



Wektory prostopadłe w układzie współrzędnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W tym rozdziale poznasz kryterium prostopadłości wektorów umieszczonych w prostokątnym układzie współrzędnych. Ten prosty związek między współrzędnymi wektorów prostopadłych znacznie ułatwia rozwiązywanie wielu zadań z geometrii analitycznej.

Twoje cele

- Rozpoznasz wektory prostopadłe w układzie współrzędnych na podstawie ich współrzędnych.
- Wyznaczysz przykładowy wektor prostopadły do danego.

Przeczytaj

Zacniemy od definicji wektorów prostopadłych

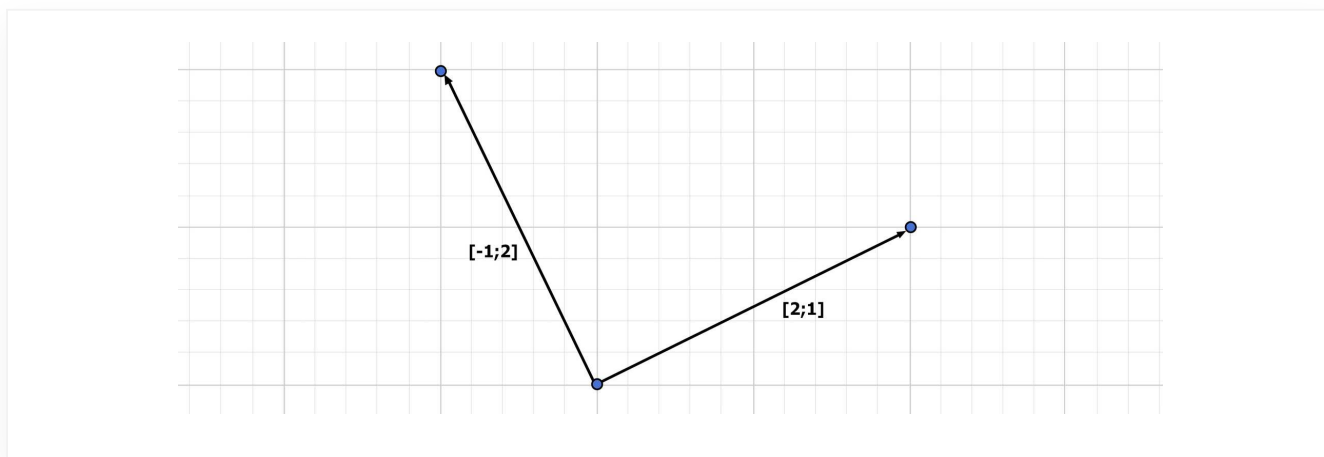
Definicja: wektory prostopadłe

Mówimy, że niezerowe wektory są prostopadłe, gdy ich kierunki są prostopadłe (zawarte są w prostych prostopadłych).

Nie definiujemy prostopadłości wektorów dla wektora zerowego.

