



Symetria środkowa w ujęciu analitycznym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Symetria środkowa w ujęciu analitycznym

Źródło: Maria Noel Rabuna, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Na tej lekcji omówimy kolejny przykład przekształcenia będącego izometrią. Tym razem zajmiemy się symetrią względem punktu (zwaną też symetrią środkową) w ujęciu analitycznym. Jest to uogólnienie symetrii względem początku układu współrzędnych, ale zależności między współrzędnymi punktu i jego obrazu są nieco bardziej skomplikowane. Korzystając z wektorów, wyprowadzimy potrzebne w zadaniach wzory.

Twoje cele

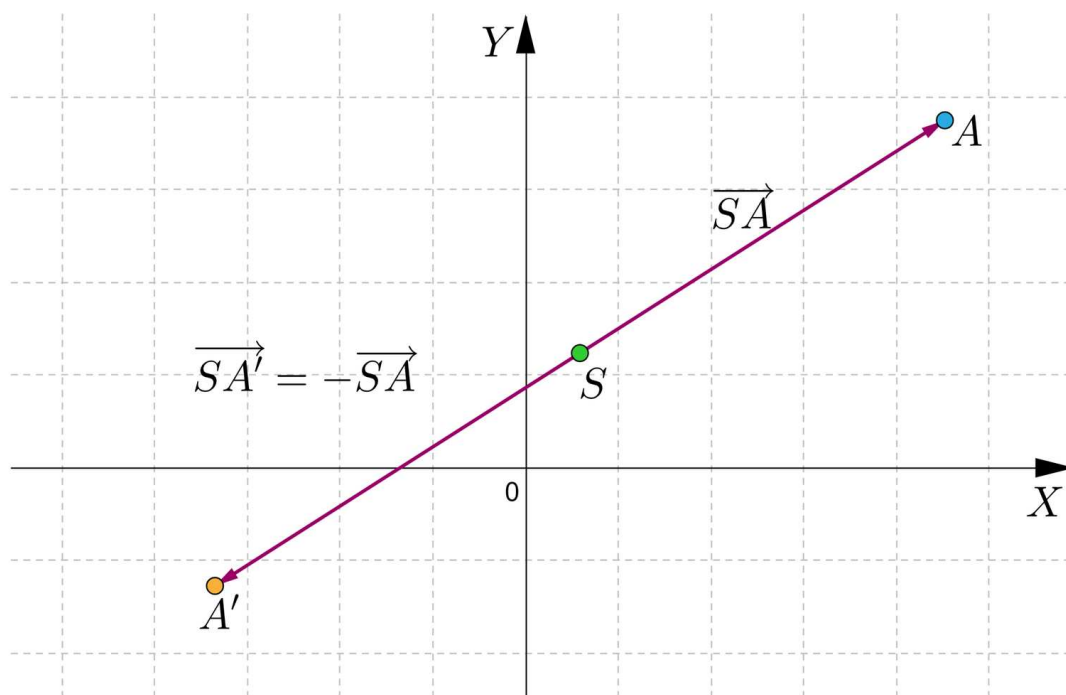
- Zastosujesz definicję do wyznaczania obrazu punktu w symetrii środkowej.
- Zastosujesz definicję do wyznaczania współrzędnych obrazu punktu w symetrii środkowej.
- Wyznaczysz obraz wielokąta w symetrii środkowej.
- Wyznaczysz równanie obrazu figury w symetrii środkowej.

Przeczytaj

Zaczniemy od przytoczenia definicji, która posłuży nam również do wyprowadzenia zależności między współrzędnymi punktu i jego obrazu.

