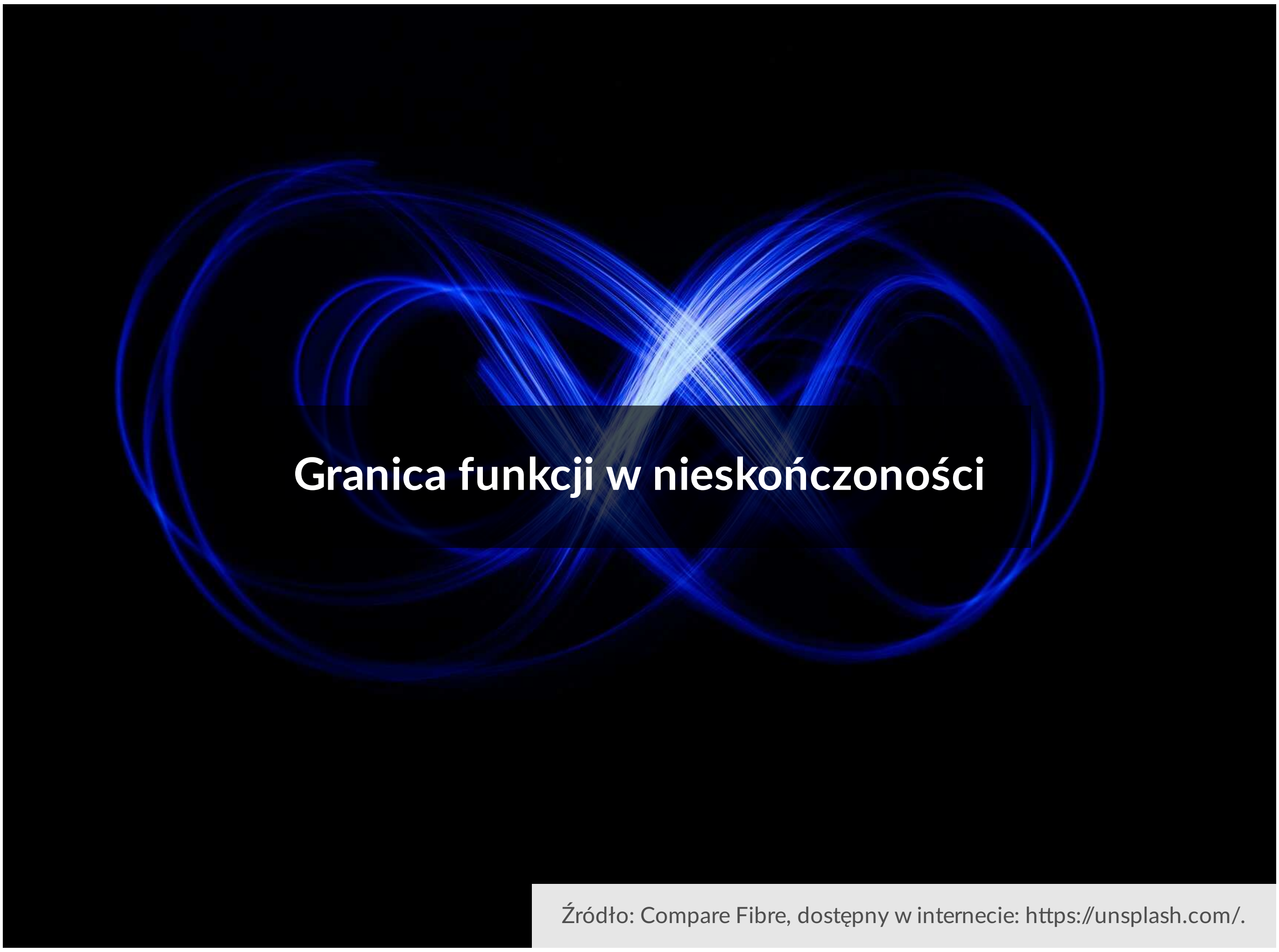
Granica funkcji w nieskończoności

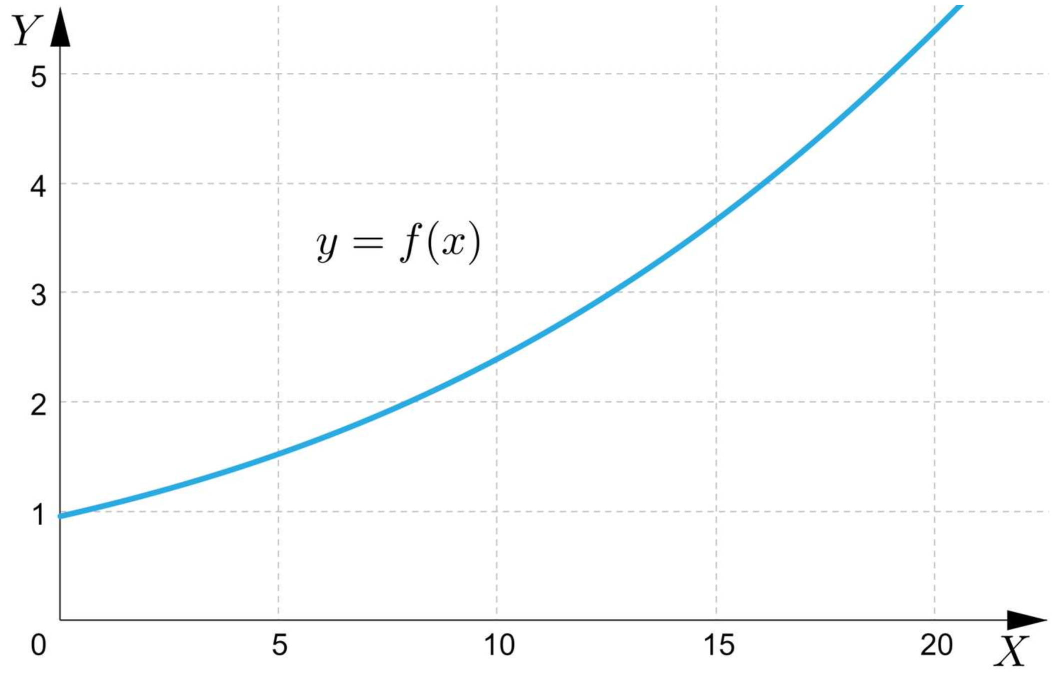


Źródło: Compare Fibre, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Granice funkcji w nieskończoności są użytecznym narzędziem w matematyce, służą między innymi do badania przebiegu zmienności funkcji. W praktyce pozwalają również na odpowiedzi na interesujące pytania natury pozamatematycznej, na przykład czy Ziemi grozi przeludnienie.

Paradoks Maltuzjańskiego modelu wzrostu

Pod koniec osiemnastego wieku angielski naukowiec, Thomas Robert Malthus, rozważył problem przewidywania dalszego rozwoju ludzkości uwzględniając wiele czynników, w tym wielkość populacji. Zauważył, że wzrost populacji jest proporcjonalny do wielkości populacji, czyli jeżeli w miasteczku z tysiącem mieszkańców przez dekadę urodzi się średnio dwieście dzieci, to w mieście z dziesięcioma tysiącami mieszkańców powinno się w tym samym czasie urodzić dwa tysiące dzieci. Na tej podstawie stworzył model matematyczny, używający równania różniczkowego, po czym rozwiązał to równanie i otrzymał wykres wzrostu liczby ludzi na świecie, podobny do poniższego.



Pod koniec XVIII wieku na świecie żyło około 1 miliarda ludzi i według tych obliczeń 10 lat później powinno ich być prawie 2 miliardy, a 20 lat później już prawie 5 miliardów! Liczby te wystraszyły uczonego, który początkowo opublikował swoje wyniki pod pseudonimem. Jak to się jednak stało, że światowa populacja przekroczyła 7 miliardów dopiero w 2010 roku, nie w połowie XIX wieku? Do odpowiedzi na to pytanie będziemy potrzebowali użyć granic funkcji w nieskończoności.

