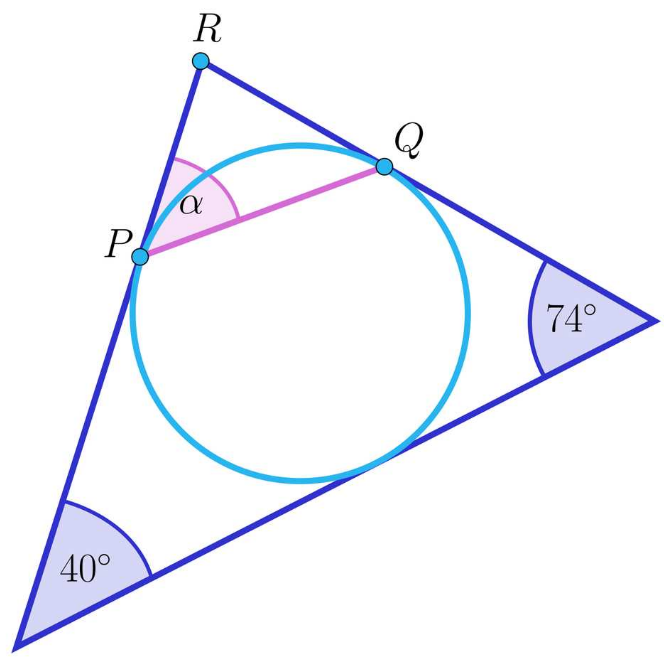
Twierdzenie o kącie wpisanym i dopisanym do okręgu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Mat Kedzia, dostępny w internecie: pexels.com, domena publiczna.

O pewnym kącie w trójkącie

Rozważmy trójkąt, w którym kąty przy podstawie mają miary 40° i 74°, a okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do dwóch jego boków odpowiednio w punktach P i Q, jak na rysunku.



Kąty w trójkącie

Wyznaczenie miary kąta α, jaki tworzy cięciwa PQ z bokiem trójkąta, sprowadza się do wykorzystania bilansu kątów w trójkącie oraz zasadniczego twierdzenia planimetrii.

Ponieważ $|PR| = |RQ|$, jako odcinki stycznych poprowadzone z jednego punktu, to trójkąt PRQ jest równoramienny oraz $|\sphericalangle PQR| = \alpha$. Stąd

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot (180^{\circ} - |\sphericalangle PRQ|) = \frac{1}{2} \cdot (180^{\circ} - (180^{\circ} - 74^{\circ} - 40^{\circ})) = \frac{1}{2} \cdot 114^{\circ} = 57^{\circ}.$$

Kąt α, zaznaczony na rysunku, jest w istocie kątem, jaki cięciwa okręgu tworzy ze styczną do tego okręgu poprowadzoną w punkcie, który jest końcem tej cięciwy i jest znany, jako kąt między styczną i cięciwą lub krótko, jako kąt dopisany do okręgu, co będzie tematem niniejszej lekcji.

Twoje cele

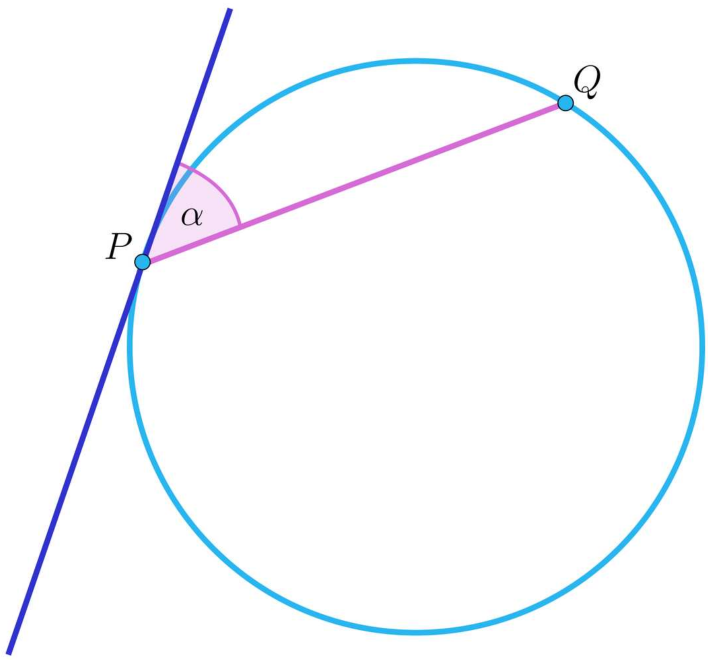
- Zastosujesz twierdzenie o odcinkach stycznych.
- Zastosujesz twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku.