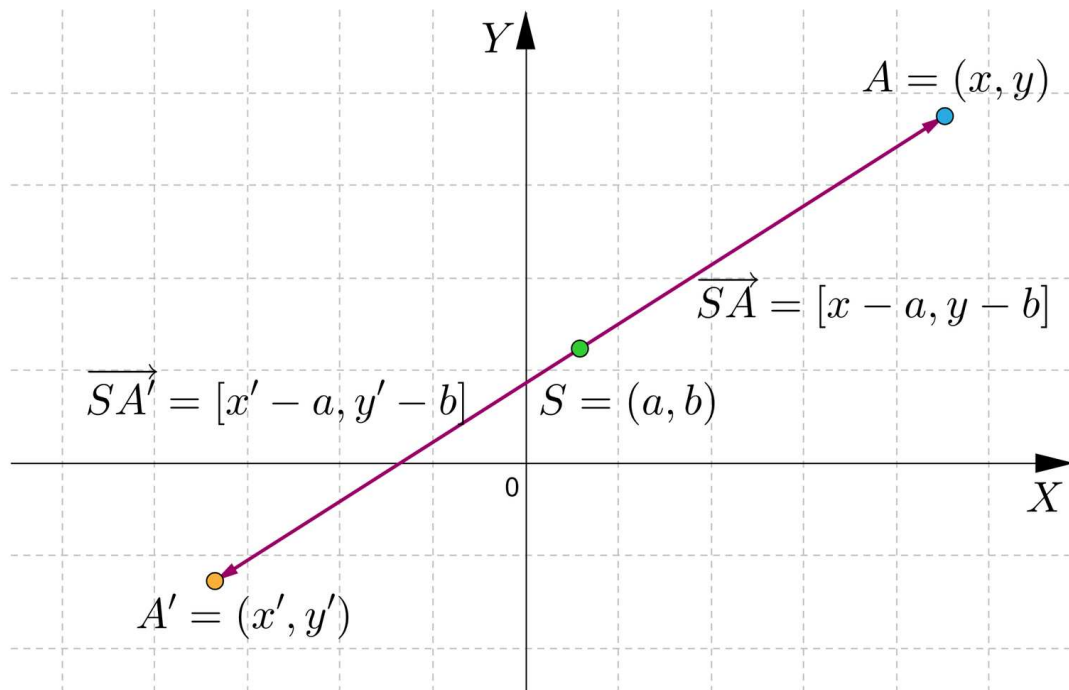
Symetrią (środkową) względem punktu (środka) S nazywamy przekształcenie, które dowolnemu punktowi A przyporządkowuje taki punkt A' , dla którego zachodzi równość:

$$\overrightarrow{SA'} = -\overrightarrow{SA}$$



Przyjmijmy teraz oznaczenia: niech środek S symetrii ma współrzędne (a, b) ; współrzędne punktu A oznaczmy przez (x, y) , zaś współrzędne punktu A' przez (x', y') . Wówczas równość $\overrightarrow{SA'} = -\overrightarrow{SA}$ można wyrazić we współrzędnych:

$$[x' - a, y' - b] = -[x - a, y - b]$$



Korzystając z definicji wektora przeciwnego otrzymujemy

$$[x' - a, y' - b] = [-(x - a), -(y - b)]$$

$$[x' - a, y' - b] = [-x + a, -y + b]$$

zaś z zależności między współrzędnymi wektorów równych mamy

$$x' - a = -x + a \text{ oraz } y' - b = -y + b$$

czyli

$$x' = 2a - x \text{ oraz } y' = 2b - y.$$

Zatem obraz A' punktu A o współrzędnych (x, y) w [symetrii względem punktu \$S\$](#) o współrzędnych (a, b) ma współrzędne $(x', y') = (2a - x, 2b - y)$.

Przykład 1

Wyznamy obraz punktu $A = (1, -3)$ w symetrii względem punktu $S = (-3, 4)$.

Oznaczmy szukane współrzędne przez (x', y') . Możemy wykorzystać wzory wyprowadzone powyżej

$$x' = 2 \cdot (-3) - 1 \text{ oraz } y' = 2 \cdot 4 - (-3)$$

$$x' = -7 \text{ oraz } y' = 11.$$

Przykład 2

Wyznamy współrzędne (a, b) środka symetrii, w której obrazem punktu $A = (-3, 4)$ jest punkt $A' = (2, -3)$.

Możemy zauważyć, że środek symetrii jest środkiem odcinka o końcach A i A' , zatem jego współrzędne są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych punktów A i A' :

$$a = \frac{x+x'}{2} = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ oraz } b = \frac{y+y'}{2} = \frac{4+(-3)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 3

Wyznamy równanie figury, która jest obrazem figury F o równaniu $|x - 1| + |y + 2| = 1$ w symetrii względem punktu S o współrzędnych $(-2, 3)$.