Twoje cele

- Zdefiniujesz skończoną granicę funkcji w nieskończoności.
- Zdefiniujesz nieskończoną granicę funkcji w nieskończoności.
- Na podstawie definicji sprawdzisz, czy funkcja ma granicę w nieskończoności.
- Na podstawie wykresu określisz istnienie granicy funkcji w nieskończoności.

Przeczytaj

W różny sposób definiujemy skończone i nieskończone granice funkcji w nieskończoności. Przypomnijmy na początek dwie równoważne definicje skończonych granic funkcji w nieskończoności: według Heinego i Cauchy'ego.

Definicja: granicy skończonej w nieskończoności według Heinego

Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ granicę skończoną równą L, gdy dla dowolnego ciągu argumentów x_n dążących do $+\infty$, wartości funkcji $f(x_n)$ dążą do L.

Definicja: granicy skończonej w nieskończoności według Cauchy'ego

Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ granicę skończoną równą L, gdy dla dowolnie małej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba dodatnia M, że dla wszystkich argumentów x większych od M wartości funkcji $f(x)$ są pomiędzy $L-\varepsilon$ i $L+\varepsilon$.

Symbolicznie zapisujemy to jako

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Podobnie definiujemy granicę skończoną w $(-\infty)$.

Przykład 1

Sprawdzimy, używając definicji Heinego, czy funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, ma w $+\infty$ granicę skończoną równą 0.

Rozwiązanie

Weźmy dowolny ciąg argumentów x_n dążący $+\infty$.

Wówczas wiemy, że ciąg kwadratów tych argumentów, x_n^2, również dąży do $+\infty$. Zatem ciąg odwrotności kwadratów, $\frac{1}{x_n^2}$, dąży do 0, czyli granicą funkcji f w $+\infty$ jest 0,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Przykład 2

Sprawdzimy, używając definicji Cauchy'ego, czy funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, ma w $+\infty$ granicę skończoną równą 0.

Rozwiązanie

Weźmy dowolnie małą liczbę dodatnią ε. Jeżeli zdefiniujemy liczbę dodatnią M jako odwrotność pierwiastka z ε, czyli $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, to wówczas dla wszystkich argumentów x większych od M wartości funkcji f są nie mniejsze od $0 - \varepsilon = -\frac{1}{M^2}$ i nie większe od $0 + \varepsilon = \frac{1}{M^2}$, i tym samym granicą funkcji f w $+\infty$ jest 0.

Możemy sprawdzić empirycznie, jak wygląda znajdowanie wartości M w zależności od wartości ε na przykładzie funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DrhcVbhWs

Jak widać, im mniejsza wartość ε, tym większa jest wartość M – w dalszym miejscu leżą argumenty, dla których wartości funkcji są pomiędzy zadanymi liniami – ale za każdym razem można taką wartość znaleźć.

Przypomnijmy teraz dwie równoważne definicje nieskończonych granic funkcji w nieskończoności: według Heinego i Cauchy'ego.

Definicja: granicy nieskończonej w nieskończoności według Heinego

Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ granicę nieskończoną równą $+\infty$, gdy dla dowolnego ciągu argumentów x_n, dążących do $+\infty$, wartości $f(x_n)$ dążą do $+\infty$.

Definicja: granicy nieskończonej w nieskończoności według Cauchy'ego

Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ granicę nieskończoną równą $+\infty$, gdy dla dowolnie dużej dodatniej liczby M istnieje taka liczba dodatnia D, że dla wszystkich argumentów x większych od D wartości funkcji $f(x)$ są większe od M.

Symbolicznie zapisujemy to jako

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Podobnie definiujemy granicę nieskończoną równą $-\infty$, oraz obie granice nieskończone w $(-\infty)$.

Przykład 3

Sprawdzimy, używając definicji Heinego, czy funkcja $f(x) = x^2 - 1$ ma w $+\infty$ granicę nieskończoną równą $+\infty$.