Przykład 1

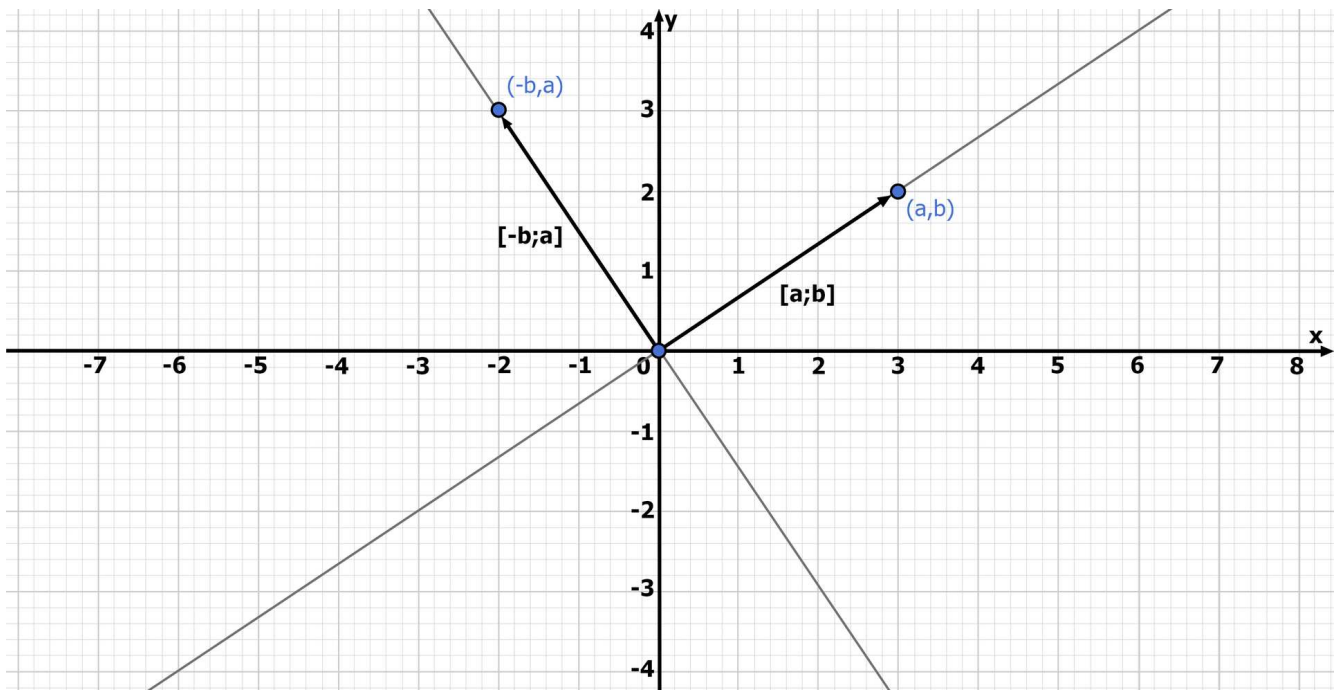
Poniżej przedstawiono pary wektorów prostopadłych wraz ze współrzędnymi. Czy widzisz jakiś związek między współrzędnymi wektorów prostopadłych?



Zwróć uwagę, że aby otrzymać wektor prostopadły do danego wystarczy zamienić miejscami współrzędne danego wektora i dokładnie jednej z nich zmienić znak na przeciwny.

Przykład 2

Uzasadnimy teraz, że wektory $[a; b]$ i $[-b; a]$ są prostopadłe. W tym celu zaczepimy oba wektory w początku układu współrzędnych. Wówczas końce tych wektorów mają współrzędne $(a; b)$ i $(-b; a)$.



Wyznaczmy teraz równania prostych zawierających oba wektory.

Jeśli $a = 0$ lub $b = 0$, to wektory zawarte są w osiach układu współrzędnych, czyli są to **wektory prostopadłe**. Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to ponieważ obie proste przechodzą przez początek układu współrzędnych, ich równania są postaci $y = mx$, gdzie m jest współczynnikiem kierunkowym.

Równanie prostej zawierającej wektor $[a; b]$ otrzymamy, podstawiając współrzędne punktu $(a; b)$ do równania $y = mx$:

$$b = ma \Leftrightarrow m = \frac{b}{a},$$

czyli prosta ma równanie $y = \frac{b}{a}x$.

Analogicznie wyznaczamy równanie prostej zawierającej wektor $[-b; a]$:

$$y = \frac{-a}{b}x.$$

Ponieważ iloczyn współczynników kierunkowych obu prostych jest równy (-1) , to proste są prostopadłe, zatem i wektory $[a; b]$ oraz $[-b; a]$ są prostopadłe. Podobnie dowodzimy, że wektory $[a; b]$ oraz $[b; -a]$ są prostopadłe.

Przypomnijmy jeszcze tylko, że wektor $[ka; kb]$, gdzie $k \neq 0$, jest równoległy do wektora $[a; b]$, zatem jest prostopadły do wektorów $[-kb; ka]$ oraz $[kb; -ka]$.

Ważne!

Kryterium prostopadłości wektorów

Wektory o współrzędnych $[a; b]$ i $[c; d]$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $ac + bd = 0$.

Przykład 3

Rozstrzygniemy, czy podane niżej wektory są prostopadłe. Wektor $[1; -3]$ jest prostopadły do wektora $[6; 2]$, bo $1 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 = 6 - 6 = 0$. Wektor $[1; -3]$ nie jest prostopadły do wektora $[6; 3]$, bo $1 \cdot 6 + (-3) \cdot 3 = 6 - 9 = -3 \neq 0$.

Przykład 4

Wyznamy wartości parametru m tak, aby wektory $[m + 1; 3]$ i $[2; -m]$ były prostopadłe. Aby wektory były prostopadłe wystarczy, aby spełnione było równanie $2(m + 1) - 3m = 0$, którego rozwiązaniem jest $m = 2$.