Niech $A = (x, y)$ będzie dowolnym punktem należącym do figury F , zaś $A' = (x', y')$ jego obrazem w symetrii względem punktu S .

$$\text{Wówczas } A' = (x', y') = (2 \cdot (-2) - x, 2 \cdot 3 - y) = (-4 - x, 6 - y).$$

$$\text{Zatem } x' = -4 - x \text{ i } y' = 6 - y.$$

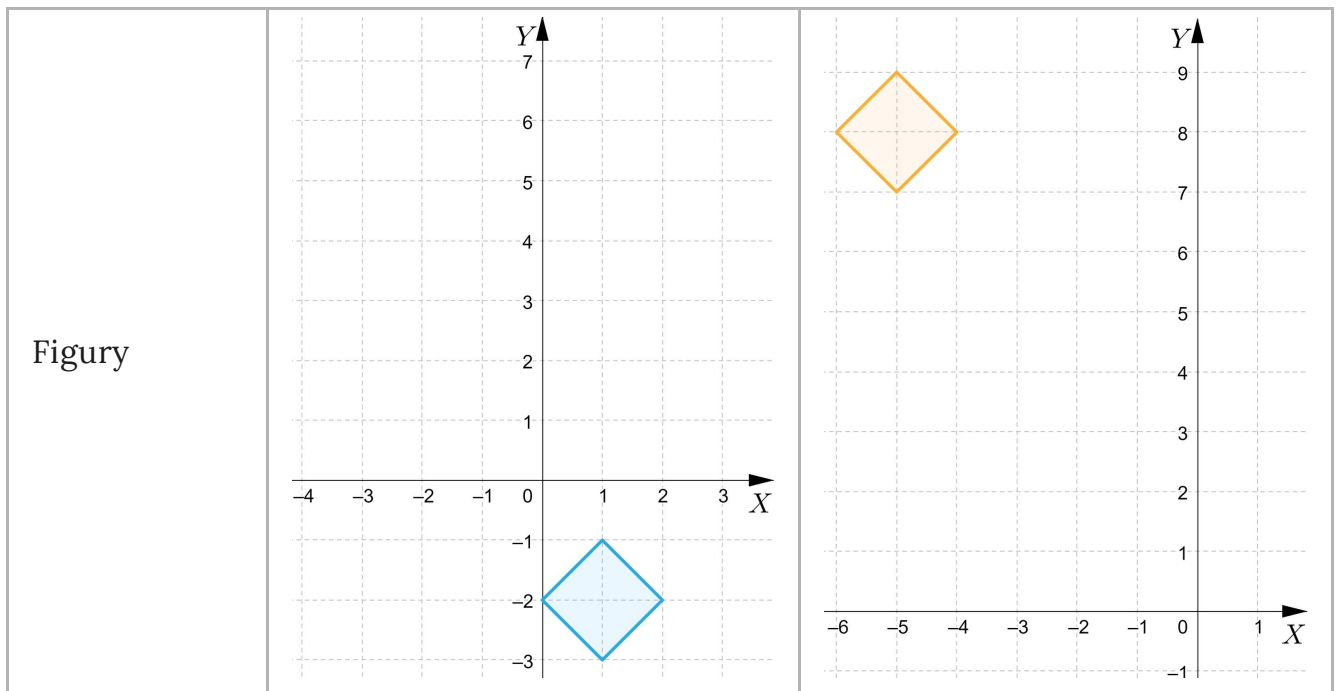
$$\text{Stąd } x = -4 - x' \text{ oraz } y = 6 - y'.$$

Możemy teraz podstawić $x = -4 - x'$ oraz $y = 6 - y'$ do równania $|x - 1| + |y + 2| = 1$ otrzymując $|-4 - x' - 1| + |6 - y' + 2| = 1$, co po przekształceniach daje $|x' + 5| + |y' - 8| = 1$.

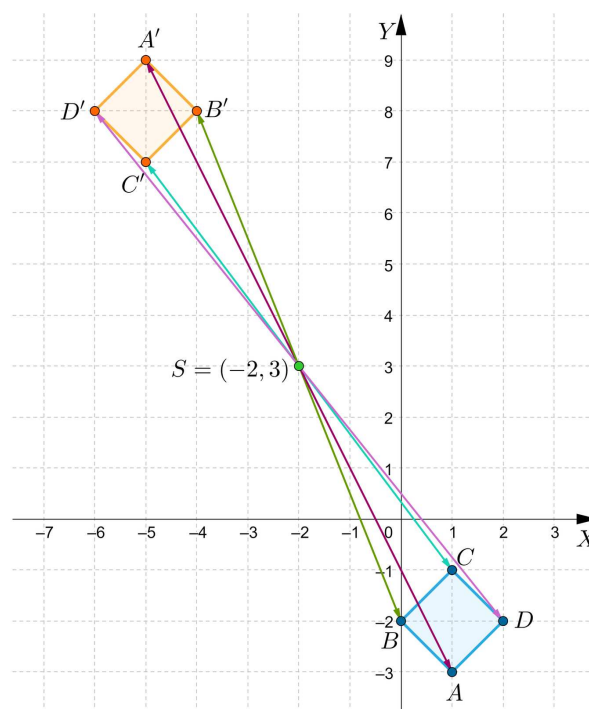
Zmienne x', y' można zastąpić dowolnymi innymi, więc równanie można też zapisać w postaci $|x + 5| + |y - 8| = 1$.

