x) = \frac{7-x}{x-5}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Asymptoty pionowe wykresu funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Zakres rozszerzony:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne)

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna definicję asymptoty pionowej wykresu funkcji;
- oblicza granice jednostronne funkcji w punkcie;
- podaje równanie asymptoty pionowej;
- rozumie, jak ważne jest staranne wykonanie działań do poprawnej interpretacji;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają definicję granicy funkcji w punkcie;
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, w parach, analizują przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj;
2. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek;
3. Metodą „burzy mózgów” uczniowie podają sposób wyznaczenia równań asymptot pionowych;
4. Nauczyciel prezentuje film samouczek i omawia go z uczniami, następnie uczniowie samodzielnie rozwiązują zadanie do samodzielnego rozwiązania z filmu oraz zadania pod filmem;
5. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela;
6. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek i zwracając uwagę na staranność zapisów.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych;
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień;
3. Uczniowie sporządzają notatkę w zeszycie: definicja asymptoty pionowej;

4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest wykonanie pozostałych ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Wykres funkcji

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w filmie samouczku uczniowie mogą przeanalizować jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.