



Nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

Źródło: Artem Beliaikin, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem nierówności kwadratowych z wartością bezwzględną. W rozwiązaniach będziemy korzystać z definicji wartości bezwzględnej oraz z własności wartości bezwzględnej.

Rozważając przypadki ustalimy najpierw zbiory rozwiązań odpowiednich nierówności.

Po rozważeniu wszystkich przypadków ustalimy, jaka jest suma otrzymanych rozwiązań. Wspomniana suma będzie zbiorem rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną lub z dwiema wartościami bezwzględnymi.
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania nierówności kwadratowych z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Pamiętasz?

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c < 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \leq 0$$

gdzie:

a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $|x^2 - 3| < 1$.

Korzystając z warunku $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ dla $a > 0$ otrzymujemy:

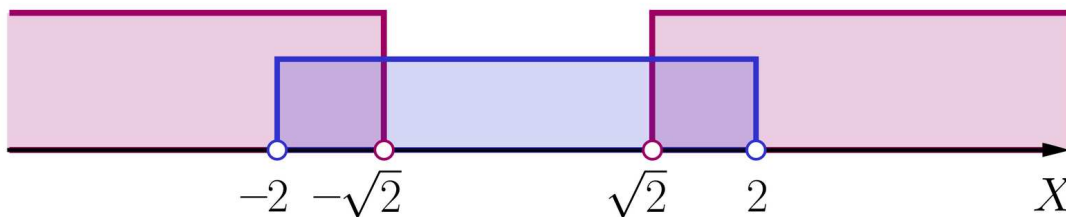
$$x^2 - 3 < 1 \wedge x^2 - 3 > -1$$

$$x^2 - 4 < 0 \wedge x^2 - 2 > 0$$

$$(x - 2)(x + 2) < 0 \wedge (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0$$

$$x \in (-2, 2) \wedge x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

Uwzględniając koniunkcję warunków mamy:



$$x \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$$

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $|x^2 - 2x - 1| \geq 2$.

Z własności wartości bezwzględnej wiemy, że $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$ dla $a \geq 0$.

Czyli mamy:

$$x^2 - 2x - 1 \geq 2 \text{ lub } x^2 - 2x - 1 \leq -2$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \text{ lub } x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

$$(x + 1)(x - 3) \geq 0 \text{ lub } (x - 1)^2 \leq 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup \langle 3, \infty) \text{ lub } x = 1$$

Uwzględniając alternatywę przypadków mamy:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup \langle 3, \infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, -1) \cup \{1\} \cup \langle 3, \infty)$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $x^2 < |x|$.

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej mamy $|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

1. $x \in (-\infty, 0)$

$$x^2 < -x$$

$$x^2 + x < 0$$

$$x(x + 1) < 0$$

$$x \in (-1, 0), \text{ przy czym } (1, 0) \in (-\infty, 0).$$

2. $x \in \langle 0, \infty)$

$$x^2 < x$$

$$x^2 - x < 0$$

$$x(x - 1) < 0$$

$$x \in (0, 1), \text{ przy czym } (0, 1) \in \langle 0, \infty).$$

Uwzględniając alternatywę (1) i (2), mamy $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Przykład 4

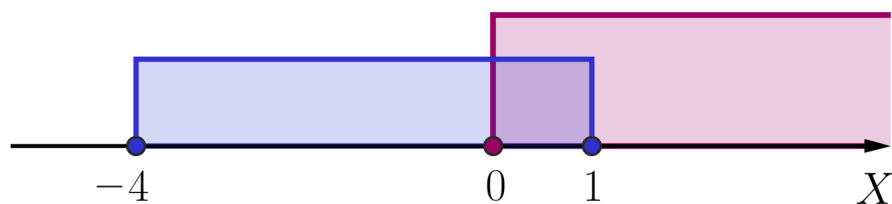
Rozwiążemy nierówność $x^2 + 3 \cdot |x| - 4 \leq 0$.

Zauważmy, że $x^2 = |x|^2$, czyli $|x|^2 + 3 \cdot |x| - 4 \leq 0$.

1. Dla $x \geq 0$ mamy $x^2 + 3x - 4 \leq 0$

$$(x - 1)(x + 4) \leq 0$$

$$x \in \langle -4, 1 \rangle$$



$$x \in \langle 0, 1 \rangle$$

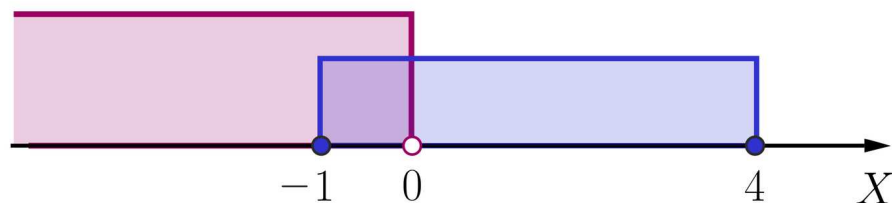
2. Dla $x < 0$ mamy:

$$(-x)^2 + 3(-x) - 4 \leq 0$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$(x - 4)(x + 1) \leq 0$$

$$x \in \langle -1, 4 \rangle$$



$$x \in \langle -1, 0 \rangle$$

Uwzględniając alternatywę warunków (1) i (2) mamy $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -1, 1 \rangle$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $|4 - x^2| > 2x^2 - 5$.

Korzystając z definicji [wartości bezwzględnej](#) mamy:

$$|4 - x^2| = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{dla } x \in \langle -2, 2 \rangle \\ -(4 - x^2) & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \end{cases}$$

1. Jeżeli $x \in \langle -2, 2 \rangle$

$$4 - x^2 > 2x^2 - 5$$

$$-3x^2 + 9 > 0 \quad | : (-3)$$

$$x^2 - 3 < 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0$$

$$x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \in \langle -2, 2 \rangle$$

2. Jeżeli $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

$$-(4 - x^2) > 2x^2 - 5$$

$$-4 + x^2 - 2x^2 + 5 > 0$$

$$-x^2 + 1 > 0$$

$$(1 - x)(1 + x) > 0$$

$x \in (-1, 1) \notin (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ - nierówność sprzeczna

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Słownik

wartość bezwzględna liczby x

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą galerią zdjęć interaktywnych pokazującą sposób rozwiązywania nierówności kwadratowej z wartością bezwzględną.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność $(x - 2)^2 - 8 \cdot |x - 2| + 15 \leq 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną lub dwiema wartościami bezwzględnymi
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności różnych typów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- odwrócona klasa

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu przygotowują sposób rozwiązywania prostych nierówności kwadratowych z wartością bezwzględną.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania nierówności kwadratowych z wartością bezwzględną, które przygotowali w domu.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe rozwiązują zadania interaktywne 1- 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.
3. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jaki napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu ćwiczenia 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Nierówność kwadratowa](#)

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może być materiałem inspirującym do przygotowania przez uczniów własnego samouczka jako materiału na lekcję powtórzeniową. Można ją również wykorzystać na zajęciach poświęconych zastosowaniu wartości bezwzględnej.