Zobaczmy jeszcze obie figury w układzie współrzędnych:

Równania figur	$ x - 1 + y + 2 = 1$	$ x + 5 + y - 8 = 1$
-------------------	-------------------------	-------------------------



Obie figury w jednym układzie współrzędnych:



Podsumujmy powyższy przykład. Jeśli dana figura opisuje się równaniem $f(x, y) = 0$, to jej obraz w symetrii względem punktu o współrzędnych (a, b) opisuje się równaniem $f(2a - x, 2b - y) = 0$.

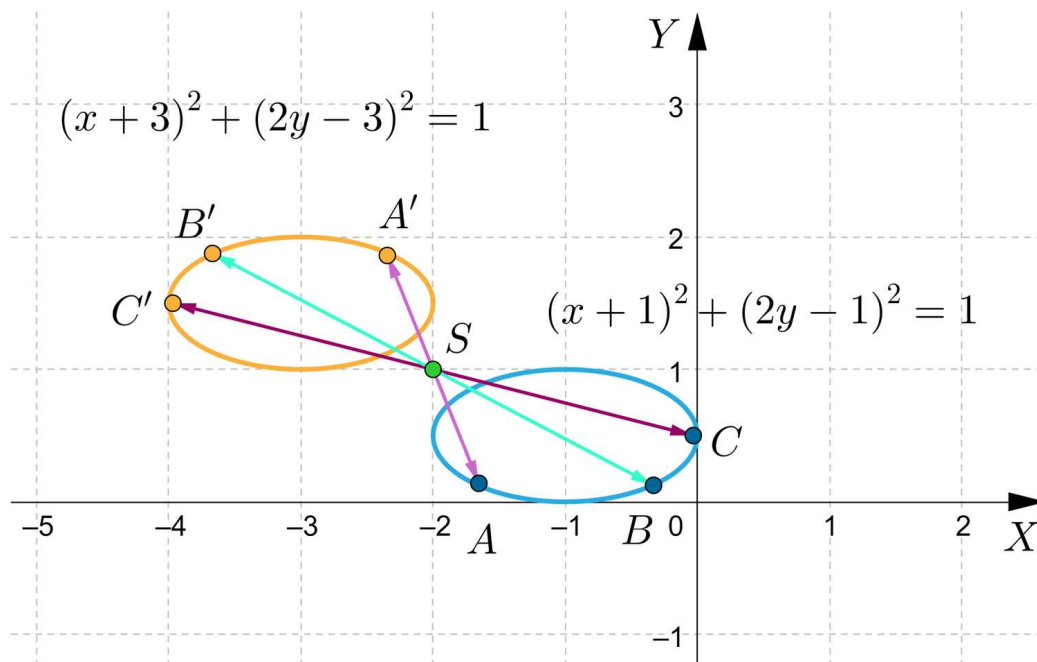
Przykład 4

Figura F opisana jest równaniem $(x + 1)^2 + (2y - 1)^2 = 1$. Wyznamy równanie obrazu figury F w symetrii względem punktu o współrzędnych $(a, b) = (-2, 1)$.

W tym celu w równaniu figury F w miejsce zmiennej x wstawimy wyrażenie $2 \cdot (-2) - x = -4 - x$, zaś w miejsce zmiennej y wstawimy: $2 \cdot 1 - y = 2 - y$.

Otrzymujemy równanie $(-4 - x + 1)^2 + (2(2 - y) - 1)^2 = 1$, czyli $(-x - 3)^2 + (-2y + 3)^2 = 1$, po skorzystaniu z własności wartości bezwzględnej daje równanie $(x + 3)^2 + (2y - 3)^2 = 1$.