Słownik

wektory prostopadłe

niezerowe wektory, które są zawarte w prostych prostopadłych

kryterium prostopadłości wektorów

niezerowe wektory o współrzędnych $[a; b]$ i $[c; d]$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $ac + bd = 0$.

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i na jej podstawie rozwiąż zadania.

Trwa wczytywanie danych ..




Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1FHuolEH>

Animacja nawiązująca do treści lekcji dotyczącej wektorów prostopadłych rozpatrywanych w układzie współrzędnych.

Polecenie 2

Polecenie 3

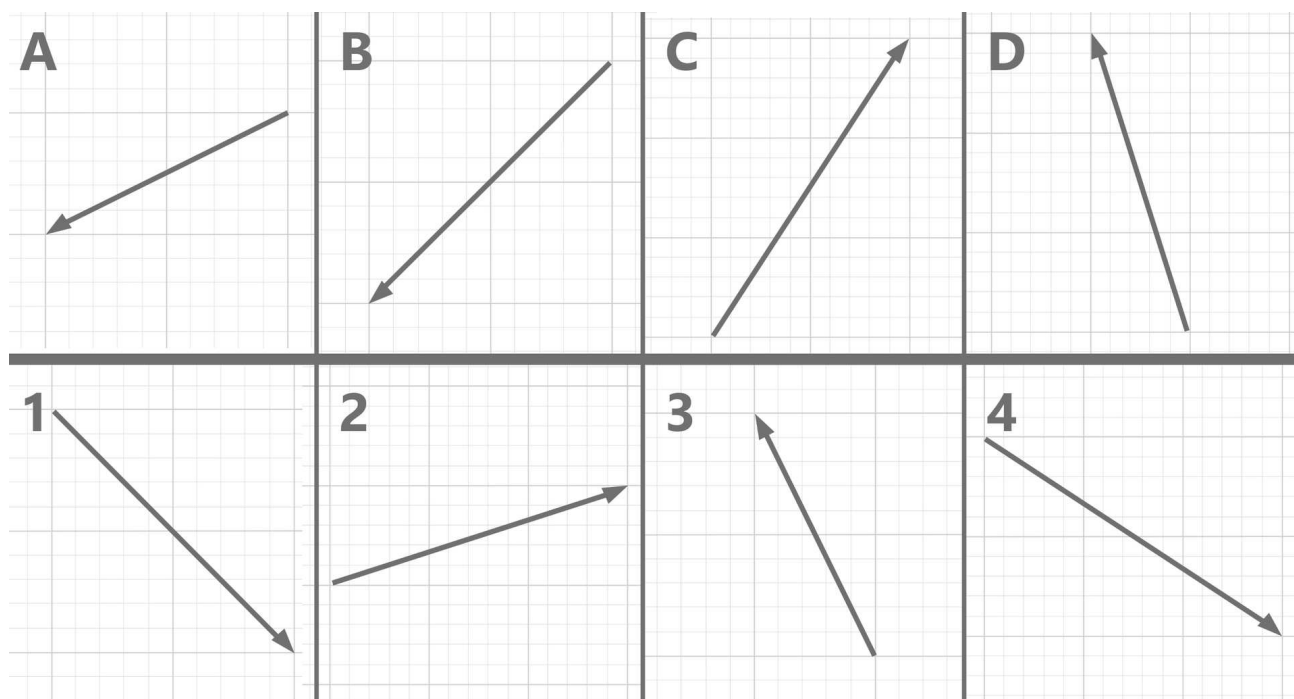
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wektorom A, B, C, D przyporządkuj numery wektorów do nich prostopadłych.



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Udowodnij twierdzenie: Jeżeli $ac + db = 0$ i wektory $[a; b]$ oraz $[c; d]$ nie są wektorami zerowymi, to wektory $[a; b]$ i $[c; d]$ są prostopadłe.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wektory prostopadłe w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Rozpoznasz wektory prostopadłe w układzie współrzędnych na podstawie ich współrzędnych.
- Wyznaczysz przykładowy wektor prostopadły do danego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Wektory prostopadłe w układzie współrzędnych”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” – „Obejrzyj animację i na jej podstawie rozwiąż zadania.”. Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w materiale, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

- [Pojęcie wektora](#)
- [Układ współrzędnych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Wektory prostopadłe w układzie współrzędnych”.