Ciekawe średnie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Sergey Zolkin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Z pojęciem średniej spotykasz się na co dzień. W doniesieniach prasowych, telewizyjnych czy w podręcznikach szkolnych.

Nosicielka wody
Obraz hiszpańskiego malarza Francisca Goi

Interesując się znaczeniem wody dla naszego organizmu, możesz dowiedzieć się na przykład, że człowiek odczuwa pragnienie, gdy straci średnio 1% wody posiadanej w ciele, wydajność naszych nerek to przefiltrowanie średnio $1,5$ l wody w ciągu godziny, utrata wody z organizmu człowieka średnio o 10% jest niebezpieczna dla zdrowia.

Dane te uzyskano na podstawie wielu obserwacji. Mówimy czasem, że dane te są uśrednione. W ujęciu potocznym, średnia oznacza coś przeciętnego, najczęściej spotykanego.

W ujęciu matematycznym średnie są ściśle zdefiniowane. Na pewno wiesz jak obliczyć średnią arytmetyczną wzrostu, czy średnią

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org.

ważoną ocen. Teraz poznasz jeszcze inne średnie, równie przydatne w sytuacjach życia codziennego, jak i w matematyce. Prezentowany materiał wykracza nieco poza treści wynikające z podstawy programowej, zatem możesz potraktować je jako ciekawostki lub rozszerzenie obowiązkowych umiejętności.

Twoje cele

- Obliczysz wartości średniej: harmonicznej, geometrycznej, kwadratowej, winsorowskiej.
- Poznasz zależności między średnimi.
- Zinterpretujesz geometrycznie średnią geometryczną, harmoniczną, kwadratową.

Przeczytaj

Średnie w badaniach statystycznych zaliczane są do miar tendencji centralnej. Można powiedzieć, że wskazują w pewien sposób „środek” zestawu danych. Ponieważ „środek” jest pojęciem mało precyzyjnym, zatem i średnie można definiować różnymi sposobami. Przykłady znanych nam już średnich to mediana i średnia arytmetyczna.

Poznamy teraz niektóre z mniej znanych średnich.

Średnia geometryczna

Za pomocą średniej geometrycznej dokonuje się charakterystyki podobieństw zbiorowości statystycznych ze względu na wyróżnioną cechę. Do pomiaru wykorzystywane są wszystkie wartości szeregu. Pozwala to na uzyskanie przeciętnej cechy mierzalnej w danym zestawie.

Zaletą średniej geometrycznej jest to, że słabiej reaguje na wartości ekstremalne (czasem przypadkowe wartości) od średniej arytmetycznej.

Definicja: Średnia geometryczna

Średnią geometryczną n dodatnich liczb $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ nazywamy liczbę

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Przykład 1

Średnia geometryczna liczb 2, 4, 8 jest równa $\sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Średnia geometryczna jest liczbą mianowaną. Jej miano jest takie samo, jak to, które posiadają dane, z których jest obliczana.

Ma zastosowanie w przypadku wielkości zmieniających się w postępie geometrycznym (np. w demografii, przy obliczaniu przeciętnego tempa wzrostu dochodu narodowego, w obliczeniach związanych z ciągiem geometrycznym).

Przykład 2

Znajdziemy dodatnią liczbę x, dla której liczby 4, $x + 1$, 9 są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego rosnącego.

Rozwiązanie:

Wiemy, że w ciągu geometrycznym wyraz środkowy jest średnią geometryczną wyrazów skrajnych.

Zatem:

$x+1=\sqrt{4\cdot 9}$

$x+1=\sqrt{36}$

$x+1=6$

$x=5$

Otrzymany ciąg (4, 6, 9) jest ciągiem rosnącym, zatem liczba 5 spełnia warunki zadania.

Odpowiedź:

Szukana liczba to 5.

Średnia harmoniczna

Definicja: Średnia harmoniczna

Średnią harmoniczną n dodatnich liczb $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ nazywamy liczbę

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Przykład 3

Obliczymy średnią harmoniczną liczb 2, 2, 4, 5, 10, 10.

$H=\frac{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}=\frac{6}{\frac{10+10+5+4+2+2}{20}}$

$H=\frac{120}{33}=\frac{40}{11}=3\frac{7}{11}$

Z obliczeniami związanymi ze średnią harmoniczną, spotykamy się najczęściej w przypadku problemów wymagających uśrednienia wielkości względnych, czyli wówczas, gdy zmienne wyrażone są w jednostkach względnych, np. $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ (prędkość), $\frac{\mathrm{osoba}}{\mathrm{km}^2}$ (gęstość zaludnienia), obliczenia średniej prędkości pojazdów czy wyznaczenia czasu pracy danej grupy osób.

Przykład 4

Pan Tadeusz napełnia ogrodowy basen w ciągu 2 godzin, a pan Wacław napełnia ten sam basen w ciągu 40 minut. W ciągu ilu minut napełnią basen obaj panowie pracując wspólnie?