Obie figury możemy narysować w układzie współrzędnych przy pomocy programu komputerowego:



Symetria środkowa jest **izometrią** i inwolucją, więc posiada wszystkie wynikające z tego faktu własności:

- zachowuje długości odcinków,
- zachowuje miary kątów,
- zachowuje pola figur.

Ponadto symetria środkowa zachowuje orientację płaszczyzny, a jedynym **punktem stałym** symetrii środkowej jest środek symetrii.

Słownik

symetria środkowa względem punktu S

przekształcenie (płaszczyzny lub przestrzeni), które każdemu punktowi A przyporządkowuje taki punkt A' , że punkt S jest środkiem odcinka AA' ; obrazem

punktu S jest punkt S ; S nazywamy środkiem symetrii

izometria

przekształcenie (płaszczyzny lub przestrzeni), które zachowuje długości odcinków, tzn. dla dowolnych punktów A, B i ich obrazów w rozważanej izometrii A', B' zachodzi

$$|AB| = |A'B'|$$

punkt stały przekształcenia

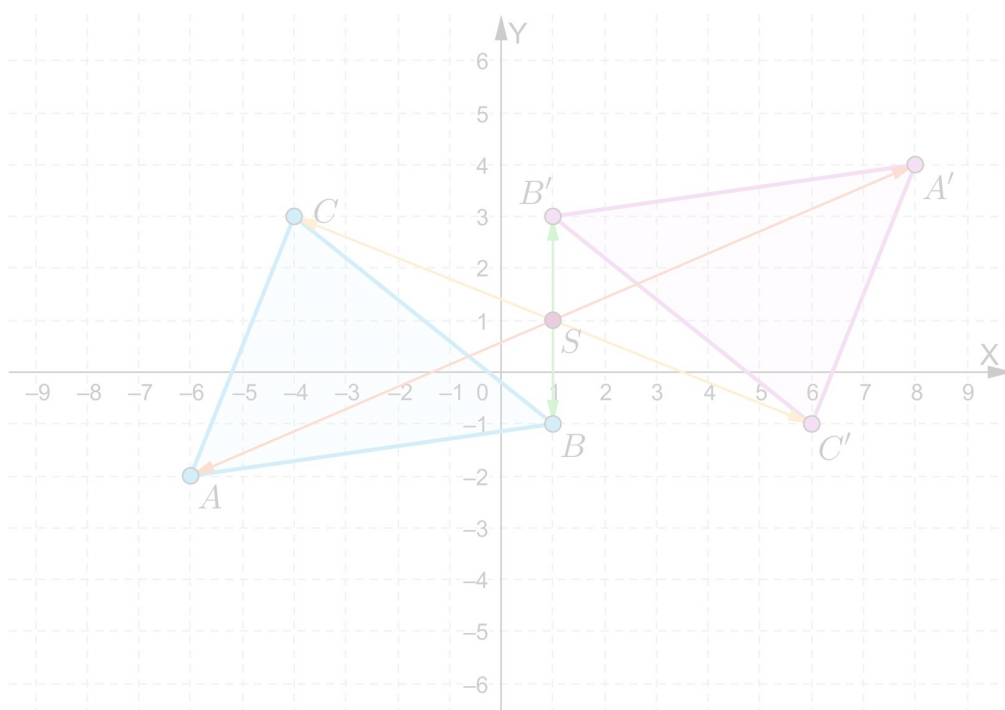
mówimy, że A jest punktem stałym przekształcenia P , gdy obraz A' punktu A w przekształceniu P pokrywa się z punktem A , czyli

$$P(A) = A$$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zmieniając położenie środka S symetrii oraz wierzchołków trójkąta ABC , obserwuj, jak zmienia się obraz trójkąta ABC w symetrii względem punktu S .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DDAx5hHN7>

Polecenie 2

Korzystając z symulacji interaktywnej, rozwiąż test. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

Obrazem punktu $E = (-3, 5)$ w symetrii względem punktu $D = (-1, 6)$ jest punkt o współrzędnych:

☐ $(1, 7)$

☐ $(-5, 4)$

☐ $(3, 8)$

Punkt $P = (1, 3)$ jest obrazem punktu Z w symetrii względem punktu o współrzędnych $Q = (-1, 2)$. Punkt Z ma współrzędne:

☐ $(-3, 4)$

☐ $(3, 4)$

☐ $(-3, 1)$

Punkt $G = (2, -5)$ jest obrazem punktu $H = (-4, -1)$ w symetrii względem punktu o współrzędnych:

☐ $(3, -2)$

☐ $(-6, 4)$

☐ $(-1, -3)$

Obraz trójkąta o wierzchołkach $A = (5, -1)$, $B = (2, -5)$, $C = (2, -1)$ w symetrii środkowej **nie jest**

☐

☐ trójkątem, którego obwód i pole zależą od środka symetrii

☐ trójkątem o obwodzie 12

☐ trójkątem polu 6

Suma trójkąta o wierzchołkach $A = (6, -5)$, $B = (2, -5)$, $C = (2, -1)$ oraz jego obrazu względem punktu S tworzą równoległobok. Wówczas S może mieć współrzędne:

☐ $(2, -3)$

☐ $(2, -1)$

☐ $(2, -5)$

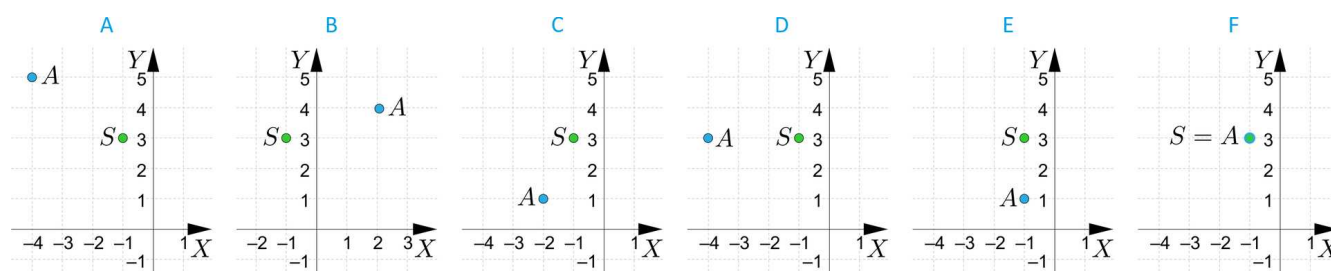
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary punkty symetryczne względem punktu $S = (-1, 3)$.



Przyporządkuj ilustracje wskazujące punkty symetryczne względem punktu S z oznaczeniami ilustracji A, B, C, D, E, F.

Ćwiczenie 2



Przyporządkuj punktom ich obrazy w symetrii względem punktu S . Przeciągnij i upuść.

Obraz punktu $A = (1, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (-2, -2)$ to, Obraz punktu $A = (-2, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (1, 2)$ to, Obraz punktu $A = (-1, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (2, 2)$ to, Obraz punktu $A = (2, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (-1, -2)$ to, Obraz punktu $A = (-1, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (2, -2)$ to, Obraz punktu $A = (2, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (-1, 2)$ to, Obraz punktu $A = (1, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (-2, 2)$ to, Obraz punktu $A = (-2, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (1, -2)$ to

Obraz punktu	Punkt
Obraz punktu $A = (1, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (-2, -2)$ to	
Obraz punktu $A = (-2, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (1, 2)$ to	
Obraz punktu $A = (-1, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (2, 2)$ to	
Obraz punktu $A = (2, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (-1, -2)$ to	
Obraz punktu $A = (-1, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (2, -2)$ to	

Obraz punktu $A = (2, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (-1, 2)$ to		
Obraz punktu $A = (1, -2)$ w symetrii względem punktu $S = (-2, 2)$ to		
Obraz punktu $A = (-2, 2)$ w symetrii względem punktu $S = (1, -2)$ to		

Ćwiczenie 3



Dany jest punkt A i jego obraz A' w symetrii środkowej względem punktu S . Wyznacz współrzędne punktu S . Przeciągnij i upuść.