- Poznasz pojęcie kąta dopisanego i udowodnisz twierdzenie pozwalające obliczyć miarę tego kąta.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Kąt dopisany do okręgu

Rozważmy okrąg i dowolną jego cięciwę oraz poprowadźmy styczną przez jeden z końców tej cięciwy, jak na rysunku.



Kąt dopisany

Możemy wówczas zaznaczyć miarę kąta α, jaki cięciwa PQ tego okręgu tworzy ze styczną do tego okręgu poprowadzoną w punkcie P. Zauważmy, że jeśli cięciwa PQ nie jest średnicą, to styczna w punkcie P tworzy z tą cięciwą dwa kąty, z których jeden jest ostry, a drugi – przyległy do niego – jest rozwarty.

Możemy powiedzieć, że kąt ostry jest oparty na krótszym z łuków o końcach w punktach P i Q, a kąt rozwarty – na dłuższym z łuków o tych końcach. O kącie α mówimy, że jest to kąt między styczną i cięciwą lub jako o kącie zdefiniowanym poniżej.

Definicja: Kąt dopisany

Niech dany będzie okrąg i punkt P leżący na tym okręgu. Kąt o wierzchołku w punkcie P nazywamy kątem dopisanym do danego okręgu, jeżeli jedno jego ramię zawiera się w stycznej do tego okręgu, a drugie ramię zawiera jedną z jego cięciw.

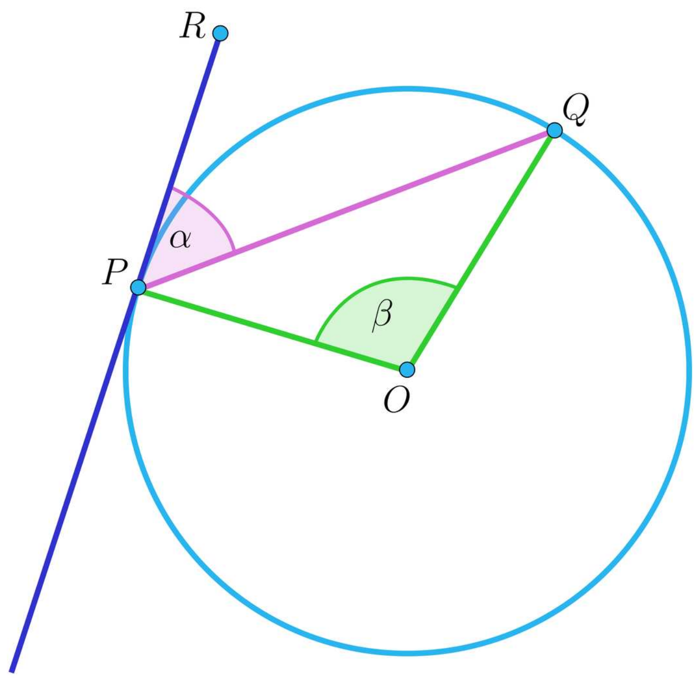
Twierdzenie: Twierdzenie o kącie dopisanym

Miara kąta dopisanego jest dwa razy mniejsza od miary [kąta środkowego] opartego na odpowiednim łuku wyznaczonym przez cięciwę zawartą w jednym z ramion kąta dopisanego.

Dowód

Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy kąt dopisany jest ostry. W przypadku kąta rozwartego wystarczy rozważyć kąt przyległy. Przypadek, gdy kąt dopisany jest prosty jest trywialny.

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku. Kąt α jest kątem dopisanym, a kąt β jest kątem środkowym opartym na tym z łuków PQ, który zawiera się w kącie dopisanym α. Punkt R leży na stycznej, a PQ jest cięciwą okręgu o środku w punkcie O.



Dowód twierdzenia o kącie dopisanym

Wtedy kąt RPO jest prosty oraz $\alpha + |\sphericalangle OPQ| = 90^\circ$.

Ale $|\sphericalangle OPQ| = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$.