Rozwiązanie:

W obliczeniach wykorzystamy średnią harmoniczną – wynik podamy w minutach.

$2 \text{ h} = 120 \text{ min}$

Obliczamy średni czas potrzebny do napełnienia basenu przez jedną osobę.

$H = \frac{2}{\frac{1}{120} + \frac{1}{40}} = \frac{2}{\frac{4}{120}} = \frac{240}{4} = 60$

Ponieważ basen napełniać będą 2 osoby, zatem na napełnienie basenu potrzebują $60 \text{ min} : 2 = 30 \text{ min}$.

Odpowiedź:

Pracując razem panowie napełnią basen w ciągu 30 minut.

Średnia kwadratowa

Przykładem średniej, która ma duże znaczenie praktyczne, jest średnia kwadratowa. W obliczeniach matematycznych związana jest z odchyleniem standardowym, w fizyce wykorzystywana jest np. w teorii kinetycznej gazów, obliczeniach związanych z wartością skuteczną natężenia prądu przemiennego.

Definicja: Średnia kwadratowa

Średnią kwadratową n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy pierwiastek ze średniej arytmetycznej kwadratów tych liczb

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

Przykład 5

Obliczymy średnią kwadratową liczb 2, 2, 4, 8.

$K = \sqrt{\frac{2^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2}{4}} = \sqrt{22} \approx 4,7$

Przykład 6

Pani Matylda ma trzy kwadratowe działki o bokach długości odpowiednio 110 m, 50 m i 10 m. Chce podzielić ziemię po równo między trójkę swoimi dzieci. W tym celu chce całość zamienić na trzy kwadratowe działki jednakowej wielkości. Jaka musi być długość boku każdej z tych działek?

Rozwiązanie:

$K = \sqrt{\frac{110^2 + 50^2 + 10^2}{3}} = \sqrt{\frac{14700}{3}} = \sqrt{4900}$

> $K = 70 \text{ m}$
>
> Długość boku każdej działki powinna wynosić 70 m.

Średnia potęgowa

> **Definicja: Średnia potęgowa**
>
> Średnią potęgową rzędu k (inaczej średnią uogólnioną) n liczb $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n$ nazywamy liczbę
>
> $$P_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}}$$

> **Przykład 7**
>
> Obliczymy średnią potęgową rzędu 4 liczb 1, 2, 3, 4.
>
> $$P_k = \sqrt[4]{\frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4}{4}}$$
>
> $$P_k = \sqrt[4]{\frac{354}{4}} \approx 3,1$$

> **Ważne!**
>
> Średnie potęgowe niektórych rzędów mają własne nazwy:
>
> - średnia harmoniczna to średnia potęgowa rzędu (-1),
> - średnia geometryczna to średnia potęgowa rzędu 0,
> - średnia arytmetyczna to średnia potęgowa rzędu 1,
> - średnia kwadratowa to średnia potęgowa rzędu 2.

Średnia winsorowska

Bardzo często, analizując zebrane dane, można zauważyć, że niektóre liczby są zdecydowanie większe lub dużo mniejsze od pozostałych. Nazywamy je obserwacjami odstającymi. Mogą one znacząco zaburzyć wyniki obliczeń. Zatem w wielu wypadkach usuwa się te „niepasujące” wyniki.

W podobny sposób ocenia się skoczków narciarskich, gdzie spośród 5 ocen przyznanych przez sędziów, wybiera się trzy, odrzucając ocenę najwyższą i ocenę najniższą.

Jedną ze średnich odpornych na obecność obserwacji odstających jest średnia winsorowska.

Wyznacza się ją podobnie jak średnią arytmetyczną. Ale, po uporządkowaniu zbioru danych w sposób niemalejący, ucinamy ustaloną liczbę obserwacji (z prawej i lewej strony szeregu), a następnie dopisujemy tyle danych, ile ucięliśmy. Połowa spośród dopisanych obserwacji jest równa pierwszej (czyli najmniejszej), a połowa ostatniej (czyli największej) obserwacji z podzbioru, który pozostał po ucięciu.

Z reguły „ucina się” ok. 10 – 25 procent liczb z obu końców szeregu. Jeśli współczynnik „ucięcia” wynosi 0% – średnia winsorowska jest równa średniej arytmetycznej.

> **Przykład 8**
>
> Obliczymy 10 – procentową średnią winsorowską liczb: 6, 4, 10, 20, 8, 10, 7, 1, 3, 8.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Porządkujemy liczby w sposób rosnący: 1, 3, 4, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 20.
>
> Zastępujemy 10% liczb z każdego końca (czyli po jednej) najbliższą wartością spoza pozostałych.
>
> Otrzymujemy: 3, 3, 4, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10.
>
> Obliczamy średnią arytmetyczną tak powstałego szeregu.
>
> $\frac{3+3+4+6+7+8+8+10+10+10}{10} = \frac{69}{10} = 6,9$
>
> **Odpowiedź:**
>
> Średnia winsorowska jest równa $6,9$.