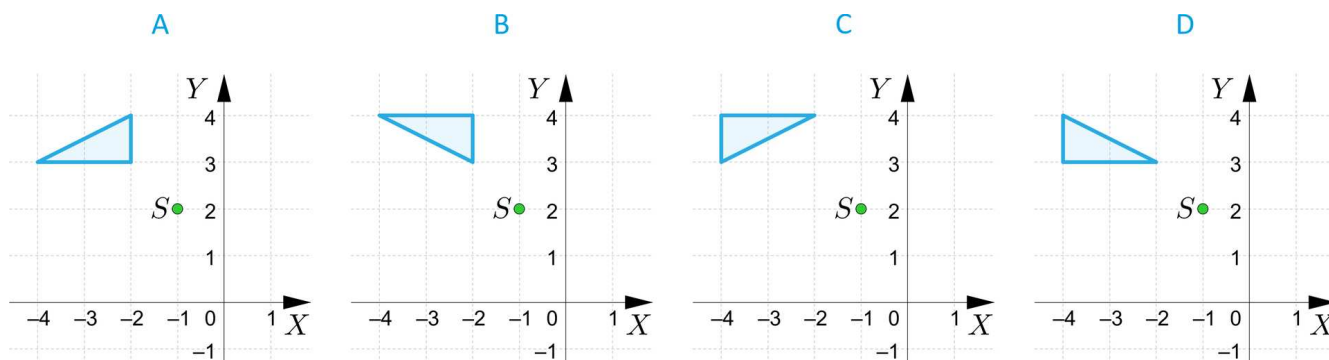
$A = (1, 3)$, $A = (-2, 4)$, $A = (3, 4)$, $A = (6, 3)$, $A' = (5, -5)$, $A' = (4, -6)$,
 $A' = (-6, -3)$, $A' = (-5, -2)$

Współrzędne punktu A	Współrzędne obrazu A' punktu A w symetrii względem punktu S	Współrzędne punktu S
$A = (1, 3)$	$A' = (5, -5)$	
$A = (-2, 4)$	$A' = (4, -6)$	
$A = (3, 4)$	$A' = (-6, -3)$	
$A = (6, 3)$	$A' = (-5, -2)$	

Ćwiczenie 4



Połącz w pary trójkąty symetryczne względem punktu $S = (-1, 2)$.



Przyporządkuj ilustracje wskazujące trójkąty symetryczne względem punktu S z oznaczeniami ilustracji **A**, **B**, **C**, **D**.

Ćwiczenie 5



Uzupełnij zdania przeciągając poprawne wyrazy.

Obrazem prostej przechodzącej przez punkt S w symetrii względem punktu S ta sama prosta.

Obrazem punktu S w symetrii względem punktu S punkt S .

Obrazem odcinka zawierającego punkt S w symetrii względem punktu S ten sam odcinek.

Obrazem odcinka niezawierającego punktu S w symetrii względem punktu S ten sam odcinek.

czasami jest

nigdy nie jest

nigdy nie jest

czasami jest

zawsze jest

nigdy nie jest

zawsze jest

zawsze jest

zawsze jest

nigdy nie jest

czasami jest

czasami jest

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Obrazem krzywej o równaniu $(2x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ w symetrii względem punktu $S = (1, -1)$ jest krzywa o równaniu $(3 + 2x)^2 + y^2 = 1$.

☐ Obrazem krzywej o równaniu $(2x - 1)^2 + (y + 2)^3 = 1$ w symetrii względem punktu $S = (-1, 1)$ jest krzywa o równaniu $(2x + 5)^2 + (4 - y)^3 = 1$.

☐ Obrazem krzywej o równaniu $(2x + 1)^3 + (3y - 2)^3 = 1$ w symetrii względem punktu $S = (-1, -1)$ jest krzywa o równaniu $(-2x - 3)^3 + (-3y - 8)^3 = 1$.

☐ Obrazem krzywej o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ w symetrii względem punktu $S = (1, 1)$ jest krzywa o równaniu $(1 + x)^2 + (4 + y)^2 = 1$.

Ćwiczenie 7



W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie $|x - 2| + |y + 3| = 2$ oraz obraz tego zbioru w symetrii względem punktu o współrzędnych $(1, -1)$.

Ćwiczenie 8



W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek $|x + 2| + |y - 3| \leq 1$ oraz obraz tego zbioru w symetrii względem punktu o współrzędnych $(-1, 1)$.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Symetria środkowa w ujęciu analitycznym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję do wyznaczania obrazu punktu w symetrii środkowej;
- stosuje definicję do wyznaczania współrzędnych obrazu punktu w symetrii środkowej;
- wyznacza obraz wielokąta w symetrii środkowej;
- wyznacza równanie obrazu figury w symetrii środkowej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- praca z ekspertem;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Symetria środkowa w ujęciu analitycznym”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Symulacja interaktywna” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Symetria względem punktu](#)
- [Symetria środkowa](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może zostać wykorzystana na lekcjach poświęconych symetrii środkowej punktów lub figur w układzie współrzędnych.