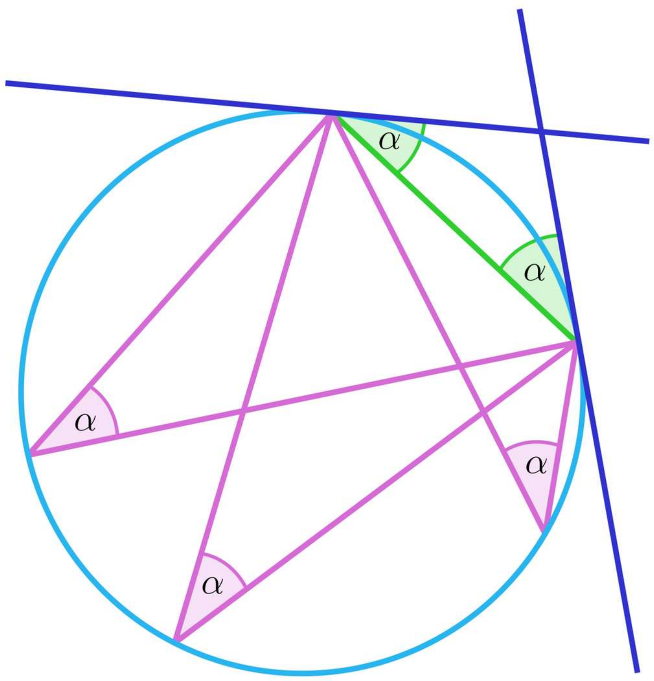
Stąd $\alpha = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2}$.

Co było do udowodnienia.

Prostą konsekwencją powyższego twierdzenia i twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym jest stwierdzenie poniższe.

Twierdzenie: Twierdzenie o kącie dopisanym i wpisanym

Miara kąta dopisanego jest równa mierze kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

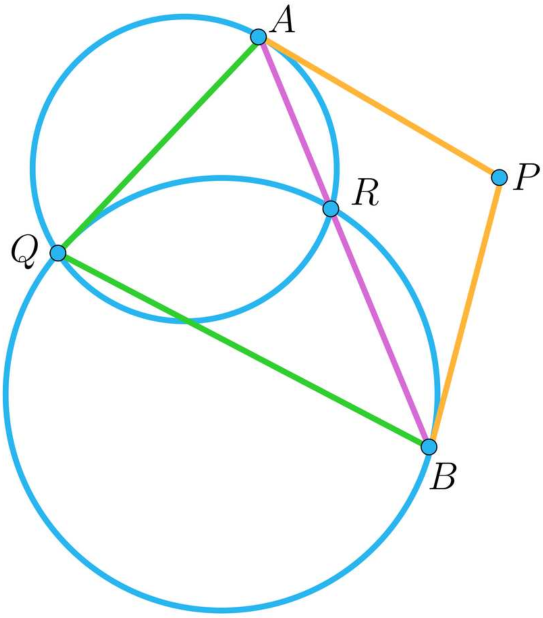


Kąt wpisany i dopisany

Przykład 1

Dane są dwa okręgi, które przecinają się w punktach Q i R. Przez punkt R poprowadzono odcinek, który przecina dane okręgi odpowiednio w punktach A i

B. Miarą kąta AQB jest równa 74°. Wyznaczymy miarę kąta APB, pod jakim przecinają się styczne do odpowiednich okręgów, poprowadzone w punktach A i B, jak na rysunku.



Zauważmy, że z twierdzenia o kącie dopisanym dla stycznej AP i cięciwy AR mamy, że $|\sphericalangle AQR| = |\sphericalangle RAP|$.

Podobnie dla stycznej BP i cięciwy BR mamy, że $|\sphericalangle BQR| = |\sphericalangle RBP|$.

Ale $|\sphericalangle BQR| + |\sphericalangle AQR| = 74^{\circ} = |\sphericalangle RBP| + |\sphericalangle RAP| = 180^{\circ} - |\sphericalangle APB|$.

Stąd $|\sphericalangle APB| = 180^{\circ} - 74^{\circ} = 106^{\circ}$.