Rozwiązanie

Weźmy dowolny ciąg argumentów x_n dążący do $+\infty$. Wówczas wiemy, że ciąg kwadratów tych argumentów, x_n^2, również dąży do $+\infty$. Zatem ciąg kwadratów pomniejszonych o jeden, $x_n^2 - 1$, również dąży do $+\infty$, czyli granicą funkcji f w $+\infty$ jest $+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty.$$

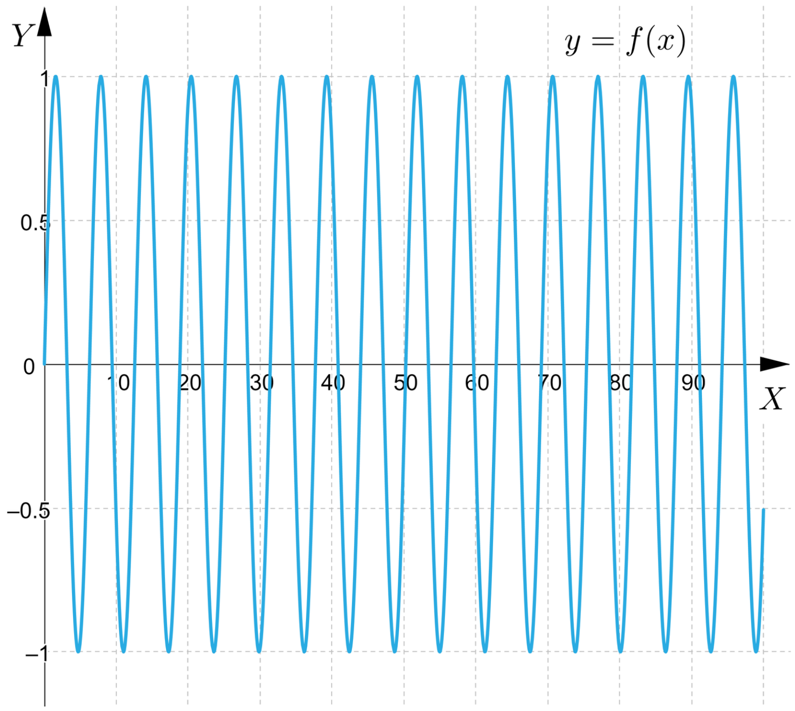
Przykład 4

Sprawdzimy, używając definicji Cauchy'ego, czy funkcja $f(x)=x^2-1$ ma w $+\infty$ granicę nieskończoną równą $+\infty$.

Rozwiązanie

Weźmy dowolnie dużą liczbę dodatnią M. Jeżeli zdefiniujemy liczbę dodatnią D jako pierwiastek z liczby M powiększonej o jeden, czyli $D=\sqrt{M+1}$, to wówczas dla wszystkich argumentów x większych od D wartości funkcji f są nie mniejsze od $D^2-1=M$, i tym samym granicą funkcji f w $+\infty$ jest $+\infty$.

Nie zawsze funkcja musi mieć granicę w nieskończoności, przykładami mogą być podstawowe funkcje trygonometryczne.



Funkcja sinus nie ma granicy w nieskończoności. Rozważmy dwa dowolne ciągi argumentów dążące do $+\infty$:

$$x_{n_1}=n\pi$$

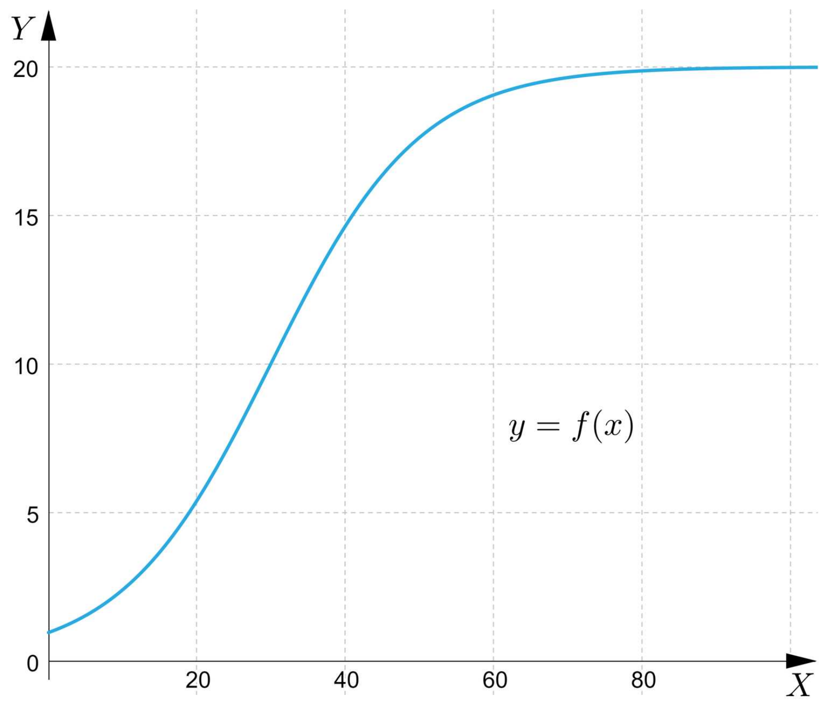
$x_{n_2} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

