



Granice jednostronne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Znamy już pojęcie granicy funkcji w punkcie. Zauważmy, że w poznanych definicjach nie miało znaczenia z której strony tego punktu się znajdujemy. Co w przypadku gdy np. chcielibyśmy policzyć granicę funkcji na skończonym krańcu jej dziedziny? W takiej sytuacji z pomocą przychodzą granice jednostronne funkcji, czyli granica lewo- oraz prawostronna, o których powiemy w tym temacie.

Twoje cele

- Dowiesz się czym są granice jednostronne funkcji w punkcie.
- Obliczysz granicę lewo- i prawostronną wybranych funkcji.
- Obliczysz granicę funkcji na skończonych krańcach jej dziedziny.

Przeczytaj

Granice jednostronne według Heinego

Aby zobrazować ideę granic jednostronnych, spójrzmy na następujący przykład.

Przykład 1

Rozważmy funkcję daną wzorem

$$f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3}.$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Dziedzinę możemy też zapisać jako sumę przedziałów $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Sprawdźmy czy funkcja posiada granicę w punkcie $x_0 = 3$. Na początek zapiszemy wzór funkcji w innej postaci. Wykorzystamy w tym celu definicję [wartości bezwzględnej](#). Rozważmy przypadki

1. Jeśli $2x - 6 > 0$, to wówczas $x > 3$ oraz

$$f(x) = \frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2.$$

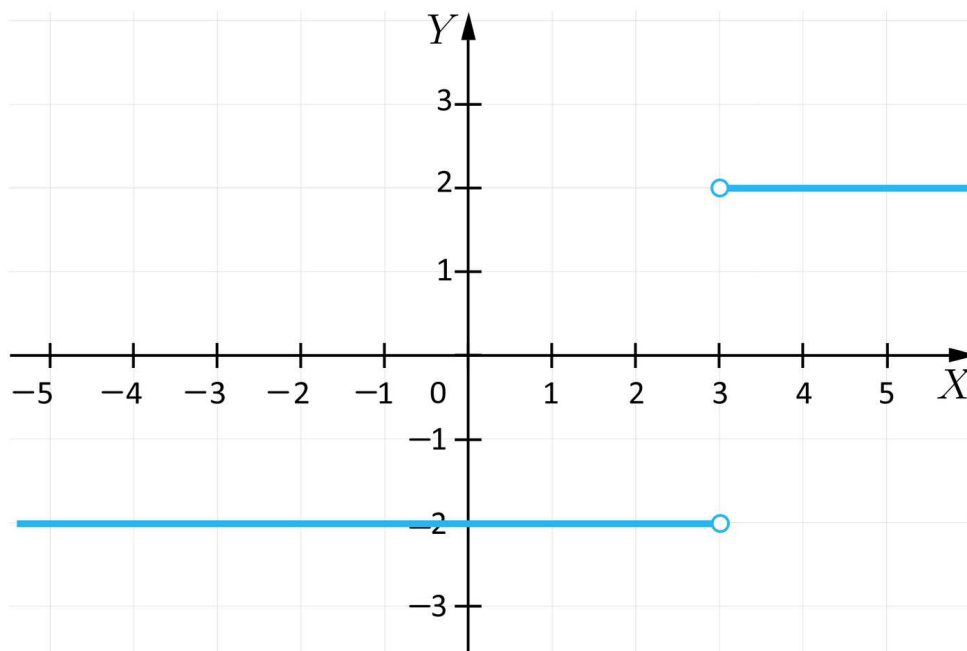
2. Jeśli $2x - 6 < 0$, to wówczas $x < 3$ oraz

$$f(x) = \frac{-(2x-6)}{x-3} = \frac{-2(x-3)}{x-3} = -2.$$

Zatem wzór funkcji możemy zapisać następująco

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x > 3 \\ -2 & \text{dla } x < 3 \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja przyjmuje inną wartość na lewo oraz inną na prawo od punktu $x_0 = 3$. Poniżej znajduje się wykres funkcji f .