Słownik

kąt środkowy

kątem środkowym w kole (okręgu) nazywamy każdy kąt, którego wierzchołkiem jest środek danego koła (okręgu)

kąt wpisany

> kątem wpisanym w kole (okręgu) nazywamy kąt wypukły, którego ramionami są proste zawierające cięciwy tego koła (okręgu), a wierzchołek należy do okręgu wyznaczającego brzeg koła

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet. Punktem wyjścia jest dany okrąg i styczna do tego okręgu poprowadzona w punkcie A. Wybierz polecenie „Kąt dopisany” i zaobserwuj, jak cięciwa dzieli okrąg na dwa łuki. Zaznacz jeden z nich i zmieniając położenie punktu B obserwuj, jak zmienia się miara kąta dopisanego, czyli kąta między styczną i cięciwą. Następnie wybierz polecenie „Kąt wpisany” i zmieniając położenie punktu C obserwuj, jak zmienia się miara odpowiedniego kąta wpisanego.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DT7EMprVx

Polecenie 2

Zaobserwuj miary kątów wpisanego i dopisanego, wyznaczonych przez cięciwę AB. Sformułuj hipotezę dotyczącą miar obu kątów. Zmieniaj położenie punktów B i C, by zbadać, czy sformułowana hipoteza nie zależy od położenia tych punktów.

Polecenie 3

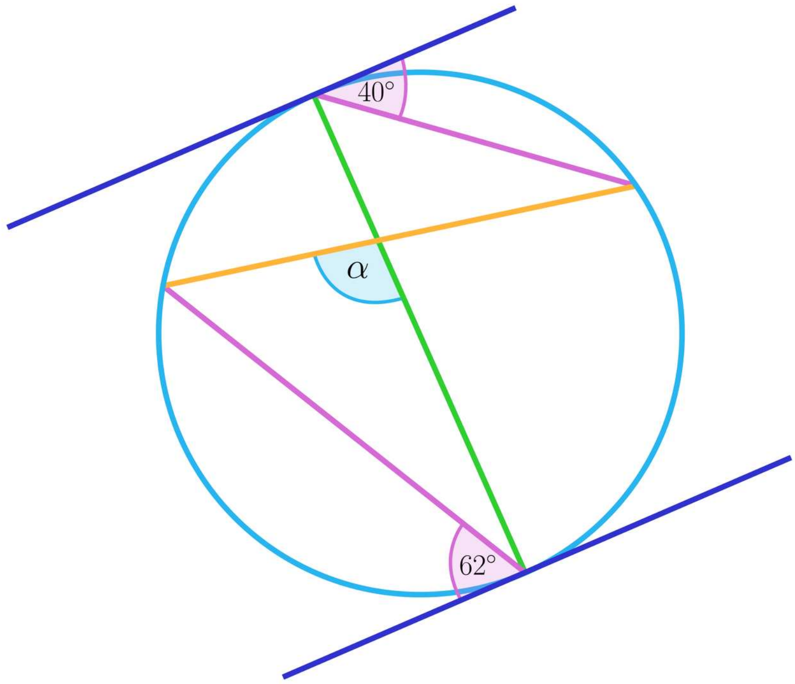
Miara ostrego kąta dopisanego do danego okręgu jest o 48° mniejsza od sumy miar kątów wpisanego i środkowego, opartych na łuku zawartym w tym kącie dopisanym. Oblicz miarę kąta dopisanego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