Zauważmy, że dla n dążącego do $+\infty$ ciąg $f(x_{n_1})$ dąży do 0, zaś ciąg $f(x_{n_2})$ dąży do 1.

To wystarczy, żeby udowodnić, że $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin x)$ nie istnieje.

Wyjaśnienie paradoksu wzrostu

Jak pamiętamy, T. Malthus próbował szacować wzrost populacji ludzi na świecie i otrzymany wynik wydawał się rosnąć w sposób niekontrolowany. Prawdopodobnie w czasach Malthusa nie zdawano sobie sprawy, że funkcja może być jednocześnie rosnąca i ograniczona z góry (przyjąć ten fakt pomogły nam dopiero rozważania dotyczące granic funkcji, które prowadzili niezależnie Augustin Cauchy i Heindrich Heine). Formułując rozważania dotyczące nieskończoności, błędem jest oglądanie tylko najbliższego otoczenia aktualnego momentu czasu na wykresie, gdyż przy względnie małych wartościach argumentów wartości funkcji wydawały się rosnąć nieograniczenie. Dopiero wyznaczenie granicy w nieskończoności pokazało nam długoterminowe zachowanie wartości naszej funkcji.



Słownik

granica skończona w nieskończoności

granica funkcji w nieskończoności ($-\infty$ lub $+\infty$), która jest liczbą rzeczywistą

granica nieskończona w nieskończoności

granica funkcji w nieskończoności ($-\infty$ lub $+\infty$), która jest nieskończona ($-\infty$ lub $+\infty$)

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DSSN7n51a

Polecenie 2

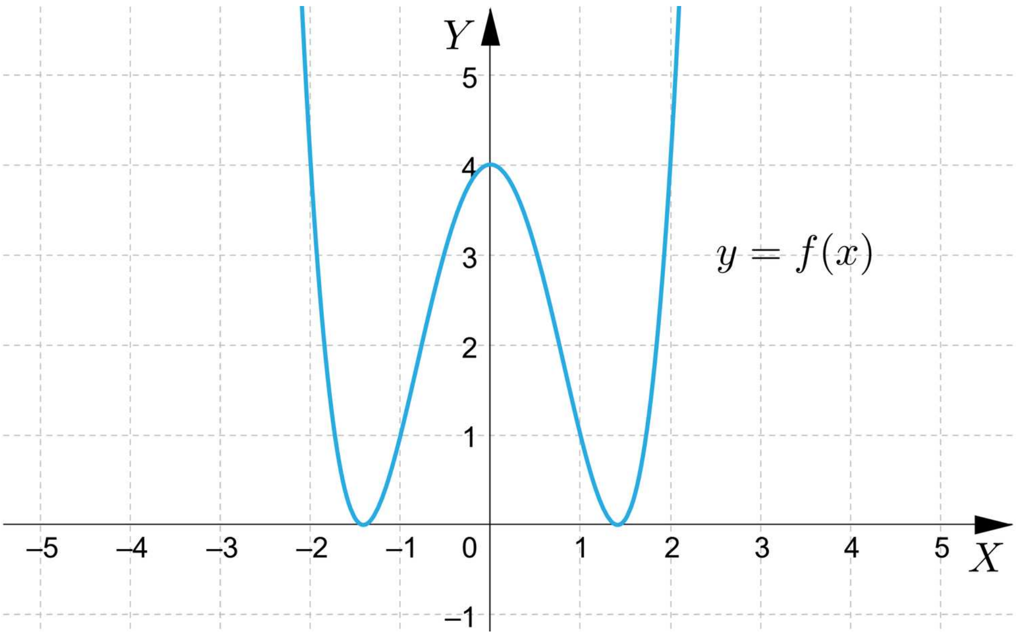
Używając definicji Cauchy'ego sprawdź, czy funkcja $f(x) = \frac{4}{x^4+3}$ ma granicę w $+\infty$ równą 0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