Chcąc wykorzystać definicję Heinego definicji funkcji w punkcie, rozsądne wydaje się rozważyć oddzielnie ciągi, których wszystkie wyrazy leżą tylko na lewo lub tylko na prawo od punktu $x_0 = 3$, tzn. takie, które zawierają się w lewo- lub prawostronnym sąsiedztwie tego punktu. Rozważmy zatem przypadki.

1. Niech (x_n) będzie ciągiem argumentów funkcji f zawartym w lewostronnym sąsiedztwie punktu $x_0 = 3$, tzn. $x_n \in (-\infty, 3)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz zbieżnym do liczby 3. Wówczas ciąg wartości funkcji f jest ciągiem stałym równym -2 , tzn. $f(x_n) = -2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem jego granica jest też równa -2 .
2. Niech (x_n) będzie ciągiem argumentów funkcji f zawartym w prawostronnym sąsiedztwie punktu $x_0 = 3$, tzn. $x_n \in (3, +\infty)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz zbieżnym do liczby 3. Wówczas ciąg wartości funkcji f jest ciągiem stałym równym 2 , tzn. $f(x_n) = 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem jego granica jest też równa 2 .

Powyższy przykład pokazuje, że ciąg wartości funkcji f może mieć inną granicę gdy ciąg argumentów zawarty jest lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 a inną, gdy ciąg argumentów zawarty jest prawostronnym sąsiedztwie tego punktu. Obserwacja ta daje motywację do wprowadzenia pojęcia granic jednostronnych funkcji f w punkcie. Rozróżniamy dwa rodzaje granic jednostronnych: lewostronną oraz prawostronną. Formalna definicja, oparta o definicję granicy funkcji w punkcie według Heinego, jest następująca

Definicja: Granica lewostronna funkcji w punkcie według Heinego

Powiemy, że liczba g jest granicą lewostronną funkcji $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) argumentów funkcji f , który jest zwarty w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 (tzn. $x_n \in (x_0 - \delta, x_0)$ dla pewnej liczby $\delta > 0$ oraz

dla każdego $n \in \mathbb{N}$) ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do liczby g . Fakt ten zapisujemy następująco

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g.$$

Analogicznie możemy zdefiniować granicę prawostronną.

Definicja: Granica prawostronna funkcji w punkcie według Heinego

Powiemy, że liczba g jest granicą prawostronną funkcji $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) argumentów funkcji f , który jest zwarty w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0 (tzn. $x_n \in (x_0, x_0 + \delta)$ dla pewnej liczby $\delta > 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$) ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do liczby g . Fakt ten zapisujemy następująco

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g.$$

Powracając do pierwszego przykładu widzimy, że zdefiniowana tam funkcja posiada granice jednostronne w punkcie $x_0 = 3$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2.$$

Spójrzmy na kolejny przykład.

Przykład 2

Obliczymy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 0$ funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^3+x}{|x|}.$$

Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Skorzystamy z definicji [wartości bezwzględnej](#) aby pozbyć się modułu z mianownika. Rozważmy przypadki

1. Jeśli $x > 0$, to

$$f(x) = \frac{x^3+x}{|x|} = \frac{x^3+x}{x} = x^2 + 1.$$

2. Jeśli $x < 0$, to

$$f(x) = \frac{x^3+x}{|x|} = \frac{x^3+x}{-x} = -x^2 - 1.$$

Wzór funkcji f możemy zapisać w następujący sposób.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x > 0 \\ -x^2 - 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Biorąc teraz dowolny ciąg (x_n) argumentów funkcji f taki, że $x_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ widzimy, że $f(x_n) = x_n^2 + 1$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