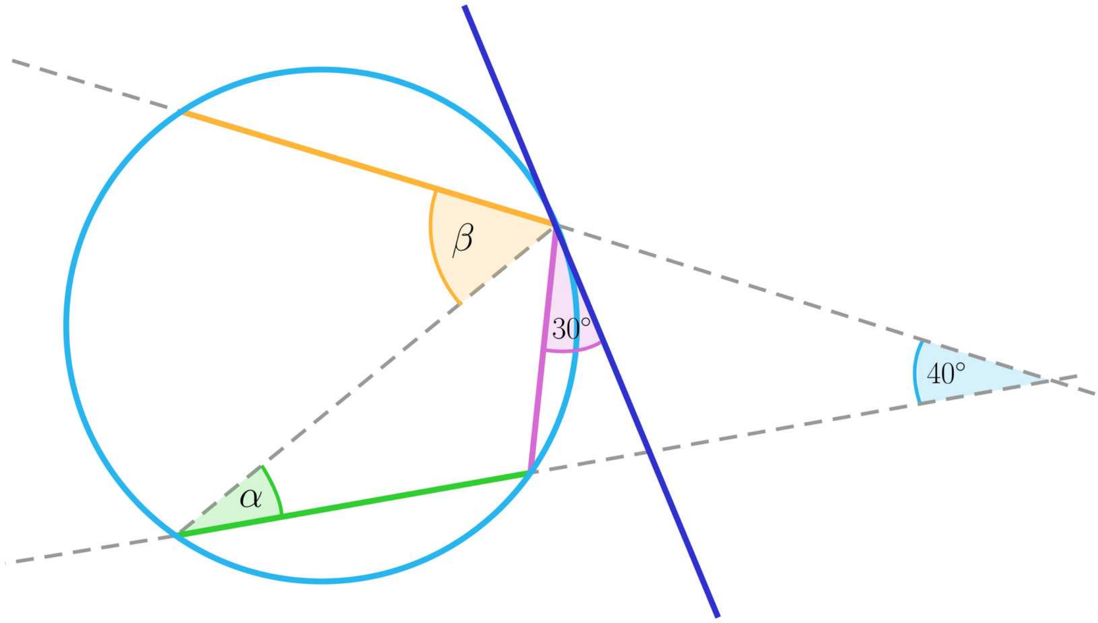
Ćwiczenie 1

Na rysunku podane są miary dwóch kątów dopisanych. Wyznacz miarę kąta α między odpowiednimi cięciwami tego okręgu.



Ćwiczenie 2

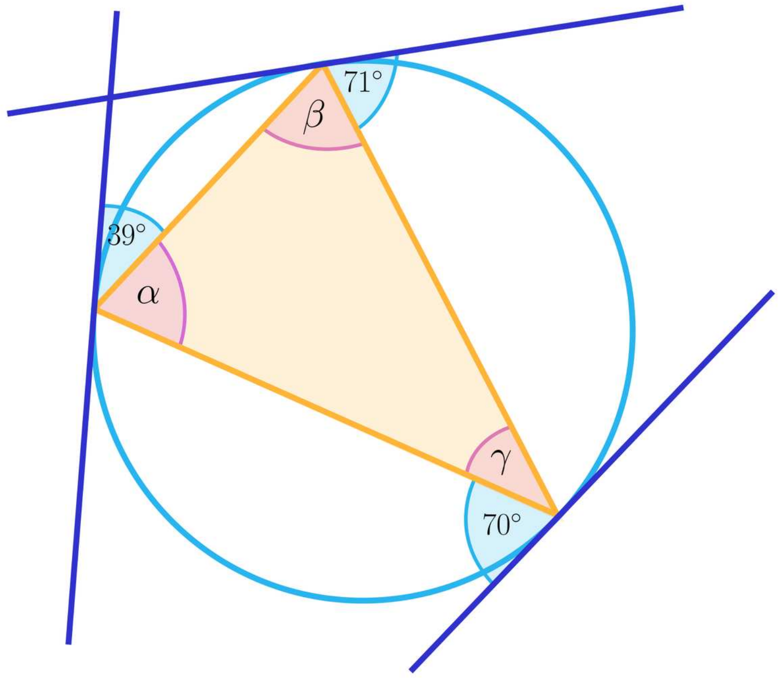
Kąt, jaki tworzą sieczne, ma miarę równą 40°, a zaznaczony na rysunku kąt dopisany ma miarę 30°.



Oblicz miarę każdego z kątów α i β.