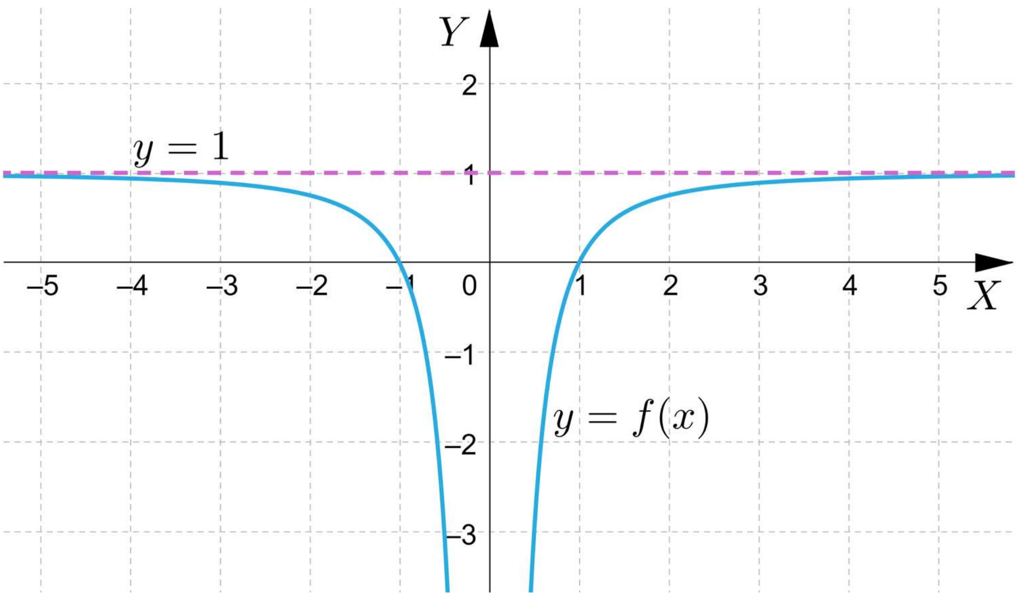
Ćwiczenie 1

Na podstawie wykresu wybierz zdanie prawdziwe.