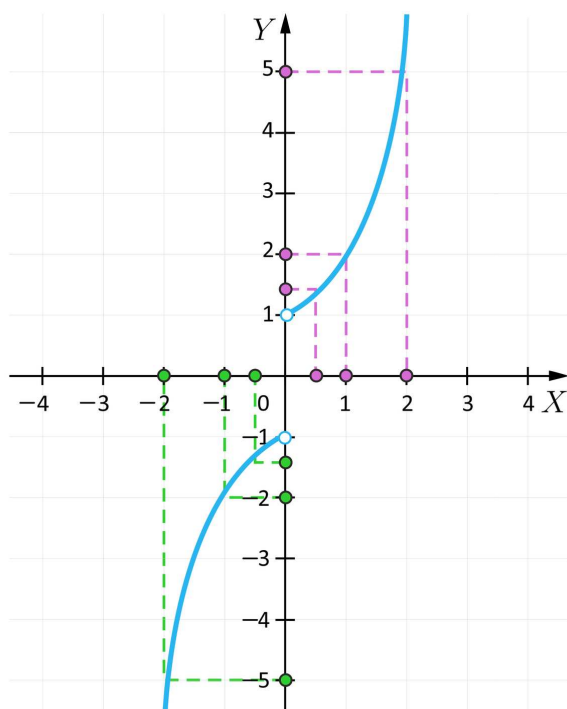
Z drugiej strony biorąc dowolny ciąg (x_n) argumentów funkcji f taki, że $x_n < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ widzimy, że $f(x_n) = -x_n^2 - 1$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -1.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Powyższy przykład ma następującą interpretację graficzną.



Granice jednostronne według Cauchy'ego

Granice jednostronne możemy też zdefiniować w oparciu o definicję Cauchy'ego.

Definicja: Granica lewostronna funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Powiemy, że liczba g jest granicą lewostronną funkcji $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in D_f$ jeśli $x_0 - \delta < x < x_0$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Definicja: Granica prawostronna funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Powiemy, że liczba g jest granicą prawostronną funkcji $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in D_f$ jeśli $x_0 < x < x_0 + \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Przykład 3

Wyznamy granice jednostronne funkcji $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ na krańcach jej dziedziny.

Ponieważ pierwiastek kwadratowy jest określony tylko dla liczb nieujemnych, więc funkcja f jest poprawnie określona jeśli $4 - x^2 \geq 0$. Zatem $D_f = \langle -2, 2 \rangle$.

Ze względu na dziedzinę funkcji f w punkcie $x_0 = -2$ istnieje jedynie granica prawostronna (funkcja jest określona tylko na prawo od -2). Wykażemy, że granica ta jest równa 0. Wykorzystamy definicję Cauchy'ego. Weźmy w tym celu dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $\delta = \frac{\varepsilon^2}{4}$. Weźmy dowolny $x \in D_f$ taki, że $-2 < x < -2 + \delta$. Wynika stąd, że

$$-2 < x \quad \Rightarrow \quad -x < 2 \quad \Rightarrow \quad 2 - x < 4$$

oraz

$$x < -2 + \delta \quad \Rightarrow \quad 2 + x < \delta$$

Stąd otrzymujemy

$$|f(x) - 0| = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2 - x} \cdot \sqrt{2 + x} < \sqrt{4} \cdot \sqrt{\delta} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \varepsilon$$

Z definicji Cauchy'ego granicy prawostronnej wynika zatem, że

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0.$$

W punkcie $x_0 = 2$ z kolei istnieje jedynie granica lewostronna, gdyż funkcja jest określona tylko na lewo od 2. Analogicznie jak powyżej można wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0.$$

Słownik

wartość bezwzględna liczby

wartość bezwzględną (moduł) liczby x definiujemy następująco

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami obliczania granic jednostronnych zawartych w poniższej animacji a następnie wykonaj zamieszczone poniżej polecenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D9vAzqEbQ>

Film nawiązujący do treści materiału

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{x}{2x+4}$$

o dziedzinie

$$D_f = (-4, -2) \cup (-2, 2).$$

Polecenie 2

Oblicz

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x).$$

Polecenie 3

Oblicz

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granice jednostronne

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje granice jednostronne funkcji w punkcie z wykorzystaniem definicji Heinego funkcji w punkcie;
- definiuje granice jednostronne funkcji w punkcie z wykorzystaniem definicji Cauchy'ego funkcji w punkcie;
- oblicza granice jednostronne funkcji w punkcie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- tworzenie przez analogię.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Granice jednostronne” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Granice jednostronne”.