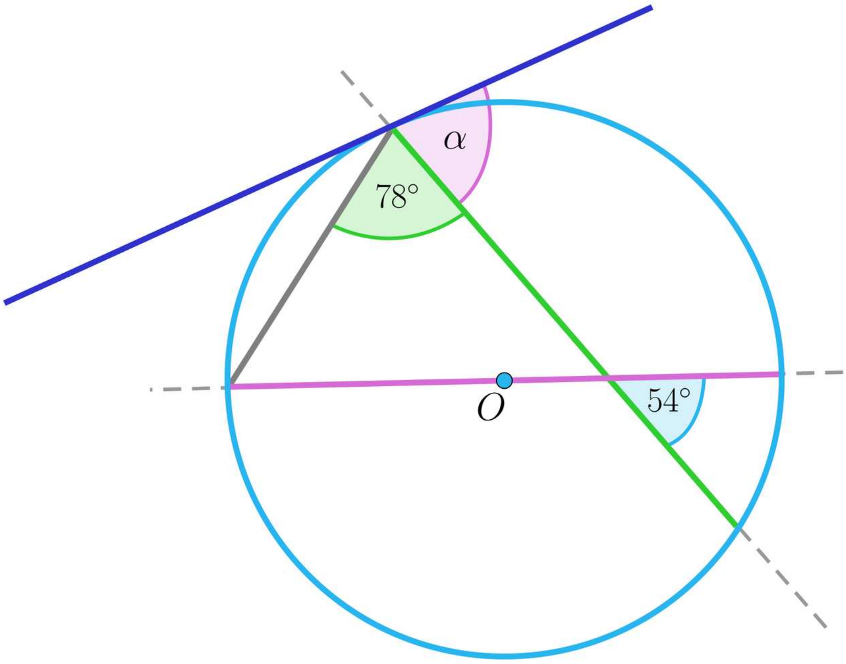
Ćwiczenie 3

Dany jest okrąg opisany na trójkącie. Kąty trójkąta mają odpowiednio miary α, β oraz γ, a miary wybranych kątów dopisanych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami trójkąta, są podane na rysunku. Jakie będą miary kątów α i β?



Ćwiczenie 4

Sieczne danego okręgu przecinają się pod kątem 54°. Kąt wpisany, którego wierzchołek pokrywa się z wierzchołkiem kąta dopisanego ma miarę 78°, jak na rysunku. Jaką miarę ma kąt dopisany α?



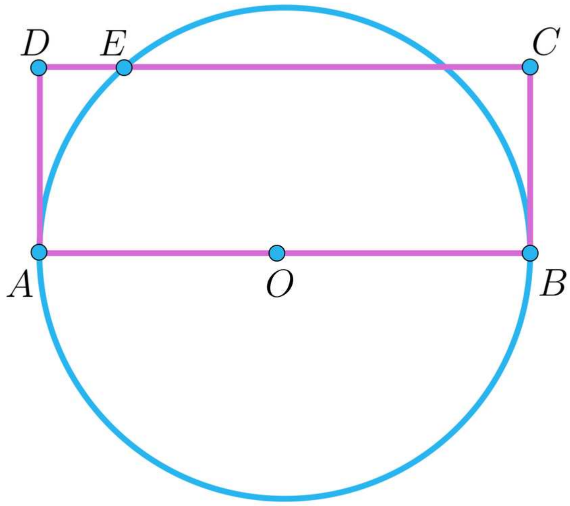
Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

W danym okręgu poprowadzono cięciwę, której końce podzieliły okrąg na dwa łuki. Stosunek długości tych łuków ma się do siebie tak, jak $3 : 5$. Oblicz miary kątów dopisanych, których wierzchołkami są końce poprowadzonej cięciwy.

Ćwiczenie 7

Dłuższy bok prostokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu o promieniu r, jak na rysunku.



Prosta CD przecięła okrąg w takim punkcie E, że $|DE| = \frac{1}{3}r$. Wyznacz stosunek długości boków tego prostokąta.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o kącie wpisanym i dopisanym do okręgu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych;

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje zasadnicze twierdzenie planimetrii
- zna i stosuje twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku
- zna pojęcie kąta dopisanego
- dowodzi twierdzenie o równości miar kąta dopisanego i odpowiedniego kąta wpisanego
- stosuje twierdzenie o kącie wpisanym i dopisanym do okręgu
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie zasadniczego twierdzenia planimetrii i twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym. Następnie prezentuje na rysunku lub modelu przygotowanym w aplecie problem wyznaczenia miary kąta wyznaczonego przez odcinek łączący punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt i prosi uczniów o jego rozwiązanie.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wprowadza pojęcie kąta dopisanego informując, że często mówi się o kącie między styczną i cięciwą. Wskazuje, że kąt przyległy do kąta dopisanego jest także kątem dopisanym. Następnie poleca uruchomić dołączony Aplet Geogebry i wykonać zamieszczone w nim polecenia.
2. Nauczyciel formułuje twierdzenie o kącie dopisanym (i kącie środkowym) i prosi uczniów o przeprowadzenie jego dowodu. Następnie pyta o zależność między kątem dopisanym i wpisanym i uczniowie zapisują odpowiedni wniosek.
3. Nauczyciel formułuje Problem 1. Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela rozwiązują problem w parach, a następnie omawiają wspólnie efekty pracy.
4. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Ewentualnie może prosić o dokończenie dowodu twierdzenia.

Materiały pomocnicze:

Kąt środkowy, kąt wpisany

Wskazówki metodyczne:

Aplet można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać go przy realizacji tematu o okręgu opisanym na trójkącie.