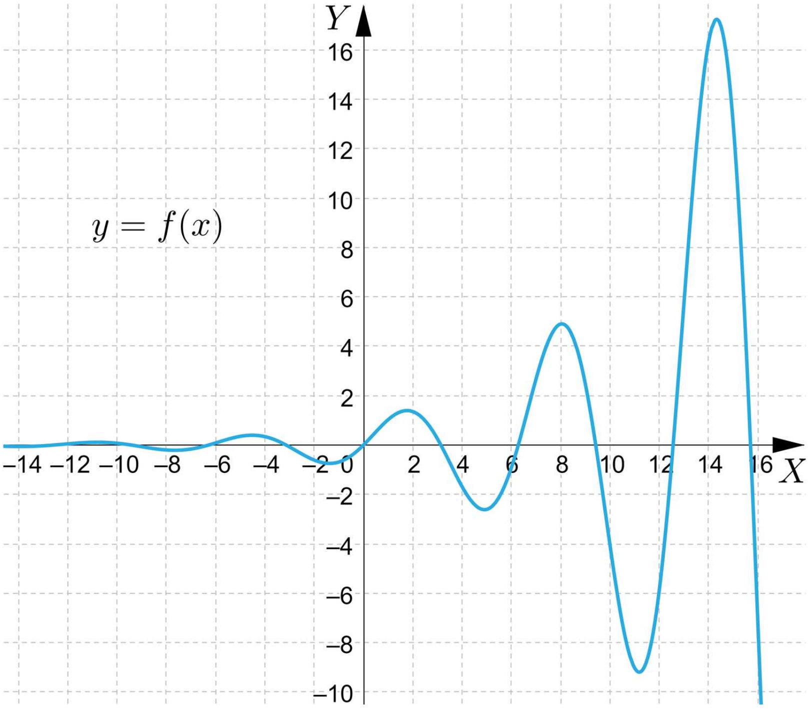
Ćwiczenie 2

Na podstawie wykresu wybierz zdanie prawdziwe.



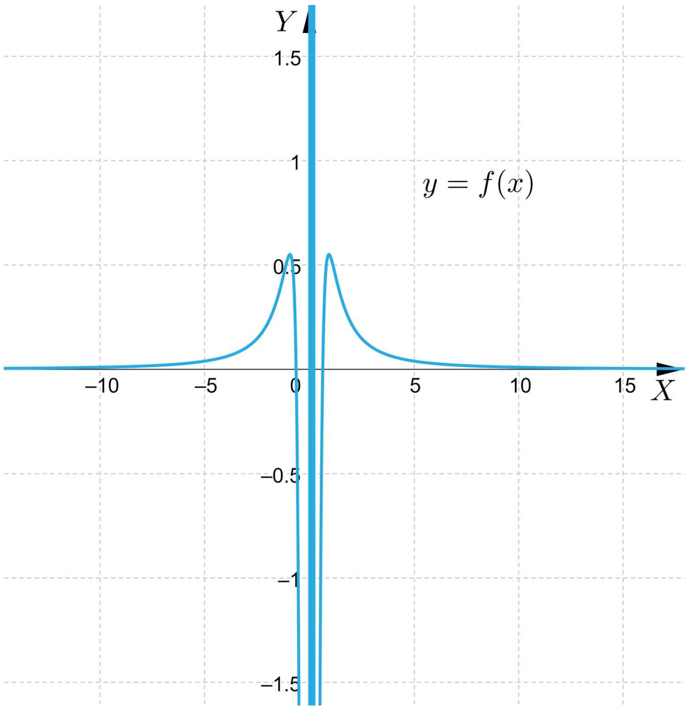
Ćwiczenie 3

Zaznacz wszystkie zdania pasujące do funkcji, którą widzisz na wykresie.



Ćwiczenie 4

Zaznacz wszystkie zdania pasujące do funkcji, którą widzisz na wykresie.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granica funkcji w nieskończoności

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje skończoną granicę funkcji w nieskończoności;
- definiuje nieskończoną granicę funkcji w nieskończoności;
- na podstawie definicji sprawdza, czy funkcja ma granicę w nieskończoności;
- na podstawie wykresu określisz istnienie granicy funkcji w nieskończoności.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,

- rozmowa kierowana,
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z Wprowadzeniem.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat i cele lekcji.
2. Nauczyciel ustala z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej definicje z sekcji „Przeczytaj” oraz omawia je na forum klasy, kładąc nacisk na aplet interaktywny, ilustrujący definicję granicy właściwej w nieskończoności.
2. Uczniowie w 3–4 osobowych grupach czytają pozostałą część sekcji „Przeczytaj” i tworzą mapę myśli na temat granic właściwych i niewłaściwych funkcji w nieskończoności. W przypadku powstania wątpliwości, nauczyciel wyjaśnia na forum całej klasy napotkany problem. Pod opieką prowadzącego uczniowie porównują wyniki pracy nad mapami myśli i omawiają powstałe różnice.
3. Nauczyciel wyświetla prezentację a wybrany uczeń rozwiązuje Polecenie 2.
4. Uczniowie samodzielnie rozwiązują wskazane ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.

Praca domowa:

Uczniowie zadają sobie nawzajem w ramach 3–4 osobowej grupy zadanie, analogiczne do jednego z ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Co to jest granica funkcji
- Granice jednostronne
- Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach
- Wykres funkcji i wykresy wybranych funkcji

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystać jako materiał powtórzeniowy.