Zależności między średnimi

Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ zachodzą następujące zależności:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

Możemy zapisać:

$$H \leq G \leq \bar{x} \leq K$$

> **Przykład 9**
>
> Wykażemy, że dla liczb nieujemnych a, b prawdziwa jest nierówność:
>
> $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2a+2b}$
>
> **Rozwiązanie:**

Skorzystamy z zależności między średnią arytmetyczną, a średnią kwadratową dla liczb $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$.

Stąd:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{b}\right)^2}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez 2.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq 2\sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

Włączamy 2 pod znak pierwiastka i otrzymujemy:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2a+2b}$$

czyli nierówność, którą należało udowodnić.

Przykład 10

Wykażemy, że zachodzi nierówność

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{3\cdot(a+b+c)}$$

gdzie:
a, b, c – są długościami boków trójkąta.

Rozwiązanie:

Liczby a,b, c są długościami boków trójkąta, zatem są to liczby dodatnie. Ponad to z nierówności trójkąta wynika, że:

$$a+b>c, b+c>a, c+a>b$$

Zatem również liczby $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ są dodatnie.

Oznaczmy:

$$x=a+b-c$$

$$y=b+c-a$$

$$z=c+a-b$$

Wtedy dowodzona nierówność ma postać:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3 \cdot (x + y + z)}$

Jej prawdziwość wynika z zależności miedzy średnią arytmetyczną, a średnią kwadratową.

Postępujemy podobnie, jak w przykładzie poprzednim:

$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2}{3}}$

Mnożymy obie strony nierówności przez 3 i włączamy 3 pod znak pierwiastka.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3 \cdot (x + y + z)}$

A ta nierówność jest równoważna dowodzonej nierówności.

Stąd.

$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leq \sqrt{3 \cdot (a + b + c)}$

Słownik

średnia geometryczna

n dodatnich liczb $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ to liczba

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

średnia harmoniczna

n dodatnich liczb $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ to liczba

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

średnia kwadratowa

n liczb dodatnich $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ to pierwiastek ze średniej arytmetycznej kwadratów tych liczb

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

średnia potęgowa

rzędu k n liczb $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ to liczba

$P_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}}$

Animacja

Polecenie 1

Pokażemy teraz interpretację geometryczną średniej geometrycznej, harmonicznej i kwadratowej.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DXbTeSROO

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego ciekawych średnich.

Polecenie 2

Zapisz za pomocą nierówności zależność między średnimi, korzystając z ostatniego rysunku zamieszczonego w prezentacji. Porównaj uzyskane nierówności z zapisem w sekcji „Przeczytaj”.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq a + b + c$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciekawe średnie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartości średniej: harmonicznej, geometrycznej, kwadratowej
- pozna zależności między średnimi
- zinterpretuje geometrycznie średnią geometryczna, harmoniczną, kwadratową
- uzasadnia prawdziwość nierówności algebraicznych, korzystając z zależności między średnimi
- analizuje skomplikowane problemy matematyczne, wybiera najskuteczniejszą metodę ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza ABC
- lista pytań kontrolnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie przypominają wiadomości na temat poznanych miar centralnych, w szczególności na temat średniej arytmetycznej. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują w grupach metodą ABC. Ustalają liczbę elementów do analizy (4 – średnia geometryczna, harmoniczna, winsorowska, kwadratowa i potęgowa).

Każda z grup będzie pracowała nad jedną średnią. Grupy określają parametry, które będą przedmiotem ich analizy w odniesieniu do danej średniej. Następnie zapoznają się z potrzebnymi wiadomościami zapisanymi w sekcji Przeczytaj. Mogą też pozyskać dodatkowe wiadomości, oglądając prezentację. Wykreślają krzywą ABC – krzywą mogą wzbogacić elementami podobnymi jak w mapie myśli.

Po upływie wyznaczonego czasu, grupy prezentują średnie, nad którymi pracowali, pokazując również przykłady rozwiązanych zadań.

Uczniowie wspólnie omawiają zależności między średnimi (na podstawie informacji z sekcji „Przeczytaj”, podają odpowiednie przykłady.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji i omówienie prac grup, w których pracowali.

Dyskusja – rozważenie różnych sytuacji, które wymagają wyboru różnych średnich (w tym średniej arytmetycznej).

Podsumowaniem zajęć jest refleksja nauczyciela na temat mocnych i słabych stron w pracy uczniów, strategii ich pracy, zaangażowania i czytelności prezentacji.

Praca domowa:

Zadaniem domowym uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Średnia geometryczna

Wskazówki metodyczne:

Geometryczną interpretację średnich można wykorzystać przy okazji omawiania tematów związanych z trapezem.